2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题意要求的。

1.

答案：C

解析：

$$\because M=\{x|-4<x<2\};\ N=\{x|x2-x-6<0\}=\{x|(x-3)(x+2)<0\}$$

$$=\{x|-2<x<3\}$$

$$\therefore M\bigcap N=\{x|-4<x<2\}\bigcap\{x|-2<x<3\}=\{x|-2<x<2\}$$

2.

答案：C

解析： 依题：$z=x+yi$，x，$y\in R$

$$\therefore z-i=x+(y-1)i,$$

$$\therefore |z+i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$$

$$\therefore x^2+(y-1)^2=1$$

3.

答案： B

解析： 由已知得：

$$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0;$$

$$b=2^{0.2}>2^0=1;$$

$$c=0.2^{0.3}<0.2^0=1 \text{且} 0<c<1$$

$$\therefore a<c<b$$

4.

答案： B

解析： 记其咽喉到肚脐的长度为 xcm，

依题，有：

$$\frac{26}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\text{则：}\ x=\frac{52}{\sqrt{5}-1}\approx 42.07$$

记其身高为y,则：$y=26+x+105=131+x\approx 173.08.$

5.
答案：D

解析：$\because f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=-\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$

$\therefore f(x)$为奇函数，可排除A

而：$f(\pi)=\dfrac{\pi}{-1+\pi^2}>0,$
$\therefore$可排除B和C

6.
答案：A

解析： 对六个位置放置“阴爻”和“阳爻”，共有$2^6=64$种方法；

然后从六个位置中选出三个放置“阳爻”，共有$C_6^3=20$种方法；

因而，满足条件的概率为：$\dfrac{C_6^3}{2^6}=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$

7.
答案：B

解析：$\because (\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b},|\vec{a}|=2|\vec{b}|$；

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}-\vec{b}^2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>-|\vec{b}|^2=(2\cos<\vec{a},\vec{b}>-1)|\vec{b}|^2=0$；

而：$|\vec{b}|\neq 0,\therefore 2\cos<\vec{a},\vec{b}>-1=0$;由：$<\vec{a},\vec{b}>\in[0,\ \pi]$知：

$<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}.$

8.
答案：A

解析：空白框填$\dfrac{1}{2+A}$时， 当$k=1$， $A=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$，当$k=2$，$\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$，满足题意，故

选A

9.

答案： A

解析：由 $S_n=0$，$a_5=5$，得 $\begin{cases}4a_1+6d=0\\ a_1+4d=5\end{cases}$ 得 $a_1=-3$，$d=2$，得 $a_n=2n-5$，$S_n=n^2-4n$，

故选 A

10.

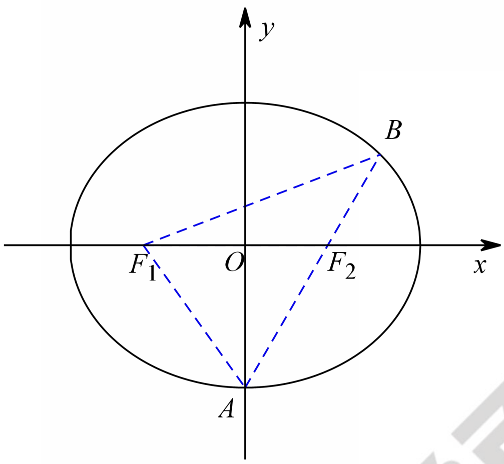
答案：B

解析：由定义 $AF_1+BF_1+AB=4a$， $BF_2+BF_1=2a$， $|AF_2|=2|F_2B|$ 及 $|AB|=|BF_1|$，

得 $AF_1=AF_2=a$， $BF_1=\dfrac{3a}{2},BF_2=\dfrac{a}{2}$，

由 $\angle AF_1F_2+\angle BF_1F_2=\pi$， 得 $\cos\angle AF_1F_2+\cos\angle BF_1F_2=0$，

$\dfrac{(2c)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2}{2\times 2c\times\dfrac{a}{2}}+\dfrac{(2c)^2+a^2-a^2}{2\times 2c\times a}=0$， 解得 $a^2=3$， $b^2=2$， 故选 B.



11.

答案：C

解析： 因为 $f(x)=f(-x)$ 故①对；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时， $f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$，此时 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 递减故②错，当 $x\in[0,\pi]$ 是， $f(x)=2\sin x$，此时有 2 个零点，根据偶函数可知， 在 $x\in[-\pi,\pi]$ 时只有 3 个零点， 故③错； 当 $x>0$ 时，

$f\left(x\right)=\sin x+\left|\sin x\right|\le\left|\sin x\right|+\left|\sin x\right|\le 2$，当 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\ge 0,k\in Z\right)$ 等号成立.故④对，选 C.

