2019年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

非选择题部分（共40分）

一、选择题：（本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。）

1.已知全集$U=\{-1,0,1,2,3\}$,集合$A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则$(C_U A)\cap B=$（ ）

A. $\{-1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,3\}$

【答案】：A.

【解析】：$\because C_U A=\{-1,3\}$

$\therefore (C_U A)\cap B=\{-1\}$

故选A.

2. 渐进线方程为$x\pm y=0$的双曲线的离心率是（ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.1　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

【答案】：C.

【解析】：$\because x\pm y=0$

$\therefore a=b$

在双曲线中，$c^2=a^2+b^2$

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}a$

$\therefore$ 离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$

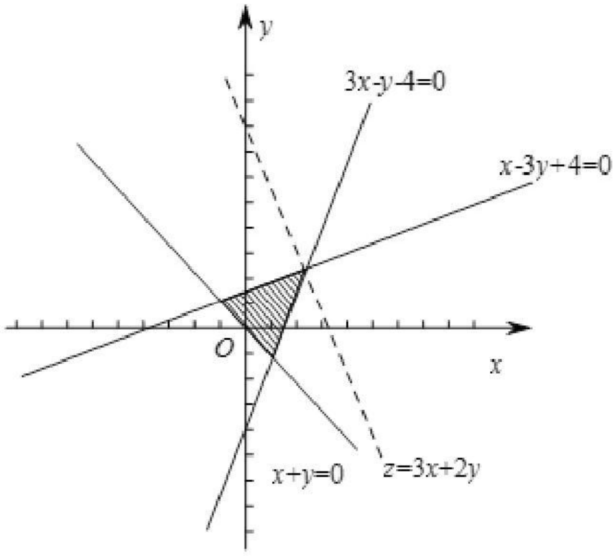
故选C.

3.若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-3y+4\geqslant 0\\3x-y-4\leqslant 0\\x+y\geqslant 0\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值是（ ）

A.-1　　B.1　　C.10　　D.12

【答案】：C

【解析】：根据不等式组确定可行域，为图中阴影部分。



由$\begin{cases}3x-y-4=0\\x-3y+4=0\end{cases}$，求出交点为$(2,2)$

将目标函数$z=3x+2y$变形为$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$，

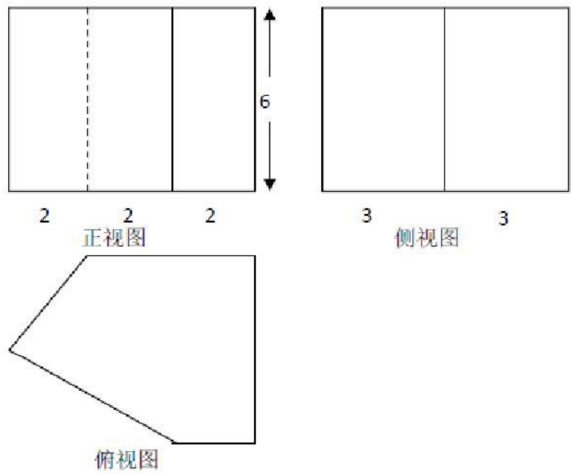
将直线$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$平移，当直线过$(2,2)$点时，$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$的$y$轴上的截距最大，此时$z$取最大值。

$\therefore z_{mzx}=3\times2+2\times2=10$

故选C.

4.祖恒是我国南北朝时代的伟大科学家,他提出的“幂势既同,则积不容异”称为祖暅原理,利用该原理可以得到柱体的体积公式$V_{柱体}=sh$，其中S是柱体的底面积，h是柱体的高。若某柱体的三视图如图所示,则该柱体的体积是　（　　）

A.158　　B.162　　C.182　　D.32



【答案】：B

【解析】：由三视图得该棱柱的高为 6，底面可以看做是由两个直角梯形组合而成，其中一个上底为 4，下底为 6，高为 3，另一个的上底为 2，下底为 6，高为 3，则该棱柱的体积为

$$\left(\frac{2+6}{2}\times 3+\frac{4+6}{2}\times 3\right)\times 6=162$$

∴选 B.

