2019 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3-5 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1.每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2.本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

· 如果事件 A 、 B 互斥，那么 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

· 如果事件 A 、 B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.

· 圆柱的体积公式 $V=Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积， h 表示圆柱的高.

· 棱锥的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$， $B=\{2,3,4\}$， $C=\{x\in \mathbf{R}|1\leqslant x<3\}$ ，则 $(A\bigcap C)\bigcup B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2.设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\le 0,\\ x-y+2\ge 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

A.2　　B.3　　C.5　　D.6

3.设 $x\in R$，则“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的

A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

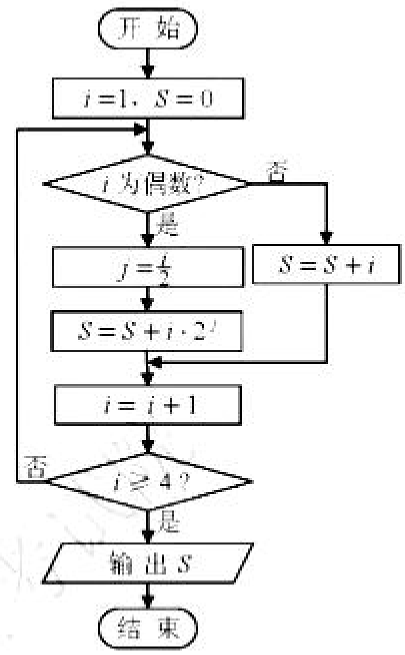
C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

4.阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为

A.5　　　　B.8

C.24　　　　D.29



5.已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{5}$

6.已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5} 0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<c<b$　　　　B. $a<b<c$　　　　C. $b<c<a$　　　　D. $c<a<b$

7.已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 是奇函数，将 $y=f(x)$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图像对应的函数为 $g(x)$.若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π，且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$

A. -2　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

8.已知 $a\in R$，设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leqslant 1,\\ x-a\ln x, & x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围为

A. $[0,1]$　　B. $[0,2]$　　C. $[0,e]$　　D. $[1,e]$

第 II 卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2.本卷共 12 小题，共 110 分。

二.填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. i 是虚数单位，则 $\left|\frac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为________________.

10. $\left(2x-\frac{1}{8x^3}\right)^8$ 是展开式中的常数项为____________________.

11.已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$.若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为________________.

12.设 $a\in R$，直线 $ax-y+2=0$ 和圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）相切，则 a 的值为________________.

13.设 $x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5$，则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为________________.

14.在四边形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC,\quad AB=2\sqrt{3},\quad AD=5,\quad \angle A=30^\circ$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且

$AE = BE$，则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ ________________.

三.解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知$b+c=2a$，$3c\sin B = 4a\sin C$.

（Ⅰ）求$\cos B$的值；

（Ⅱ）求$\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

16.（本小题满分 13 分）

设甲、乙两位同学上学期间，每天 7：30 之前到校的概率均为$\dfrac{2}{3}$.假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立.

（Ⅰ）用X表示甲同学上学期间的三天中 7：30 之前到校的天数，求随机变量X的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设M为事件“上学期间的三天中，甲同学在 7：30 之前到校的天数比乙同学在 7：30 之前到校的天数恰好多 2”，求事件M发生的概率.

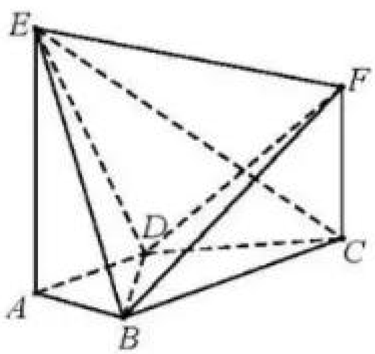
17.（本小题满分 13 分）

如图，$AE \perp$平面$ABCD$，$CF /\!/ AE$，$AD /\!/ BC$，$AD \perp AB$，$AB = AD = 1$，$AE = BC = 2$.

（Ⅰ）求证：$BF /\!/$平面ADE；

（Ⅱ）求直线CE与平面BDE所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角$E-BD-F$的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，求线段CF的长.



18.（本小题满分 13 分）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，上顶点为 B.已知椭圆的短轴长为 4，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上.若 $|ON|=|OF|$（O 为原点），且 $OP\perp MN$，求直线 PB 的斜率.