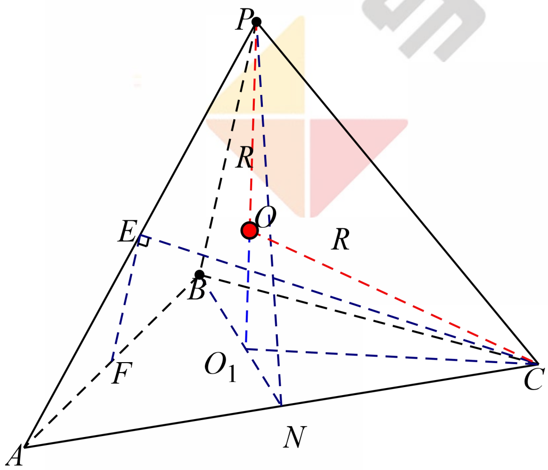
12.

答案： D

解析：

如图，因为 $CE\perp EF$，得 $CE\perp BP$，易证 $AC\perp$ 面 PBN，故 $AC\perp PB$，所以 $BP\perp$ 面 PAC，故 $BP\perp PC$，$PB=PC=\sqrt{2}$，求得 $PO_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$O_1C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 在 $Rt\triangle OO_1C$ 中，

$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$，解得 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故体积为 $\sqrt{6}\pi$，选 D.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.

答案： $y=3x$

解析：$\because$ 点 $\left(0,0\right)$ 在曲线上，$\therefore$ $\left(0,0\right)$ 是切点；

求导得： $y'=3\left(2x+1\right)e^x+3\left(x^2+x\right)e^x=3e^x\left(x^2+3x+1\right)$

$\therefore$ 切线斜率 $k=y'|_{x=0}=3$，

又 $\because$ 切线过切点 $\left(0,0\right)$

$\therefore$ 切线方程为 $y=3x$；

14.

答案：$\dfrac{121}{3}$

解析：$\because \{a_n\}$是等比数列，且$a_4^2 = a_6$，$\therefore \left(a_1q^3\right)^2 = a_1q^6$

$\because a_1 = \dfrac{1}{3}$，故解出$q = 3$，

$$\therefore S_5 = \frac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-3^5\right)}{1-3} = \frac{121}{3}$$

15.

答案：0.18

解析：由题意可知，比赛共进行了5场，且前4场中甲胜出3场，乙胜出1场；

记甲在主场胜出为事件A_1，甲在客场胜出为事件A_2；则乙在主场胜出为事件$\overline{A_1}$，乙在客场胜出为事件$\overline{A_2}$；

由于各场比赛结果相互独立，则根据独立事件的概率甲以$4:1$胜出的概率P为：

$$P = P\left(\overline{A_1}A_1A_2A_2A_1\right) + P\left(A_1\overline{A_1}A_2A_2A_1\right) + P\left(A_1A_1\overline{A_2}A_2A_1\right) + P\left(A_1A_1A_2\overline{A_2}A_1\right)$$
$$= 0.4\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6 + 0.6\times0.4\times0.5\times0.5\times0.6$$
$$+0.6\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6 + 0.6\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6$$
$$= 0.6\times0.5\times0.5\times0.6\times\left(0.4+0.4+0.6+0.6\right)$$
$$= 0.18$$

16.

答案：2

解析：设点B在第四象限，$\because \overrightarrow{BF_1}\bullet\overrightarrow{BF_2} = 0$，$\therefore BF_1 \perp BF_2$，

在$Rt\triangle F_1BF_2$中，$|OB| = |OF_1| = |OF_2| = c$，又因为点$B$在直线$y = -\dfrac{b}{a}x$上，则$B(a,-b)$；

$\because \overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$，$\therefore$点$A$为线段$BF_1$的中点，且有$OA // BF_2$，

故渐近线OA的斜率为$k_{OA} = \dfrac{|F_1A|}{|OA|} = \dfrac{b}{a}$，并且$|OA|^2 + |F_1A|^2 = |OF_1|^2 = c^2$，得到

$|F_1A| = a$，$|OA| = b$，及$|F_1B| = 2a$，$|F_2B| = 2b$；

在$Rt\triangle F_1BF_2$中，由等面积法$\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_B| = \dfrac{1}{2}\cdot|F_1B|\cdot|F_2B|$，得到$y_B = -\dfrac{2ab}{c}$；

$\therefore -b = -\dfrac{2ab}{c}$，解得$e = \dfrac{c}{a} = 2$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.

