

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学（文史类）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 5 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共 8 小题，每小题 5 分共 40 分。

参考公式：

- 如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 圆柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积， h 表示圆柱的高
- 棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ， $C = \{x \in R \mid 1, x < 3\}$ ，则 $(A \cap C) \cup B =$

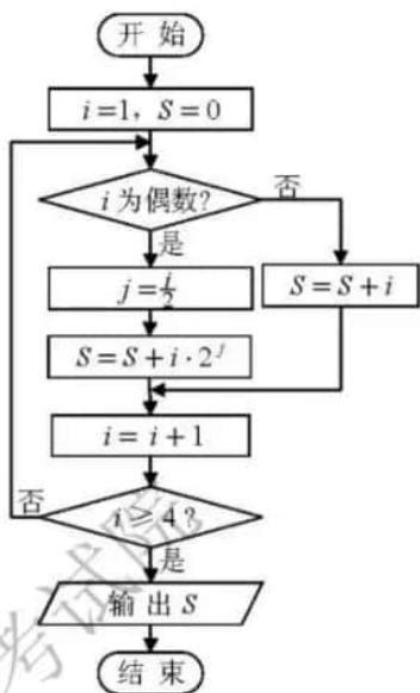
- (A) $\{2\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{-1, 2, 3\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

(3) 设 $x \in R$ ，则 “ $0 < x < 5$ ” 是 “ $|x - 1| < 1$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件
 - (B) 必要而不充分条件
 - (C) 充要条件
 - (D) 既不充分也不必要条件
- (4) 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



- (A) 5 (B) 8 (C) 24 (D) 29

(5) 已知 $a = \log_2 7$, $b = \log_3 8$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $c < b < a$
- (B) $a < b < c$
- (C) $b < c < a$
- (D) $c < a < b$

(6) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 若与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为

- (A) $\sqrt{2}$
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) 2
- (D) $\sqrt{5}$

(7) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 将

$y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 则 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$$

- (A) -2 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

(8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in R$) 恰有两个互异的实数解,

则 a 的取值范围为

- (A) $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ (B) $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ (C) $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$ (D) $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试 (天津卷)

数 学 (文史类)

第 II 卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共 12 小题, 共 110 分。

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) i 是虚数单位, 则的值 $\left|\frac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为_____。

(10) 设 $x \in R$, 使不等式 $3x^2 + x - 2 < 0$ 成立的 x 的取值范围为_____。

(11) 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____。

(12) 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____。

(13) 设 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 4$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为_____.

(14) 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 5$, $\angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分 13 分)

2019 年, 我国施行个人所得税专项附加扣除办法, 涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72, 108, 120 人, 现采用分层抽样的方法, 从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

(I) 应从老、中、青员工中分别抽取多少人?

(II) 抽取的 25 人中, 享受至少两项专项附加扣除的员工有 6 人, 分别记为 A, B, C, D, E, F . 享受情况如右表, 其中“○”表示享受, “×”表示不享受. 现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

员工 项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

(i) 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

(ii) 设 M 为事件“抽取的 2 人享受的专项附加扣除至少有一项相同”, 求事件 M 发生的概率.

(16) (本小题满分 13 分)

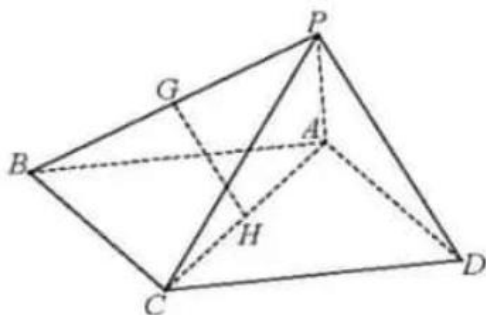
在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(I) 求 $\cos B$ 的值;

(II) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

(17) (本小题满分 13 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD$, $CD = 2$, $AD = 3$,



(I) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD ;

(III) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

(18) (本小题满分 13 分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 已知 $a_1 = b_1 = 3$, $b_2 = a_3$, $b_3 = 4a_2 + 3$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{b_n}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_{2n}c_{2n}$ ($n \in N^*$).

