2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学•参考答案

一、选择题

1．C　2．C　3．B　4．B　5．D　6．A　7．B　8．A　9．A　10．B　11．C　12．D

二、填空题

13．$y=3x$　　14．$\frac{121}{3}$　　15．0.18　　16．2

三、解答题

17．解：（1）由已知得 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$．

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$．

因为 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=60^\circ$．

（2）由（1）知 $B=120^\circ-C$，由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin\left(120^\circ-C\right)=2\sin C$，

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得 $\cos\left(C+60^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

由于 $0^\circ<C<120^\circ$，所以 $\sin\left(C+60^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$\sin C=\sin\left(C+60^\circ-60^\circ\right)$

$=\sin\left(C+60^\circ\right)\cos 60^\circ-\cos\left(C+60^\circ\right)\sin 60^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

18．解：（1）连结B_1C，ME.

因为M，E分别为BB_1，BC的中点，

所以$ME \parallel B_1C$，且$ME=\dfrac{1}{2}B_1C$.

又因为N为A_1D的中点，所以$ND=\dfrac{1}{2}A_1D$.

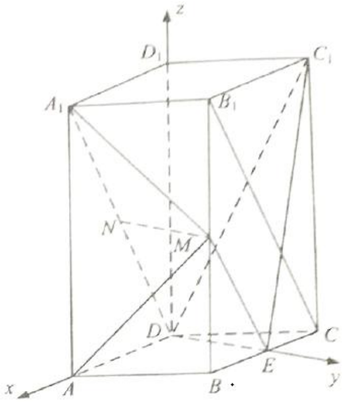
由题设知$A_1B_1 \underline{\underline{\parallel}}\ DC$，可得$B_1C \underline{\underline{\parallel}}\ A_1D$，故$ME \underline{\underline{\parallel}}\ ND$，

因此四边形$MNDE$为平行四边形，$MN \parallel ED$.

又$MN \not\subset$平面EDC_1，所以$MN \parallel$平面C_1DE.

（2）由已知可得$DE \perp DA$.

以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系D-xyz，则



$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$M(1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,2)$，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$，$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$，

$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 A_1MA 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$ 为平面 A_1MN 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\ -p-2r=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$.

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

19．解：设直线 $l: y=\dfrac{3}{2}x+t, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$.

（1）由题设得 $F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，故 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+\dfrac{3}{2}$，由题设可得 $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t\\ y^2=3x\end{cases}$，可得 $9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{12(t-1)}{9}$.

从而 $-\dfrac{12(t-1)}{9}=\dfrac{5}{2}$，得 $t=-\dfrac{7}{8}$.

所以 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$.

（2）由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ 可得 $y_1=-3y_2$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+t \\ y^2=3x \end{cases}$，可得 $y^2-2y+2t=0$.

所以 $y_1+y_2=2$. 从而 $-3y_2+y_2=2$，故 $y_2=-1, y_1=3$.

代入 C 的方程得 $x_1=3, x_2=\dfrac{1}{3}$.

故 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

20．解：（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$单调递减，而 $g'(0)>0, g'(\dfrac{\pi}{2})<0$，可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点，

设为 α.

则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点，

即 $f'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$

时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

（ii）当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$.故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)>0$.从而，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 没有零点.

（iii）当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 有唯一零点.

（iv）当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)>1$，所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点.

综上，$f(x)$ 有且仅有2个零点.

21．解：X 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta,$$
$$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta),$$
$$P(X=1)=\alpha(1-\beta),$$

所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（i）由（1）得 $a=0.4,\quad b=0.5,\quad c=0.1$.

因此 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$，故 $0.1\left(p_{i+1}-p_i\right)=0.4\left(p_i-p_{i-1}\right)$，即

$p_{i+1}-p_i=4\left(p_i-p_{i-1}\right)$.

又因为 $p_1-p_0=p_1\neq 0$，所以 $\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为公比为 4，首项为 p_1 的等比数列.

（ii）由（i）可得

$$p_8=p_8-p_7+p_7-p_6+\cdots+p_1-p_0+p_0=\left(p_8-p_7\right)+\left(p_7-p_6\right)+\cdots+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^8-1}{3}p_1.$$

由于 $p_8=1$，故 $p_1=\dfrac{3}{4^8-1}$，所以

$$p_4=\left(p_4-p_3\right)+\left(p_3-p_2\right)+\left(p_2-p_1\right)+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^4-1}{3}p_1=\frac{1}{257}.$$

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率，由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率为 $p_4=\dfrac{1}{257}\approx 0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

22．解：（1）因为 $-1<\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\leq 1$，且 $x^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1$，所以 C 的直角坐标方程为

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x\neq -1)$.

l的直角坐标方程为$2x+\sqrt{3}y+11=0$.

（2）由（1）可设C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）.

C上的点到l的距离为$\dfrac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11}{\sqrt{7}}$.

当$\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}$时，$4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11$取得最小值7，故$C$上的点到$l$距离的最小值为$\sqrt{7}$.

23．解：（1）因为$a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge 2bc, c^2+a^2\ge 2ac$，又$abc=1$，故有

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$.

（2）因为a, b, c为正数且$abc=1$，故有

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}$$

$$=3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$\ge 3\times(2\sqrt{ab})\times(2\sqrt{bc})\times(2\sqrt{ac})$$

$$=24.$$

所以$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$.