解析：（1）由题意得：$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$

$\therefore \sin^2 B-2\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin B\sin C$

由正弦定理可得：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore b^2-2bc+c^2=a^2-bc$

$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$ （A 为三角形内角）

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\because \sqrt{2}a+b=2c$

$\therefore \sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$

$\therefore \sqrt{2}\sin A+\sin(A+C)=2\sin C$

$\therefore \sqrt{2}\sin A+\sin A\cos C+\cos A\sin C=2\sin C$

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\dfrac{3}{2}\sin C=0$

$\therefore \sqrt{3}\cos(C+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \cos(C+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\because C=\dfrac{5\pi}{12}$

$\therefore \sin C=\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

18

解析：（1）证明：

连接ME，B_1C，在三角形$\triangle B_1BC$中，M，E为BB_1和BC中点

$\therefore ME//B_1C$ 且 $\therefore ME=\frac{1}{2}B_1C$

$\because A_1D//B_1C$ 且 N为A_1D的中点

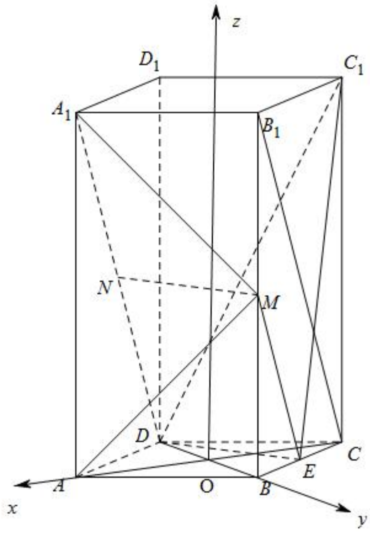
$\therefore ND//ME$ 且 $ND=ME$

$\therefore$四边形$NDEM$是平行四边形

$\therefore NM//DE$

$\because NM\not\subset$平面C_1DE 且 $DE\subset$平面C_1DE

$\therefore MN//$ 平面C_1DE



（2）（方法一）取AC与BD的交点O，四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AC\perp BD$

以OA为x轴，OC为y轴，过原点O平行于BB_1，建立空间直角坐标系

$\therefore A(\sqrt{3},0,0)$，$M(0,1,2)$，$A_1(\sqrt{3},0,4)$，$N(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2)$

$\therefore \overrightarrow{MA_1}=(\sqrt{3},-1,2)$，$\overrightarrow{MA}=(\sqrt{3},-1,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$

设$\vec{m}$和$\vec{n}$分别为平面AMA_1和平面MA_1N的一个法向量

$\therefore$设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

$\therefore\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MA}=0\end{cases}$ 当$x_1=1$时，$\vec{m}=(1,\sqrt{3},0)$

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}=0\end{cases}$ 当$x_2=\sqrt{3}$时，$\vec{n}=(\sqrt{3},1,-1)$

$$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}+0}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2+0}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1+1}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore\sin\left\langle\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA}\right\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$\therefore$二面角$A-MA_1-N$的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$

（方法二）取 AD 中点 F，连接 BF， NF，

$\because$ $AB=AD$ 且 $\angle BAD=60°$ $\therefore$ 三角形$\triangle ABD$ 是等边三角形

$\therefore$ $BF\perp AD$ $\therefore$ 四边形 $MNFB$ 是平行四边形，即 MN 为三棱锥高且 $MN=\sqrt{3}$

$\therefore V_{M\text{-}A_1NA}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{A_1NA}\cdot MN=\dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

记 A 到平面 A_1MN 的距离为 h， $V_{M\text{-}A_1NA}=V_{A\text{-}A_1MN}$

$\therefore$ $h=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

三角形 Rt$\triangle ABM$ 中， $AM=\sqrt{AB^2+MB^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，同理 $A_1M=2\sqrt{2}$，

$\therefore AA_1^{\ 2}=A_1M^2+AM^2$，即 $A_1M\perp AM$

$\therefore \sin\langle A-MA_1-N\rangle=\dfrac{h}{AM}=\dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

19.解：（1）设直线 l 的方程： $y=\dfrac{3}{2}x+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+n \\ y^2=3x \end{cases}$，

整理化简得

$$9x^2+(12n-12)x+4n^2=0$$

由题意，$\Delta=(12n-12)^2-4\times9\times4n^2=-288n+144>0$，则 $n<\dfrac{1}{2}$

由韦达定理得，$x_1+x_2=-\dfrac{4n-4}{3}$

由抛物线的性质易知，

$$|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=-\frac{4n-4}{3}+\frac{3}{2}=4$$

解得 $n=-\dfrac{7}{8}$，经检验，满足 $\Delta>0$.

