2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题意要求的。

1.

答案：C

解析：$\because z=\dfrac{3-i}{1+2i}$, $\therefore |z|=\dfrac{|3-i|}{|1+2i|}=\dfrac{\sqrt{3^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$

2.

答案：C

解析：$\because A=\{2,3,4,5\}$，$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\therefore \complement_U A=\{1,6,7\}$，而 $B=\{2,3,6,7\}$

$\therefore B\cap(\complement_U A)=\{6,7\}$

3.

答案：B

解析：由已知得：

$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0$;

$b=2^{0.2}>2^0=1$;

$c=0.2^{0.3}<0.2^0=1$，故 $0<c<1$

$\therefore a<c<b$

4.

答案：B

解析：记其咽喉到肚脐的长度为 xcm,

依题，有：

$\dfrac{26}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,则：$x=\dfrac{52}{\sqrt{5}-1}\approx 42.07$

记其身高为 y,则：$y=26+x+105=131+x\approx 173.08$.

5.

答案：D

解析：$\because f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=-\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$

$\therefore f(x)$为奇函数，可排除A

而$f(\pi)=\dfrac{\pi}{-1+\pi^2}>0$，

$\therefore$可排除B和C

6.

答案：C

解析：记：$K=\dfrac{1000}{100}=10$，抽取的第一组编号记为S，则：$S=6$;

第$i(i\in N_+)$组编号记为L_i,则有：$L_i=S+(i-1)\cdot K=6+10(i-1)=10i-4$;

易知：当$i=62$时，$L_i=10\times 62-4=616$.

7.

答案：D

解析：由题得$\tan 255^\circ=\tan\left(180^\circ+75^\circ\right)=\tan 75^\circ=\tan\left(30^\circ+45^\circ\right)=\dfrac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}$,

故$\tan 255^\circ=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$，故选$D$

8.

答案：B

解析：由$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$可得$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$，即$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta-\left|\vec{b}\right|^2=0$；又由于$\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$可得

$\cos\theta=\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{2\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{2}$，故$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，故选$B$

9.

答案：A

解析：由程序框图的功能可知第一次执行$A=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$；第二次执行$A=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$，故选$A$

10.

答案：D

解析：由双曲线渐近线的倾斜角为130°，可得$\tan 130^\circ=-\dfrac{b}{a}$，故双曲线的离心率

$$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\tan 130^\circ\right)^2}=\sqrt{\frac{\cos^2 130^\circ+\sin^2 130^\circ}{\cos^2 130^\circ}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 130^\circ}}=\frac{1}{\cos 50^\circ}$$

故选D

11.

答案：A

解析：由题意及正弦定理有$a^2-b^2=4c^2$，故$a^2=4c^2+b^2$，又由余弦定理可得

$\cos A=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$；即$\dfrac{c^2+b^2-\left(4c^2+b^2\right)}{2bc}=\dfrac{-3c^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$即$\dfrac{b}{c}=6$，故选$A$

12.

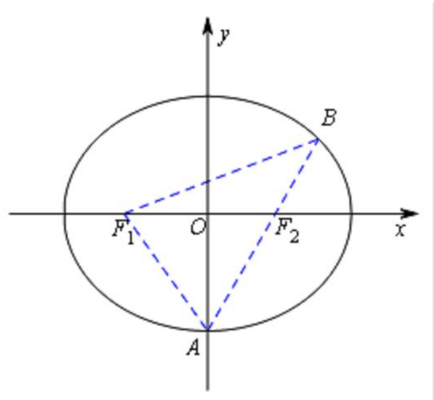
答案：B

解析：由题可设$BF_2=t$，故$AF_2=2t$，$BF_1=3t$，由椭圆定义可得$BF_1+BF_2=4t=2a$，即

$t=\dfrac{a}{2}$，故$AF_2=AF_1=a,BF_2=\dfrac{a}{2},BF_1=\dfrac{3a}{2}$，在$\Delta AF_1F_2$和$\Delta BF_1F_2$中，

$\angle AF_2F_1=\angle BF_2F_1$，由余弦定理有 $\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle BF_2F_1=0$，即

$\dfrac{2^2+a^2-a^2}{2\cdot 2\cdot a}+\dfrac{2^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{3a}{2}\right)^2}{2\cdot 2\cdot \frac{a}{2}}=0$，解得$a^2=3$，由$c=1$，故$b^2=2$，故选$B$



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.

