学而思1对1

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共 4 页，23 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡的相应位置上。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x\mid -4<x<2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{x\mid -4<x<3\}$　　B．$\{x\mid -4<x<-2\}$　　C．$\{x\mid -2<x<2\}$　　D．$\{x\mid 2<x<3\}$

2．设复数 z 满足 $|z-i|=1$，z 在复平面内对应的点为$(x，y)$，则

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$(x-1)^2+y^2=1$　　C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$x^2+(y+1)^2=1$

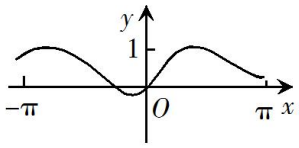
3．已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则

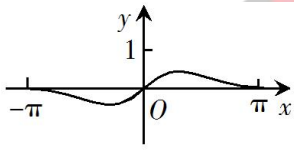
A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

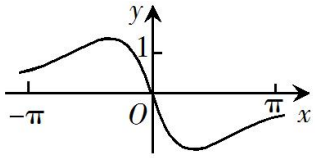
4．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105 cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是

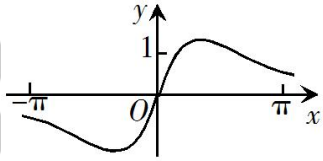
A．165 cm　　B．175 cm　　C．185 cm　　D．190 cm

5．函数$f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为

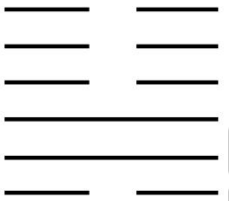
A． 

B． 

C． 

D． 

6．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是

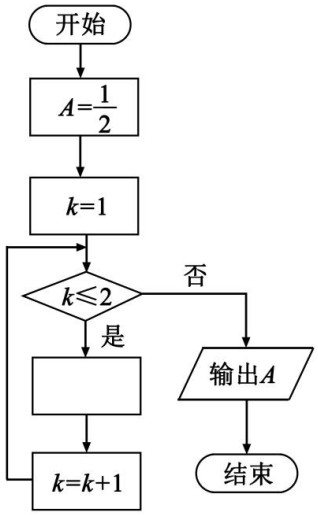


A．$\frac{5}{16}$　　B．$\frac{11}{32}$　　C．$\frac{21}{32}$　　D．$\frac{11}{16}$

7．已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

8．如图是求 $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



A．$A=\frac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\frac{1}{A}$　　C．$A=\frac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\frac{1}{2A}$

9．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则

A．$a_n=2n-5$　　B．$a_n=3n-10$　　C．$S_n=2n^2-8n$　　D．$S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=2|F_2B|$，

$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数　　②$f(x)$在区间（$\frac{\pi}{2},\pi$）单调递增

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有 4 个零点　　④$f(x)$的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

12. 已知三棱锥 P-ABC 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，PB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为

A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

14. 记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则 S_5=_____.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是_____.

16. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．(12 分)

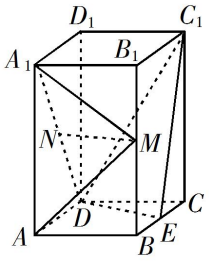
$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$．

（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$．

18．（12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．



（1）证明：MN // 平面 C_1DE；

（2）求二面角 A-MA_1-N 的正弦值．

19．（12 分）

已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P．

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求$|AB|$.

20．（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1）$f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

21．（12 分）

为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β，一轮试验中甲药的得分记为 X.

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为i时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

(i)证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

(ii)求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$.