故直线 l 的方程：$y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$.

（2）设 $P(m,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(m-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2-m,y_2)$

由于 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，易得 $y_1=-3y_2$

由题意可设直线 $AB:x=\frac{2}{3}y+m$

联立方程组 $\begin{cases} x=\frac{2}{3}y+m \\ y^2=3x \end{cases}$

整理化简得

$$y^2-2y-3m=0$$

由韦达定理得：$y_1+y_2=2, y_1y_2=-3m$

$\because y_1=-3y_2$

$\therefore y_1=3$，$y_2=-1$

$\therefore y_1y_2=-3m=-3$

$\therefore m=1$

计算可得 $A(3,3)$，$B(\frac{1}{3},-1)$，故

$|AB|=\sqrt{(3-\frac{1}{3})^2+(3+1)^2}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$

20.

证明：（1）易知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

设 $g(x)=f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$

则 $g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$

设 $g'(x)$ 的导函数为 $g''(x)$

$g''(x)=-\cos x-\frac{2}{(x+1)^3}$

当 $x\in(-1,\frac{\pi}{2})$ 时，$\cos x>0,\frac{2}{(x+1)^3}>0$

则 $g''(x)<0$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立

所以 $g'(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减

当 $x\to -1$ 时， $g'(x)\to +\infty$

当 $x\to \frac{\pi}{2}$ 时， $g'(x)\to -1+\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}<0$

由零点存在定理，在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 内， $g'(x)$ 存在唯一零点，记为 x_0

当 $x\in(-1,x_0)$ 时， $g'(x)>0$

当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时， $g'(x)<0$

从而 x_0 为 $f'(x)$ 的极大值点，

故 $f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点.

（2）由 $f(x)$ 解析式易知 $f(0)=0$，故 0 为 $f(x)$ 的一个零点.

由（1）知 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，以下分四种情况进行讨论：

i）当 $x\in(-1,0)$ 时， $\cos 1<\cos x<1$， $\frac{1}{x+1}>1$，

$\therefore f'(x)<0$ 在 $(-1,0)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)>f(0)=0$

即在 $(-1,0)$ 上， $f(x)>0$ 恒成立，不存在零点；

ii) 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，由（1）的证明可知，

$f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，

$\because f'(0)=0$， $\therefore f'(x_0)>0$

$\because f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}<0$，

由零点存在定理， $f'(x)$ 在区间 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一零点，记为 m，

当 $x\in(x_0,m)$ 时， $f'(x)>0$， $\therefore f(x)$ 在 (x_0,m) 内单调递增；

当 $x\in(m,\frac{\pi}{2})$ 时， $f'(x)<0$， $\therefore f(x)$ 在 $(m,\frac{\pi}{2})$ 内单调递减.

$\because$ $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，$\therefore f'(x)>f'(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增

从而 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 单调递增，$(m,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，

$\because f(0)=0,\ f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$

$\therefore f(x)>0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内恒成立，没有零点；

iii）当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，

$f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$，

$f(\pi)=-\ln(\pi+1)<0$，

由零点存在定理，$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内存在唯一零点.

iv）当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，由于 $\sin x\le 1,\ \ln(x+1)>1$

$f(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 内无零点.

综上所述，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内有且仅有两个零点.

21.

解析：（1）设一轮试验中甲药治愈了白鼠为事件 A；乙药治愈了白鼠为事件 B.

$$P(x=0)=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B)+[1-P(A)][1-P(B)]=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$$

$$P(x=-1)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=[1-P(A)]P(B)=(1-\alpha)\beta$$

$$P(x=1)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=\alpha(1-\beta)$$

故可列 X 的分布列如下：

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）

(i) 由（1）知 $a=P(X=-1)=(1-\alpha)\beta=0.4$；

$b=P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)=0.5$；$c=P(X=1)=\alpha(1-\beta)=0.1$；

由 $P_i=aP_{i-1}+bP_i+cP_{i+1}$ 可得 $P_{i+1}-5P_i+4P_{i-1}=0$，即 $P_{i+1}-P_i=4(P_i-P_{i-1})$，