5. 若 $a>0,b>0$，则“ $a>0,b>0$ ”是 $ab \leqslant 4$ 的（　　）

A. 充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

答案：A

解析：当 $a>0$，$b>0$ 时：

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}$$

$\because$ $a+b\leq 4$

由不等式的传递性：$2\sqrt{ab}\leq 4$

$\therefore$ $ab\leq 4$

$\therefore$“ $a+b\leq 4$ ”是 $ab\leq 4$ 的充分条件；

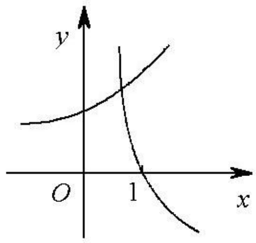
若 $ab\leq 4$，令 $a=8$，$b=\frac{1}{2}$，有 $ab\leq 4$

但 $a+b=\frac{17}{2}>4$

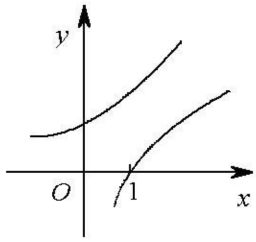
综上，“ $a+b\leq 4$ ”是“ $ab\leq 4$ ”的充分不必要条件

故选 A

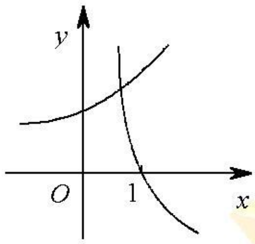
6.在同一直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{a^x}$， $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$，（$a>0$ 且 $a\neq0$）的图像可能是（　　）



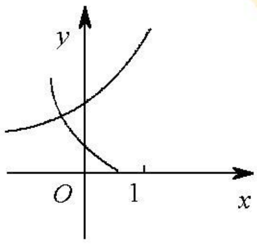
A.



B.



C.



D.

解析：当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递减，则函数 $y=\frac{1}{a^x}$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递增，函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 过定点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 且单调递减，D 选项符合；当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递增，则函数 $y=\frac{1}{a^x}$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递减，函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 过定点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 且单调递增，各选项均不符合。

综上所述，选 D.

7.　设 $0<a<1$，随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时

A. $D(X)$ 增大　　　　B. $D(X)$ 减少

C. $D(X)$ 先增大后减少　　　　D. D(X)先减少后增大

【答案】：D

【解析】：由分布列得$E(X)=\dfrac{1+a}{3}$，则

$$D(X)=(\frac{1+a}{3}-0)^2\times\frac{1}{3}+(\frac{1+a}{3}-a)^2\times\frac{1}{3}+(\frac{1+a}{3}-1)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6},$$

则当 a 在$(0,1)$内增大时，$D(X)$先减少后增大。

8. 设三棱锥$V-ABC$的底面是正三角形，侧棱长均相等，P是棱VA上的点（不含端点）。记直线PB与直线AC所成角为α，记直线PB与平面ABC所成角为β，二面角$P-AC-B$的平面角为γ，则

A. $\beta<\gamma,\alpha<\gamma$　B. $\beta<\alpha,\beta<\gamma$　C. $\beta<\alpha,\gamma<\alpha$　D. $\alpha<\beta,\gamma<\beta$

【答案】：B

【解析】：由最小角定理$\beta<\alpha$，记$V-AB-C$的平面角为γ'，由于三棱锥$V-ABC$为正三棱锥，显然$\gamma'=\gamma$，由最大角定理$\beta<\gamma'=\gamma$，故选 B.

9.已知函数$f(x)=\begin{cases}x,x<0\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\ge 0\end{cases}$.若函数$y=f(x)-ax-b$恰有 3 个零点，则

A. $a<-1,b<0$　B. $a<-1,b>0$　C. $a>-1,b<0$　D. $a>-1,b>0$

【答案】C

【解析】$y=f(x)-ax-b$有 3 个零点等价于$y=f(x)$与$y=ax+b$有三个交点

当$x>0$时，$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$

$f(0)=0$，$f'(0)=a$

当$a\leqslant -1$时，$y=f(x)$与$y=ax+b$不可能有 3 个交点，排除 A,B

若$\frac{3}{2}(a+1)=0$，即$a=-1$，0 次为三次零点穿过，不符合

若$\frac{3}{2}(a+1)\succ 0$，即$a\succ -1$时，0 处偶重零点反弹，此时要求$x=\dfrac{b}{1-a}\prec 0$，故选 C

10.设$a,b\in R$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=a,a_{n+1}=a_n^{\ 2}+b,n\in N^*$，则（　）

A. 当$b=\frac{1}{2}$时，$a_{10}>10$　B. 当$b=\frac{1}{4}$时，$a_{10}>10$

C. 当$b=-2$时，$a_{10}>10$　D. 当$b=-4$时，$a_{10}>10$

【答案】A

【解析】当$b=\frac{1}{4}$时，由不动点法$x^2+\frac{1}{4}=x$，解得$\{a_n\}$的不动点$x=\frac{1}{2}$，因此若$a_1=\frac{1}{2}$时，$a_n=\frac{1}{2}$，不满足$a_{10}>10$，同理可排除选项C和D.

