

# 2017~2018学年广东广州越秀区高二下学期理科 期末数学试卷

## 一、选择题（本大题共12个小题，每小题5分，共60分）

1 设*i*为虚数单位，若复数*z*满足 $\frac{\bar{z}}{1-i} = i$ ，其中 $\bar{z}$ 为复数*z*的共轭复数，则 $|z| =$ （ ）.

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D. 2

2 已知命题*p*:  $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$ , *q*: “ $x > 1$ ”是“ $x > 2$ ”的充分不必要条件，则下列命题为真命题的是（ ）.

- A.  $p \wedge q$                       B.  $\neg p \wedge \neg q$                       C.  $\neg p \wedge q$                       D.  $p \wedge \neg q$

3 随机变量*X*服从二项分布 $B(n, p)$ ，且 $E(X) = 300$ ,  $D(X) = 200$ ，则*p*等于（ ）.

- A.  $\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{2}{5}$                       D.  $\frac{3}{5}$

4 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点*F*的直线*l*与抛物线交于*A*、*B*两点，若*A*、*B*两点的横坐标之和为 $\frac{10}{3}$ ，则 $|AB| =$ （ ）

- A.  $\frac{13}{3}$                       B.  $\frac{14}{3}$                       C.  $\frac{16}{3}$                       D.  $\frac{22}{3}$

5 已知3件次品和2件正品混在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机检测一件产品检测后不放回，则在第一次取出次品的条件下，第二次取出的也是次品的概率是（ ）.

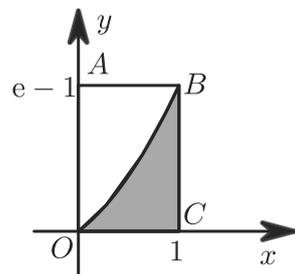
- A.  $\frac{3}{10}$                       B.  $\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{6}$

- 6 已知随机变量  $X$  服从正态分布  $N(5, 1)$ ，若  $P(4 < X \leq 6) = 0.6826$ ，则  $P(X \geq 6) = ( )$  .
- A. 0.3413                      B. 0.3174                      C. 0.1587                      D. 0.1586

- 7 将7个座位连成一排，安排4个人就座，恰有两个空位相邻的不同坐法有 ( ) .
- A. 240                              B. 480                              C. 720                              D. 960

- 8 设  $F_1$  和  $F_2$  为双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的两个焦点，点  $P$  在双曲线上，满足  $\angle F_1 P F_2 = 90^\circ$ ，则  $\triangle F_1 P F_2$  的面积是 ( ) .
- A. 1                                  B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                                   C. 2                                  D.  $\sqrt{5}$

- 9 如图所示的阴影部分是由  $x$  轴，直线  $x = 1$  及曲线  $y = e^x - 1$  围成，现向矩形区域  $OABC$  内随机投掷一点，则该点落在阴影部分的概率是 ( ) .



- A.  $\frac{1}{e}$                                   B.  $\frac{1}{e-1}$                                   C.  $1 - \frac{1}{e}$                                   D.  $\frac{e-2}{e-1}$

- 10 函数  $f(x) = x(x-c)^2$  在  $x = 2$  处有极大值，则  $c = ( )$  .
- A. 2                                  B. 4                                  C. 6                                  D. 2或6

- 11 利用面积法可得：边长为1的正三角形内任一点到三边距离之和是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，类比到空间，棱长均为1的正四面体内任一点到各面距离之和是 ( ) .

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                                   B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                                   C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                                   D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

- 12 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足： $f(x) + f'(x) > 1$ ， $f(0) = 4$ ，则不等式  $e^x f(x) > e^x + 3$  (其中  $e$  为自然对数的底数) 的解集为 ( ) .

A.  $(0, +\infty)$

B.  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

C.  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

D.  $(3, +\infty)$

## 二、填空题 (共4小题, 每小题5分, 共20分)

13 若曲线  $y = kx + \ln x$  在点  $(1, k)$  处的切线平行于  $x$  轴, 则  $k =$  \_\_\_\_\_ .

14 在  $(2x + 1)(x - 2)^5$  的展开式中, 含  $x^2$  的系数等于 \_\_\_\_\_ .