(19) (本小题满分 14 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 左顶点为 A , 顶点为 B . 已知 $\sqrt{3}|OA| = 2|OB|$ (O 为原点).

(I) 求椭圆的离心率;

(II) 设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P , 圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切, 圆心 C 在直线 $x = 4$ 上, 且 $OC \parallel AP$, 求椭圆的方程.

(20) (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ 。

(I) 若 $a \leq 0$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，

(i) 证明 $f(x)$ 恰有两个零点

(ii) 设 x 为 $f(x)$ 的极值点， x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1 > x_0$ ，证明 $3x_0 - x_1 > 2$ 。



绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学（文史类）参考解答

一. 选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 40 分

(1) D (2) C (3) B (4) B

(5) A (6) D (7) C (8) D

二. 填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 30 分

(9) $\sqrt{3}$

(10) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

(11) $x + 2y - 2 = 0$

(12) $\frac{\pi}{4}$

(13) $\frac{9}{2}$

(14) -1

三. 解答题

(15) 本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识，考查运用概率知识解决简单实际问题的能力，满分 13 分.

解：(I) 由已知，老、中、青员工人数之比为 6:9:10，由于采用分层抽样的方法从中抽取 25 位员工，因此应从老、中、青员工中分别抽取 6 人，9 人，10 人.

(II) (i) 从已知的 6 人中随机抽取 2 人的所有可能结果为

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ ，共 15 种.

(ii) 由表格知，符合题意的所有可能结果为

$\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ ，共 11 种.

所以，事件 M 发生的概率 $P(M) = \frac{11}{15}$

(16) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识. 考查运算求解能力. 满分 13 分.

(1) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，得 $b \sin C = c \sin B$ ，又由 $3c \sin B = 4a \sin C$ ，得

$3b \sin C = 4a \sin C$ ，即 $3b = 4a$ 。又因为 $b + c = 2a$ ，得到 $b = \frac{4}{3}a$ ， $c = \frac{2}{3}a$ 。由余弦定理可得

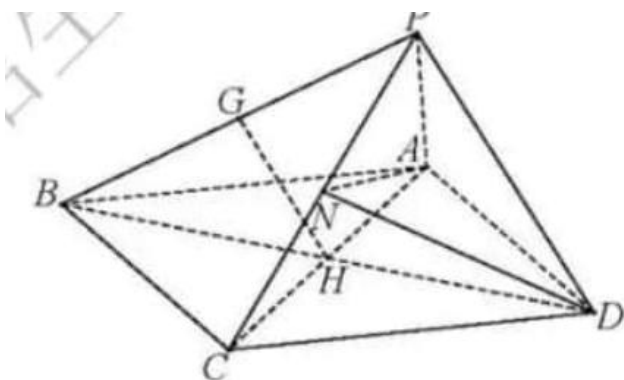
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}.$$

(II) 解：由 (I) 可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

，从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ ， $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$ ，故

$$\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5} + 7}{16}.$$

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识。考查空间想象能力和推理论证能力。满分 13 分。



(I) 证明：连接 BD ，易知 $AC \cap BD = H$ ， $BH = DH$ 。又由 $BG = PG$ ，故 $GH \parallel PD$ ，又因为 $GH \not\subset$ 平面 PAD ， $PD \subset$ 平面 PAD ，所以 $GH \parallel$ 平面 PAD 。

(II) 证明：取棱 PC 的中点 N ，连接 DN 。依题意，得 $DN \perp PC$ ，又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ，平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$ ，所以 $DN \perp$ 平面 PAC ，交 $PA \subset$ 平面 PAC ，故 $DN \perp PA$ 。又已知 $PA \perp CD$ ， $CD \cap DN = D$ ，所以 $PA \perp$ 平面 PCD 。

(III) 解：连接 AN ，由 (II) 中 $DN \perp$ 平面 PAC ，可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角，因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形， $CD = 2$ 且 N 为 PC 的中点，所以 $DN = \sqrt{3}$ 。又 $DN \perp AN$ ，

在 $Rt\triangle AND$ 中, $\sin \angle DAN = \frac{DN}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以, 直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(18) 本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识, 考查数列求和的基本方法和运算求解能力. 满分 13 分.