非选择题部分（共110分）

二、填空题：（本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。）

11.复数$z=\frac{1}{1+i}$（i为虚数单位），则$|z|=$______.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】$|z|=\frac{1}{1+i}=\frac{|1|}{|1+i|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12.已知圆C的圆心坐标是$(0,m)$，半径长是r.若直线$2x-y+3=0$与圆相切与点$A(-2,-1)$，则$m=$________.$r=$__________.

【答案】$m=-2,r=\sqrt{5}$

【解析】$k_{AC}=-\frac{1}{2}$,直线AC：$y+1=\frac{1}{2}(x+2)$，由于直线AC过圆心$(0,m)$

$\therefore m=-2$，此时$r=\sqrt{(-2-0)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}$

13.在二项式$\left(\sqrt{2}+x\right)^9$的展开式中，常数项是______，系数为有理数的项的个数是________.

【答案】$16\sqrt{2}$；5.

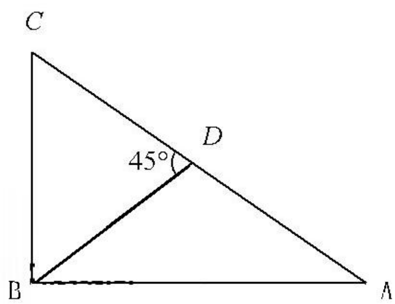
【解析】展开式的通项为$T_{r+1}=C_9^r\left(\sqrt{2}\right)^{9-r}x^r$，当$r=0$时，常数项为$\left(\sqrt{2}\right)^9=16\sqrt{2}$

当$9-r$为偶数时，系数为有理数，此时$r=1,3,5,7,9$，共5项

14.在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=4,BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45°$，则$BD=$______，$\cos\angle ABD=$______.

【答案】$\frac{12\sqrt{2}}{5}$；$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【解析】如图，由正弦定理得：



$$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle A}$$

$\therefore BD=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}\cdot\sin A=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$;

$\because \angle ABD=\pi-(\angle A+\angle BDA)$

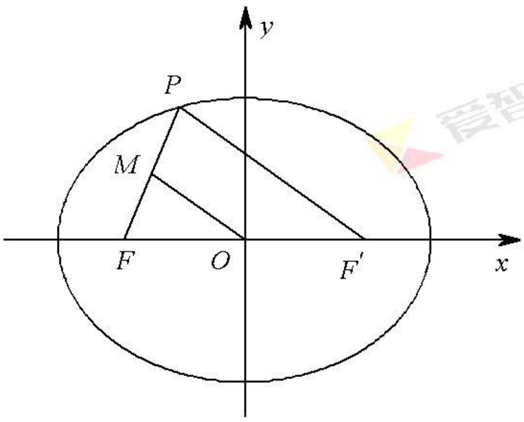
$\cos\angle ABD=-\cos(\angle A+\angle BDA)=-\cos\angle A\cdot\cos\angle BDA+\sin\angle A\cdot\sin\angle BDA$

$\therefore =\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

15.已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F，点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方，若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心，$|OF|$ 为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是_______.

【答案】$\sqrt{15}$

【解析】如图，由题意可得，$|OF|=|OM|=c=2$，



$\therefore |PF'|=2|OM|=4$

由椭圆的焦半径公式 $|PF'|=a-ex_p=3-\dfrac{2}{3}x_p=4$

$\therefore x_p=-\dfrac{3}{2}$，带入椭圆方程得 $y_p=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore k_{PF}=\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{-\frac{3}{2}+2}=\sqrt{15}$

16.已知 $a\in R$，函数 $f(x)=ma^3-x$，若存在 $t\in R$，使得 $|f(t+2)-f(t)|\leqslant\dfrac{2}{3}$,则实数 a 的最大值是

答案：$a_{\max}=\dfrac{4}{3}$

解析：$|f(t+2)-f(t)|\leqslant\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow|a(at^2+12t+8)-2|\leqslant\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{3}\leqslant a(at^2+12t+8)-2\leqslant\dfrac{2}{3}$ 有解