15 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两顶点为  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ , 且左焦点为  $F$ , 若  $AB \perp BF$ , 则椭圆的离心率是 \_\_\_\_\_ .

16 若函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$  有极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ,  $f(x_1) = x_1$ , 则关于  $x$  的方程  $[f(x)]^2 + 2af(x) + b = 0$  的不同实数根的个数是 \_\_\_\_\_ .

## 三、解答题 (本大题共5小题, 共60分)

17 某厂响应国家“坚决打好蓝天保卫战”的号召, 每年都对生产技术和工艺进行升级, 下表为最近五年生产甲产品过程中年份  $x$  与相应的生产能耗  $y$  (吨) 标准煤的对照数据:

年份 $x$	1	2	3	4	5
生产能耗 $y$ (吨)	8	6	5	4	2

已知  $x$  和  $y$  具有线性相关关系.

(1) 求  $y$  关于  $x$  的线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ .

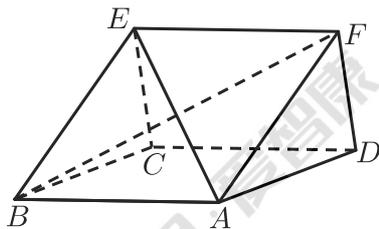
(2) 某同学认为,  $\hat{y} = -1.5x + 9$  更适宜作为  $y$  关于  $x$  的回归方程类型, 与 (1) 中的线性回归

方程比较, 请你用残差平方和  $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  来说明哪个回归方程的拟合效果更好?

(其中  $y_i$  为真实值,  $\hat{y}_i$  为预报值.)

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

18 如图, 菱形  $ABCD$  与正三角形  $BCE$  的边长均为 2, 它们所在平面互相垂直,  $\angle CBA = 60^\circ$ .



(1) 求证:  $BC \perp EA$ .

(2) 若  $FD \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $FD = \sqrt{3}$ , 求二面角  $D - AF - B$  的余弦值.

19 为了更好地服务民众, 某共享单车公司在其官方 APP 中设置了用户评价反馈系统, 以了解用户对车辆状况和优惠活动的评价, 现从评价系统中选出 200 条较为详细的评价信息进行统计, 车辆状况与优惠活动评价的  $2 \times 2$  列联表如下:

	对优惠活动好评	对优惠活动不满意	合计
对车辆状况好评	100	30	130
对车辆状况不满意	40	30	70
合计	140	60	200

(1) 能否在犯错误的概率不超过 0.010 的前提下认为优惠活动好评与车辆状况好评之间有关系?

(2) 为了回馈用户, 公司通过 APP 向用户随机派送每张面额为 0 元, 1 元, 2 元的三种骑行券, 用户每次使用 APP 扫码用车后, 都可获得一张骑行券, 用户骑行一次获得 1 元券, 获得 2 元券的概率分别是  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5}$ , 且各次获取骑行券的结果相互独立, 若某用户一天使用了两次该公司的共享单车, 记该用户当天获得的骑行券面额之和为  $X$ , 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

参考数据:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ 。

20 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ ，它的左焦点  $F$  与短轴两端点构成的三角形面积为  $\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 已知  $M(-4, 0)$ ，设过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆交于  $P$ 、 $Q$  两点，记  $\triangle MPF$  和  $\triangle MQF$  的面积

分别为  $S_1, S_2$ ，证明： $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|MP|}{|MQ|}$ 。

21 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{a} - 2\ln x (a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ 。

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性。

(2) 若函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，证明： $x_1 x_2 > e$ 。

#### 四、选做题 (共2小题，选做一题计10分)

22 在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$  (其中  $\alpha$  为参数)，曲线

$C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$ ，以坐标原点  $O$  为极点， $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求曲线  $C_1$  的普通方程和曲线  $C_2$  的极坐标方程。

(2) 若射线  $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho \geq 0)$  分别与曲线  $C_1$  交于  $A$  点，与曲线  $C_2$  交于  $O$ 、 $B$  两点，求  $|AB|$  的值。

23 已知不等式  $2|x-3| + |x-4| < a^2 + a$ 。

(1) 若  $a = 1$ ，求不等式的解集。

(2) 若不等式的解集不是空集，且  $a \in \mathbf{N}^*$ ，求满足条件的最小整数  $a$  的值。