19.（本小题满分 14 分）

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列.已知 $a_1=4, b_1=6$，$b_2=2a_2-2, b_3=2a_3+4$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1, c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1}, \\ b_k, n=2^k, & \end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

（i）求数列 $\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$ 的通项公式；

（ii）求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n} a_i c_i \quad \left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

20.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，证明 $f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)..0$；

（Ⅲ）设 x_n 为函数 $u(x)=f(x)-1$ 在区间 $\left(2m+\dfrac{\pi}{4}, 2m\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的零点，其中 $n\in N$，证明 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n<\dfrac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.

2019 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一.选择题：本题考查基本知识和基本运算.每小题 5 分，满分 40 分.

1.D　　2.C　　3.B　　4.B　　5.D　　6.A

7.A　　8.C

二.填空题：本题考查基本知识和基本运算.每小题 5 分，满分 30 分.

9. $\sqrt{13}$　　10. 28　　11. $\frac{\pi}{4}$　　12. $\frac{3}{4}$　　13. $4\sqrt{3}$　　14. -1

三.解答题

15.本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识.考查运算求解能力，满分 13 分.

（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$，又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$.又因为$b+c=2a$，得到$b=\frac{4}{3}a$，$c=\frac{2}{3}a$.由余弦定理可得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=\frac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\frac{1}{4}.$$

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\frac{7}{8}$，故

$$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16},$$

16.本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识.考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.满分 13 分.

（Ⅰ）解：因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天 7：30 之前到校的概率均为$\frac{2}{3}$，故$X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，从而$P(X=k)=C_3^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$.

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$.

（Ⅱ）解：设乙同学上学期间的三天中 7：30 之前到校的天数为 Y，则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，且 $M=\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\}$.由题意知事件 $\{X=3,Y=1\}$ 与 $\{X=2,Y=0\}$ 互斥，且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$，事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立，从而由（Ⅰ）知

$$P(M)=P(\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\})=P(X=3,Y=1)+P(X=2,Y=0)$$

$$=P(X=3)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)=\frac{8}{27}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}.$$

17.本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识.考查用空间向量解决立体几何问题的方法.考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.满分 13 分.

依题意，可以建立以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系（如图），可得 $A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $C(1,2,0)$， $D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$.设 $CF=h$ $(h>0)$，则 $F(1,2,h)$.

（Ⅰ）证明：依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量，又 $\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 BF // 平面 ADE .

（Ⅱ）解：依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$， $\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$， $\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$.

设 $n=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，

可得 $n=(2,2,1)$.因此有 $\cos\left\langle\overrightarrow{CE},n\right\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot n}{|\overrightarrow{CE}||n|}=-\frac{4}{9}$.

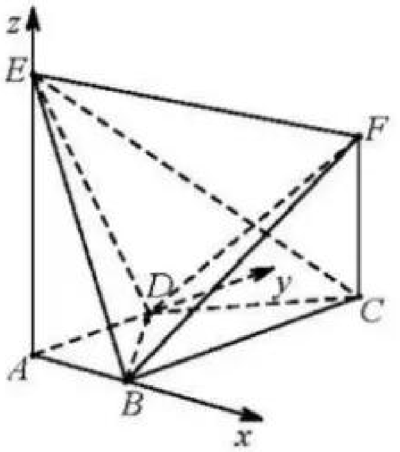
所以，直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

（III）解：设 $m=(x,y,z)$ 为平面 BDF 的法向量，则 $\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{BD}=0, \\ m\cdot\overrightarrow{BF}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x+y=0, \\ 2y+hz=0, \end{cases}$

不妨令 $y=1$，可得 $m=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$.

由题意，有 $\left|\cos\langle m,n\rangle\right|=\dfrac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $h=\dfrac{8}{7}$.经检验，符合题意.

所以，线段 CF 的长为 $\dfrac{8}{7}$.



18.本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识。考查用代数方法研究圆锥曲面的性质.考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力.满分 13 分.

（Ⅰ）解：设椭圆的半焦距为 c，依题意，$2b=4,\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，又 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a=\sqrt{5}$，$b=2, c=1$.