$\Leftrightarrow\dfrac{4}{3(6t^2+12t+8)}\leqslant a\leqslant\dfrac{8}{3(6t^2+12t+8)}$ 有解

因为 $6t^2+12t+8\in[2,+\infty)$，可得 $\dfrac{4}{3(6t^2+12t+8)}\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$,$\dfrac{8}{3(6t^2+12t+8)}\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$ 有解，所以只需要 $0<a\leqslant\dfrac{4}{3}$，即 $a_{\max}=\dfrac{4}{3}$

17. 已知正方形 ABCD 的边长为 1，当每个 $\lambda_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 取遍 ±1 时，$\left|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}\right|$ 的最小值__________，最大值是

答案：0，$2\sqrt{5}$

解析：$\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}=(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\overrightarrow{AB}$

要使 $\left|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}\right|$ 取得最小值，只需要

$|\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6|=|\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6|=0$ 此时只需要 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,,\lambda_3=1,\lambda_4=1,\lambda_5=1,\lambda_6=1$

此时 $\left|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}\right|_{\min}=0$

由于 $\lambda_5\overrightarrow{AB}+\lambda_6\overrightarrow{BD}=\pm2\overrightarrow{AB}$ 或 $\pm2\overrightarrow{AD}$，取其中的一种 $\lambda_5\overrightarrow{AB}+\lambda_6\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$ 讨论

此时 $\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}=(\lambda_1-\lambda_3+2)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4)\overrightarrow{AD}$

要使 $\left|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}\right|$ 取得最大值，只需 $|\lambda_1-\lambda_3+2|,|\lambda_2-\lambda_4|$ 最大

取 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,,\lambda_3=-1,\lambda_4=-1$ 此时

$\left|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}\right|=\left|4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right|=2\sqrt{5}$ 取得最大值

三、解答题：（本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

18. $f(x)=\sin x, x\in R$

（1）已知 $\theta\in[0,2\pi]$，函数 $f(x+\theta)$ 为偶函数，求 θ 的值；

（2）求函数 $g(x)=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ 的值域.

解析：（1） $f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$，又 $\theta\in[0,2\pi]$

结合函数图像不难求得：当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 时，函数 $f(x+\theta)$ 为偶函数.

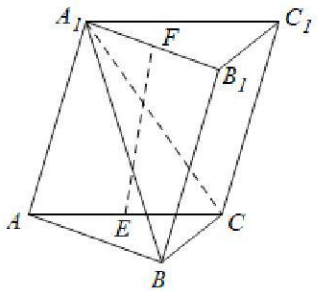
$$\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

（2） $$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1+\sin 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$$

$$=\frac{3}{4}\sin\mathrm{x}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\mathrm{x}+\rho)+1\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1,\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]$$

19. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，面



$A_1ACC_1\perp$ 面ABC，$AA_1=AC=A_1C$，$\angle CAB=30^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，E,F 分别为 AC,A_1B_1 中点。

（1）求证 $EF\perp BC$

（2）求 EF 与面 A_1BC 的余弦值。

【解析】（1）先证 $BC\perp$ 面A_1EF：

由 $AB\perp BC$，$AB\parallel A_1B_1$ 知：$BC\perp A_1B_1$；

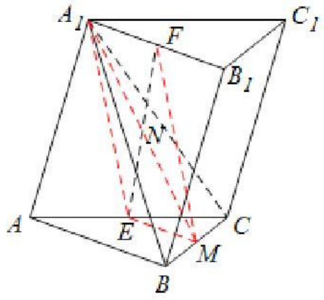
又∵面 $A_1ACC_1\perp$ 面 ABC， $AA_1=AC=A_1C$ 知： $A_1E\perp$ 面 ABC

∴ $A_1E\perp BC$

又∵ A_1E 交 A_1B_1 于 A_1

∴ $BC\perp$ 面A_1EF

∴ $BC\perp EF$



(2) 设 $AA_1 = AC = A_1C = 2$，取 BC 中点 M，连接 A_1M，B_1M，BE．

由 $A_1E \perp$ 面 ABC 知：$A_1E \perp EB$

由 $\angle CAB = 30°$，$\angle ABC = 90°$ 知：$BC = BE = 1$，$AB = \sqrt{3}$，$BM = \frac{1}{2}$，