答案： $y=3x$

解析：令 $f(x)=3(x^2+x)e^x$，则 $f'(x)=3(x^2+3x+1)e^x$，

$\therefore f(0)=0$，$f'(0)=3$，

$\therefore$所求切线方程为 $y=3x$

14.

答案：$\dfrac{5}{8}$

解析：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，显然 $q\neq 1$

$\therefore S_3=a_1+a_1q+a_1q^2=1+q+q^2=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$，$a_4=a_1q^3=-\dfrac{1}{8}$，

$\therefore S_4=S_3+a_4=\dfrac{5}{8}$

15.

答案：-4

解析：

$$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$$
$$=-\cos 2x-3\cos x$$
$$=-(2\cos^2 x-1)-3\cos x$$
$$=-2\left(\cos x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$$

$\therefore$当 $\cos x$=1 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(x)_{\min}=-4$

16.

答案：$\sqrt{2}$

解析：如图所示，$\angle ACB=90^\circ$，$PC=2$，

过 P 分别作 $PD\perp AC$ 于 D，$PE\perp BC$ 于 E，

则 $PD=PE=\sqrt{3}$，

$\therefore CD=CE=1$

设 P 在平面 ABC 的射影为 F，连接 DF，EF

$\because PF\perp$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，

$\therefore AC\perp PF$，

又$\because AC\perp PD$，$PD\cap PF=P$，且PD、$PF\subset$平面PDF，

$\therefore AC\perp$平面PDF，

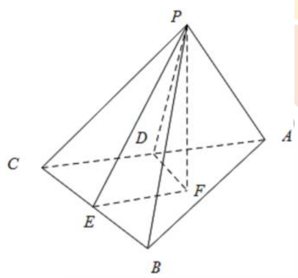
$\therefore AC\perp DF$，

同理可得$BC\perp EF$，

∴四边形$CEFD$为正方形，

$\therefore CF=\sqrt{2}$，

$\therefore PF=\sqrt{PC^2-PF^2}=\sqrt{2}$.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.

解析：（1）设男顾客对该商场服务满意为事件A；设女顾客对该商场服务满意为事件B，则

$$P(A)=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$$

$$P(B)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

故由此可以估计男顾客对该商场满意的概率为$\frac{4}{5}$，女顾客对该商场满意的概率为$\frac{3}{5}$.

（2）由题意可得顾客对该商场满意情况的二联表如下：

	满意	不满意	总计
男顾客	40	10	50

女顾客	30	20	50
总计	70	30	100

$$K^2=\frac{100\times(40\times20-10\times30)^2}{70\times30\times50\times50}=\frac{100}{21}\approx4.76>3.841$$

故有95%的把握认为男、女顾客对该商场的服务的评价有差异.

18.

解析：（1）由 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=-a_5$ 可得 $a_5=0$.

又由 $a_3=4$ 知 $d=\frac{a_5-a_3}{2}=-2$

$\therefore a_n=4+(n-3)(-2)=10-2n$

（2）由（1）可知 $a_5=a_1+4d=0$ 得 $a_1=-4d$.

又由 $a_1>0$ 得 $d<0$

将 $a_1=-4d$ 代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\geq a_n$

可得 $\frac{n(n-9)d}{2}\geq(n-5)d$

左右同除以 $d(d<0)$ 得 $n^2-11n+10\leq0$

解得 $1\leq n\leq10$

又 $\because n\in N^*$，故 n 的范围为 $\{n\in N^*|1\leq n\leq10\}$

19.