故$\dfrac{P_{i+1}-P_i}{P_i-P_{i-1}}=4$；所以$\{P_{i+1}-P_i\}$是以$(P_1-P_0)$为首项，4为公比的等比数列；

故$P_i-P_{i-1}=(P_1-P_0)4^{i-1}$；

$\therefore P_i-P_1=(P_1-P_0)(4+4^2+\cdots+4^{i-1})=(P_1-P_0)\dfrac{4^i-4}{3}$，

$\because P_0=0$，

$\therefore P_i=\dfrac{4^i-4}{3}P_1$，

$\because P_8=1$，

$\therefore P_8=\dfrac{4^8-1}{3}P_1$，

$\therefore P_1=\dfrac{3}{4^8-1}$，

$\therefore P_4=\dfrac{4^4\text{-}1}{3}P_1=\dfrac{4^4\text{-}1}{4^8\text{-}1}=\dfrac{1}{4^4+1}=\dfrac{1}{257}$，

$\therefore P_4\approx 0.039$.

(ii)由于P_4的值很小，说明这种试验方案可以将更有效的乙药分辨出来，所以此方案更合理。

22.

答案：（1）曲线$C:x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$；直线$l:2x+\sqrt{3}y+11=0$　　（2）$\sqrt{7}$

解析：（1）$\because$直线l的极坐标方程为$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得直线$l$的直角坐标方程为$2x+\sqrt{3}y+11=0$

（方法一）$\because$曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$为参数）

$\therefore x^2=\dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$， $y^2=\dfrac{16t^2}{(1+t^2)^2}$

$\therefore x^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

（方法二）$\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数)

$\therefore x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{-t^2-1+2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$

$\therefore x+1=\dfrac{2}{1+t^2}$

$\therefore 1+t^2=\dfrac{2}{x+1}$

$\therefore t^2=\dfrac{2}{1+x}-1=\dfrac{1-x}{1+x}$

$\therefore y=\dfrac{4t}{1+t^2}=4t\cdot\dfrac{1+x}{2}=2t(1+x)$

$\therefore y^2=4t^2(1+x)^2=4\cdot\dfrac{1-x}{1+x}\cdot(1+x)^2=4(1-x)(1+x)=4(1-x^2)$

整理得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）$\because$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\therefore$ 可设曲线 C 上任意一点 P $(\cos\alpha$， $2\sin\alpha)$ $\left(0\le\alpha<2\pi\right)$

$\therefore$ 点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\left|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11\right|}{\sqrt{4+3}}=\dfrac{\left|4\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})+11\right|}{\sqrt{7}}$

$\because 0\le\alpha<2\pi$

$\therefore$ 当 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=-1$ 时，d 取得最小值

$\therefore$ 曲线 C 上的点到 l 距离的最小值 $d_{\min}=\dfrac{|-4+11|}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}$

23.

答案：证明见解析。

解析：（1）$\because a$，b，c为正数，且满足$abc=1$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot abc$$

$$=bc+ac+ab$$

$$=\frac{1}{2}(2bc+2ac+2ab)$$

$$\leq\frac{1}{2}(b^2+c^2+a^2+c^2+a^2+b^2)$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2)$$

$$=a^2+b^2+c^2$$

当且仅当$a=b=c=1$时，等号成立。

（2）（方法一）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3+c^3+3ac^2+3a^2c+a^3$$

$\because abc=1$

$\therefore ab=\frac{1}{c}$，$bc=\frac{1}{a}$，$ac=\frac{1}{b}$

$$\therefore 原式=2a^3+2b^3+2c^3+\frac{3a}{c}+\frac{3b}{c}+\frac{3b}{a}+\frac{3c}{a}+\frac{3a}{b}+\frac{3c}{b}$$

$$=2(a^3+b^3+c^3)+3\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$$\geq 2\times3\times\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3}+3\times\left(2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)$$

$$=2\times3+3\times(2+2+2)$$

$$=24$$

当且仅当$a=b=c=1$时，等号成立

（方法二）由基本不等式得

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geq\left(2\sqrt{ab}\right)^3+\left(2\sqrt{bc}\right)^3+\left(2\sqrt{ca}\right)^3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\left(2\sqrt{ab}\right)^3\cdot\left(2\sqrt{bc}\right)^3\cdot\left(2\sqrt{ca}\right)^3}=24$$

当且仅当$a=b=c=1$时，等号成立

【补充】基本不等式推广

一般地，若 a_1， a_2， a_3， …， a_n 是正实数，则有均值不等式

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}$$

（当且仅当 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时等号成立）