$\therefore A_1B = 2$

又 $\because A_1C = 2$

$\therefore \triangle A_1BC$ 为等腰三角形

故 $A_1M \perp BC$，$A_1M = \frac{\sqrt{15}}{2}$

又 $\because EM$ 为 $\triangle ABC$ 中位线

$\therefore EM // AB$ 且 $EM = \frac{1}{2}AB$

故 $EM // BF$ 且 $EM = BF$

$\therefore$ 四边形 EFB_1M 为平行四边形

$\therefore EF // B_1M$

过 B_1 作 A_1M 的垂线交 A_1M 于 N

下证 $B_1N \perp$ 面 A_1BC

$\because A_1M \perp BC$，$EF \perp BC$ 即 $B_1M \perp BC$，$B_1M \cap A_1M$ 于 M

$\therefore BC \perp$ 面 MB_1N

$\therefore BC \perp B_1N$

又 $\because B_1N \perp A_1M$，$BC \cap A_1M$ 于 M

$\therefore B_1N \perp$ 面 A_1BC

∴ $\angle B_1MA_1$ 即为所求线面角

又∵ $A_1B_1=AB=\sqrt{3}$，B_1M 在 $Rt\triangle BB_1M$ 中可求得为 $\frac{\sqrt{15}}{2}$， $A_1M=\frac{\sqrt{15}}{2}$

由余弦定理可知： $\cos\angle B_1MA_1=\dfrac{\frac{15}{4}+\frac{15}{4}-3}{2\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{3}{5}$.

20.设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n， $a_3=4$， $a_4=S_3$ 数列 $\{b_n\}$ 满足：对每个 $n\in N^*$， S_n+b_n，$S_{n+1}+b_n$， $S_{n+2}+b_n$ 成等比数列

（1）求数列 $\{a_n\}$， $\{b_n\}$ 的通项公式.

（2）记 $C_n=\sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}$， $n\in N^*$，证明 $C_1+C_2+C_3+....+C_n<2\sqrt{n},\mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$.

答案：（1） $a_n=2n-2$， $b_n=n^2+n$；（2）证明如下：

解析：（1）∵ $\{a_n\}$ 为等差数列

∴ $a_3=a_1+2d$；

$a_4=a_1+3d$；

$S_3=3a_1+3d$

∴ $\begin{cases}a_1+2d=4\\a_1+3d=3a_1+3d\end{cases}$

∴ $\begin{cases}a_1=0\\d=2\end{cases}$

∴ $a_n=2n-2$

∴ $S_n=\frac{n(2\mathrm{n}-2)}{2}=n(\mathrm{n}-1)$

由 S_n+b_n， $S_{n+1}+b_n$， $S_{n+2}+b_n$ 成等比数列得

∴ $(S_{n+1}+b_n)^2=(S_n+b_n)(S_{n+2}+b_n)$

即$\left[(n+1)n+b_n\right]^2=\left[n(n-1)+b_n\right]\left[(n+2)(n+1)+b_{n+1}\right]$

$\therefore b_n=n^2+n$

（2）$\because \quad c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}$

$\therefore c_n=\sqrt{\dfrac{2n-2}{2(n^2+n)}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+n}}<\sqrt{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{2}{2\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

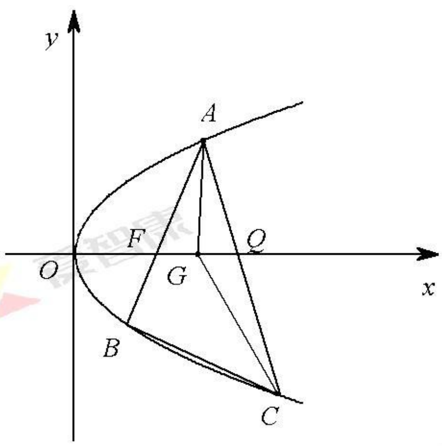
$\therefore C_1+C_2+C_3+....+C_n<2(\sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+...+\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=2\sqrt{n}$

$\therefore C_1+C_2+C_3+....+C_n<2\sqrt{n},n\in N^*$.

21. 如图，已知点$F(1,0)$为抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，过点F的直线交抛物线于A，B两点，点C在抛物线上，使得$\triangle ABC$的重心G在x轴上，直线AC交x轴于点Q，且Q点在F点的右侧，记$\triangle AFG$，$\triangle CQG$的面积分别为S_1，S_2．

（1）求p的值及抛物线的准线方程.

（2）求$\dfrac{S_1}{S_2}$的最小值及此时点G点坐标.