解析：（1）连接 ME， B_1C

$\because M,E$ 分别是 BB_1,BC 的中点

$\therefore ME/\!/B_1C$ 且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$

又 $\because A_1D/\!/B_1C$ 且 N 为 A_1D 的中点

$\therefore ND/\!/B_1C$ 且 $ND=\frac{1}{2}B_1C$

故四边形 $MNDE$ 是平行四边形，得 $MN/\!/DE$

$\because MN\not\subset$ 平面 C_1DE 上， $DE\subset$ 平面 C_1DE

$\therefore MN/\!/$ 平面 C_1DE

（2）由题可知，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60^{\circ}, CE=1, DC=2$

因此 $\angle DEC=90^{\circ}, DE=\sqrt{3}$

棱柱为直棱柱，各侧棱垂直于上下底面，由勾股定理可知：

$C_1D^2=DE^2+EC^2$，得 $C_1D=2\sqrt{5}$

$C_1E^2=EC^2+C_1C^2$，得 $C_1E=\sqrt{17}$

可得 $C_1D^2=DE^2+C_1E^2$，故 $\angle D_1EC_1=90^{\circ}$

设 C 到平面 C_1DE 的距离为 h，由图像可知 $V_{C-C_1DE}=V_{C_1-DEC}$

得出 $V_{C_1-DEC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1\times\frac{1}{2}\times 4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$V_{C-C_1DE}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}\times\frac{1}{2}\times h$

计算得 $h=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

20.

解析：（1）$f(x)=2\sin x-x\cos x-x\ (x\in(0,\pi))$

$f'(x)=\cos x+x\sin x-1$，$f''(x)=x\cos x$

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f''(x)>0$，$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$f''(x)<0$

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上递减

注意到 $f'(0)=0$，$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$，$f'(\pi)=-2<0$

$\therefore$ 存在唯一 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})\subseteq(0,\pi)$，使 $f'(x_0)=0$

（2）要证明 $f(x)\geq ax$，只需证明：$x\in[0,\pi]$ 时，$2\sin x-x\cos x-x-ax\geq 0$

设 $g(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax$

注意到：$g(\pi)=-a\pi\geq 0\Rightarrow a\leq 0$（必要条件）

以下证明 $a\leq 0$ 时，$g(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax\geq 0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 时恒成立

$g'(x)=f'(x)-a$ 由（1）可知 $g'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上递减

注意到 $g'(0)=-a\geq 0$

①当 $g'(\pi)=-2-a\geq 0$ 即 $a\leq -2$ 时，

$g'(x)\geq 0$，在 $x\in[0,\pi]$ 时恒成立，$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增。

$\therefore\ g(x)\geq g(0)\geq 0$ 符合题意

② $g'(\pi)=-2-a<0$ 即 $-2<a\leq 0$ 时，

存在唯一 $x_0\in(0,\pi)$，使 $g'(x_0)=0$

且 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，$x\in(x_0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递增，在 (x_0,π) 上递减，又 $\because\ g(0)\geq 0且g(\pi)\geq 0$

$\therefore\ g(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax\geq 0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立

综上：$a\leq 0$ 时，$g(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax\geq 0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上恒成立

即 a 的取值范围为 $\left(-\infty,0\right]$

21.

解析：(1) 由 AB 是弦可知，点 M 在弦 AB 的中垂线上，又 AB 所在的直线方程为 $x+y=0$

则可设点 $M(m,m)$，圆M 的半径为 r，则 $r^2=(m+2)^2$

$$r^2=|MA|^2=|MO|^2+\frac{|AB|^2}{4}$$

即 $(m+2)^2=m^2+m^2+4$

解得 $m=0或m=4$，故有 $r=2或r=6$

(2) 设点 M (x,y)，圆M 的半径为 r，则 $r^2=(x+2)^2$

$$r^2=|MA|^2=|MO|^2+\frac{|AB|^2}{4}$$

即 $(x+2)^2=x^2+y^2+4$

即 $y^2=4x$，$\therefore$ 点 M 的轨迹为抛物线

由抛物线的定义可知，

存在焦点坐标为 $P\left(1,0\right)$，使 $|MA|-|MP|=\left(x+2\right)-\left(x+1\right)=1$ 为定值，即 $|MA|-|MP|=1$

（二）选考题：共10分，请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.