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）解：由题意，设 $P\left(x_P, y_P\right)\left(x_p\neq 0\right), M\left(x_M, 0\right)$.设直线 PB 的斜率为 $k\left(k\neq 0\right)$，又 $B\left(0,2\right)$，

则直线 PB 的方程为 $y=kx+2$，与椭圆方程联立 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 整理得 $\left(4+5k^2\right)x^2+20kx=0$，可得

$x_P=-\frac{20k}{4+5k^2}$，代入 $y=kx+2$ 得 $y_P=\frac{8-10k^2}{4+5k^2}$，进而直线 OP 的斜率 $\frac{y_P}{x_p}=\frac{4-5k^2}{-10k}$.在 $y=kx+2$ 中，令 $y=0$，得 $x_M=-\frac{2}{k}$.由题意得 $N(0,-1)$，所以直线 MN 的斜率为 $-\frac{k}{2}$.由 $OP\perp MN$，得 $\frac{4-5k^2}{-10k}\cdot\left(-\frac{k}{2}\right)=-1$，化简得 $k^2=\frac{24}{5}$，从而 $k=\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

所以，直线 PB 的斜率为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

19.本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识.考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力.满分 14 分.

（Ⅰ）解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.依题意得 $\begin{cases}6q=6+2d,\\6q^2=12+4d,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=3,\\q=2,\end{cases}$ 故 $a_n=4+(n-1)\times3=3n+1,\quad b_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$.

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n+1$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3\times2^n$.

（Ⅱ）（i）解：$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=a_{2^x}\left(b_n-1\right)=\left(3\times2^n+1\right)\left(3\times2^n-1\right)=9\times4^n-1$.

所以，数列 $\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$ 的通项公式为 $a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=9\times4^n-1$.

（ii）解：
$$\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i=\sum_{i=1}^{2^n}\left[a_i+a_i\left(c_i-1\right)\right]=\sum_{i=1}^{2^n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{2^i}\left(c_{2^i}-1\right)$$
$$=\left(2^n\times4+\frac{2^n\left(2^n-1\right)}{2}\times3\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(9\times4^i-1\right)$$
$$=\left(3\times2^{2n-1}+5\times2^{n-2}\right)+9\times\frac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}-n$$
$$=27\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}-n-12\quad\left(n\in\mathbf{N}^*\right).$$

20.本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法.考查函数思想和化归与转化思想.考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.满分 14 分.

（Ⅰ）解：由已知，有 $f'(x)=e^{x}(\cos x-\sin x)$.因此，当 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，有 $\sin x>\cos x$ ，得 $f'(x)<0$ ，则 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，有 $\sin x<\cos x$，得 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增.

所以， $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z}),f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）证明：记 $h(x)=f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.依题意及（Ⅰ），有 $g(x)=e^{x}(\cos x-\sin x)$ ，从而 $g'(x)=-2e^{x}\sin x$.当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$时， $g'(x)<0$，故

$h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)=g'(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)<0$.

因此， $h(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，进而 $h(x)\geqslant h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

所以，当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时， $f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$.

（Ⅲ）证明：依题意， $u(x_n)=f(x_n)-1=0$，即 $e^{x_n}\cos x_n=1$.记 $y_n=x_n-2n\pi$ ，则 $y_n\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $f(y_n)=\mathrm{e}^{y_n}\cos y_n=\mathrm{e}^{x_n-2n\pi}\cos(x_n-2n\pi)=\mathrm{e}^{-2n\pi}\ (n\in N)$.

由 $f(y_n)=e^{-2n\pi}\leqslant 1=f(y_0)$ 及（Ⅰ），得 $y_n\geqslant y_0$.由（Ⅱ）知，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数，因此 $g(y_n)\leqslant g(y_0)<g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.又由（Ⅱ）知，$f(y_n)+g(y_n)\left(\dfrac{\pi}{2}-y_n\right)\geqslant 0$，故

$\frac{\pi}{2}-y_n$，$-\frac{f\left(y_n\right)}{g\left(y_n\right)}=-\frac{e^{-2n\pi}}{g\left(y_n\right)}$，$\frac{e^{-2n\pi}}{g\left(y_0\right)}=\frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0}\left(\sin y_0-\cos y_0\right)}<\frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x}$.

所以，$2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.