【解析】：（1）$\because$焦点坐标为$F(1,0)$

$\therefore \dfrac{p}{2}=1$，即$p=2$

准线方程为：$x=-1$

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，直线$AB$的方程为$l_{AB}:x=my+1$，

联立抛物线方程$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$，得$y^2-4my-4=0$

$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$

$m=\frac{1}{4}\left(y_1-\frac{4}{y_1}\right)=\frac{y_1-4}{4y_1}$

$\because\triangle ABC$的重心坐标为$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，$G$在$x$轴上

$\therefore y_1+y_2+y_3=0$，即$y_3=-4m$，带入抛物线可得$x_3=4m^2$

$\therefore x_G=\frac{8m^2+2}{3}$

$\therefore$直线AC的斜率为$\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{4}{y_1-4m}$

则直线AC的方程为$l_{AC}:y+4m=\frac{4}{y_1-4m}\left(x-4m^2\right)$

令$y=0$，得$x_Q=my_1$

$\because S_1=\frac{1}{2}y_1|FG|=\frac{1}{2}y_1\left(\frac{8m^2+2}{3}-1\right)=\frac{1}{2}y_1\frac{8m^2-1}{3}=\frac{\left(y_1^2-8\right)\left(y_1^2-2\right)}{12y_1}$，

$S_2=\frac{1}{2}y_3|GQ|=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1^2-4}{y_1}\cdot\frac{y_1^4-4y_1^2-32}{12y_1^2}=\frac{\left(y_1^2-4\right)\left(y_1^2-8\right)\left(y_1^2+4\right)}{24y_1^3}$

$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{2y_1^2\left(y_1^2-2\right)}{\left(y_1^2-4\right)\left(y_1^2+4\right)}$

令$y_1^2=t(t>0)$，$f(t)=\frac{2t(t-2)}{(t-4)(t+4)}$

由$f'(t)=\frac{2t^2-32t+32}{\left(t^2-16\right)}=0$，得当$t=8+4\sqrt{3}$时，$f(t)$取最小值，

此时$f(t)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\frac{S_1}{S_2}$的最小值为$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

22.已知实数$a\neq0$，设函数$f(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}(x>0)$

（1）当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 单调区间

（2）对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right), f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$ 恒成立，求 a 的取值范围

【解析】：

（1） $f(x)=-\frac{3}{4}\ln x+\sqrt{1+x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=3, x=-\frac{3}{4}$(舍)，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3,+\infty)$，减区间为 $(0,3)$

（2） $a\ln x+\sqrt{1+x}<\frac{\sqrt{x}}{2a}$ 对任意的 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 恒成立

当 $x=1,\sqrt{2}<\frac{1}{2a},\Rightarrow 0<a<\frac{\sqrt{2}}{4}$， $a\ln x+\sqrt{1+x}<\frac{\sqrt{x}}{2a}$ 等价转化为 $2a\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}<\frac{1}{2a}$

令 $\frac{1}{2a}=t,\frac{1}{\sqrt{x}}=s, s\in(0,e]$ 上述可以变形为 $t^2-\sqrt{1+s^2}+t\ln s\geqslant 0$ 恒成立

$\triangle=1+s^2-4s\ln s=s(s+\frac{1}{s}-4\ln s)$, 令 $G(s)=s+\frac{1}{s}-4\ln s$， $G'(s)=1-\frac{1}{s^2}-\frac{4}{s}=\frac{s^2-4s-1}{s^2}$

$G(e)=e+\frac{1}{e}-4<0$

令在 $(0,e)$ 存在 s_0, $G(s_0)=0,\ s\in(0,s_0), G(s)>0, s\in(s_0,e), G(s)<0$

在△ 在 $s\in(s_0,e]$, $\triangle<0$ 则恒成立 $s\in(0,s_0]$, $t\geqslant\frac{\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1+s^2-4s\ln s}}{2}$

令 $F(s)=\frac{\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1+s^2-4s\ln s}}{2}$ $\qquad F(s)=\max\{F(1),F(s_0))$

因为 $1+s_0{}^2-4s_0\ln s_0=0, s_0\in(0,e]$ $\quad F(s)=\max\left\{\sqrt{2},\frac{\sqrt{1+s_0{}^2}}{2}\right)=\sqrt{2}$

$t>\sqrt{2},\frac{1}{2a}>\sqrt{2}$ ，所以 $a\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$