答案：（1）曲线$C: x^2+\frac{y^2}{4}=1$；直线$l: 2x+\sqrt{3}y+11=0$；（2）$\sqrt{7}$

解析：（1）$\because$ 直线l的极坐标方程为$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$

由$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$可得直线$l$的直角坐标方程为$2x+\sqrt{3}y+11=0$

（方法一）$\because$ 曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$为参数）

$\therefore x^2=\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$，$y^2=\frac{16t^2}{(1+t^2)^2}$

$\therefore x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$

$\therefore$ 曲线C的直角坐标方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

（方法二）$\because$ 曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$为参数）

$\therefore x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{-t^2-1+2}{1+t^2}=-1+\frac{2}{1+t^2}$

$\therefore x+1=\frac{2}{1+t^2}$

$\therefore 1+t^2=\frac{2}{x+1}$

$\therefore t^2=\frac{2}{1+x}-1=\frac{1-x}{1+x}$

$\therefore y=\frac{4t}{1+t^2}=4t\cdot\frac{1+x}{2}=2t(1+x)$

$\therefore y^2=4t^2(1+x)^2=4\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot(1+x)^2=4(1-x)(1+x)=4(1-x^2)$

整理得曲线C的直角坐标方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

（2）$\because$曲线C的直角坐标方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

$\therefore$可设曲线C上任意一点P $(\cos\alpha$， $2\sin\alpha)$ $\left(0\le\alpha<2\pi\right)$

$\therefore$点P到直线l的距离$d=\frac{\left|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11\right|}{\sqrt{4+3}}=\frac{\left|4\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+11\right|}{\sqrt{7}}$

$\because$ $0\le\alpha<2\pi$

$\therefore$当$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=-1$时， d取得最小值

$\therefore$曲线C上的点到l距离的最小值$d_{\min}=\frac{\left|-4+11\right|}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}$

23.

答案：证明见解析。

解析：（1）$\because$ a， b， c为正数，且满足$abc=1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot abc\\&=bc+ac+ab\\&=\frac{1}{2}\left(2bc+2ac+2ab\right)\\&\le\frac{1}{2}(b^2+c^2+a^2+c^2+a^2+b^2)\\&=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2\right)\\&=a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

当且仅当$a=b=c=1$时，等号成立。

（2）（方法一）$\left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3+c^3+3ac^2+3a^2c+a^3$

$\because$ $abc=1$

$\therefore$ $ab=\frac{1}{c}$， $bc=\frac{1}{a}$， $ac=\frac{1}{b}$

$$\therefore \text{原式} = 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + \frac{3a}{c} + \frac{3b}{c} + \frac{3b}{a} + \frac{3c}{a} + \frac{3a}{b} + \frac{3c}{b}$$

$$= 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

$$\geq 2 \times 3 \times \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} + 3 \times \left(2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}\right)$$

$$= 2 \times 3 + 3 \times (2 + 2 + 2)$$

$$= 24$$

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时，等号成立

（方法二）由基本不等式得

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq \left(2\sqrt{ab}\right)^3 + \left(2\sqrt{bc}\right)^3 + \left(2\sqrt{ca}\right)^3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\left(2\sqrt{ab}\right)^3 \cdot \left(2\sqrt{bc}\right)^3 \cdot \left(2\sqrt{ca}\right)^3} = 24$$

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时，等号成立

【补充】基本不等式推广

一般地，若 a_1， a_2， a_3， …， a_n 是正实数，则有均值不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

（当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ 时等号成立）