(I) 解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q 依题意, 得 $\begin{cases} 3q = 3 + 2d \\ 3q^2 = 15 + 4d \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} d = 3 \\ q = 3 \end{cases}$,

故 $a_n = 3 + 3(n-1) = 3n$, $b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$.

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$.

(II) 解: $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_{2n}c_{2n}$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2b_1 + a_4b_2 + a_6b_3 + \dots + a_{2n}b_n)$$

$$= \left[n \times 3 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 \right] + (6 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + 18 \times 3^3 + \dots + 6n \times 3^n)$$

$$= 3n^2 + 6(1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \dots + n \times 3^n)$$

$$T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \dots + n \times 3^n. \quad \text{①}$$

$$3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \dots + n \times 3^{n+1}, \quad \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得, } 2T_n = -3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^n + n \times 3^{n+1} = -\frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \times 3^{n+1} = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2}.$$

$$\text{所以, } a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_{2n}c_{2n} = 3n^2 + 6T_n = 3n^2 + 3 \times \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2}$$

$$= \frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} \quad (n \in N^*).$$

(19) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、圆等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力, 以及用方程思想、数形结合思想解决问题的能力, 满分 14 分.

(I) 解: 设椭圆的半焦距为 c , 由已知有 $\sqrt{3}a = 2b$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 消去 b 得 $a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + c^2$,

解得 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

所以, 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(II) 解: 由 (I) 知, $a = 2c$, $b = \sqrt{3}c$, 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$. 由题意, $F(-c, 0)$, 则直线 l

的方程为 $y = \frac{3}{4}(x+c)$. 点 P 的坐标满足 $\begin{cases} \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1, \\ y = \frac{3}{4}(x+c), \end{cases}$, 消去 y 并化简, 得到 $7x^2 + 6cx - 13c^2 = 0$,

解得 $x_1 = c$, $x_2 = -\frac{13c}{7}$, 代入到 l 的方程, 解得 $y_1 = \frac{3}{2}c$, $y_2 = -\frac{9}{14}c$. 因为点 P 在 x 轴上方, 所以 $P\left(c, \frac{3}{2}c\right)$.

由圆心 C 在直线 $x = 4$ 上, 可设 $C(4, t)$. 因为 $OC \parallel AP$, 且由 (I) 知 $A(-2c, 0)$, 故 $\frac{t}{4} = \frac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$, 解得

$t = 2$. 因为圆 C 与 x 轴相切, 所以圆的半径为 2, 又由圆 C 与 l 相切, 得 $\frac{\left|\frac{3}{4}(4+c) - 2\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = 2$, 可得 $c = 2$.

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(20) 本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法, 考查函数思想、化归与转化思想. 考查综合分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分.

(I) 解: 由已知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{x} - [ae^x + a(x-1)e^x] = \frac{1 - ax^2e^x}{x}$$

因此当 $a \leq 0$ 时, $1 - ax^2e^x > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(II) 证明: (i) 由 (I) 知 $f'(x) = \frac{1-ax^2e^x}{x}$. 令 $g(x) = 1-ax^2e^x$, 由 $0 < a < \frac{1}{e}$,

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 又 $g(1) = 1-ae > 0$, 且

$$g\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0.$$

故 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 从而 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 不妨设为 x_0 , 则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时,

$f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减, 因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减, 从而当 $x > 1$ 时,

$h(x) < h(1) = 0$, 所以 $\ln x < x - 1$. 从而

$$f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} - a \left(\ln \frac{1}{a} - 1\right) e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0,$$

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯零点. 又 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1, 从而, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内恰有两个零点.

(ii) 由题意, $\begin{cases} f'(x_0) = 0, \\ f(x_1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} ax_0^2 e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} \end{cases}$, 从而 $\ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}$, 即 $e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}$. 因为

当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$, 又 $x_1 > x_0 > 1$, 故 $e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2 (x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2$, 两边取对数, 得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$,

于是

$$x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1),$$

整理得 $3x_0 - x_1 > 2$.