

# 深圳市南头中学高二下学期文科期末数学试卷

## 一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

1 设集合  $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$ , 则  $A \cap B = ( )$ .

A.  $\{2, 5\}$

B.  $\{2, 3, 5\}$

C.  $\{2, 3\}$

D.  $\{3, 5\}$

答案 B

解析 由题  $A \cap B = \{2, 3, 5\}$ .

故选B.

标注

集合

集合的运算

交集

集合

集合的运算

交、并、补集混合运算

2 用三段论证明命题：“任何实数的平方大于0，因为 $a$ 是实数，所以 $a^2 > 0$ ”，你认为这个推理 ( )

A. 大前提错误

B. 小前提错误

C. 推理形式错误

D. 是正确的

答案 A

解析

这个三段论推理的大前提是“任何实数的平方大于0”，小前提是“ $a$ 是实数”，结论是“ $a^2 > 0$ ”.

显然这是个错误的推理，究其原因，是大前提错误，尽管推理形式是正确的，但是结论也是错误，故选A.

标注

—推理与证明

—合情推理与演绎推理

—演绎推理

3

已知 $i$ 为虚数单位，且复数 $z = \frac{i}{1-i}$ ，则 $z$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 所对应的点在（ ）.

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

答案

C

解析

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$
$$\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

故选C.

标注

—复数

—复数的概念及几何意义

—复数的坐标问题

—复数

—复数的概念及几何意义

—复平面

4

已知 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ 的极值点，则实数 $a$ 的值是（ ）.

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

答案 A

解析  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x-a)$ ,  $x=a$  为  $f(x)$  的极值点, 因此  $a=1$ .  
故选A.

标注

导数

导数的运算

利用公式和四则运算法则求导

导数的应用

导数与极值

导数

导数的应用

利用导数研究函数的极值问题

利用极值零点等性质求函数解析式

5 已知实数  $a, b, c, d$  满足  $a+b=c+d=-1$ ,  $ac+bd>1$ , 若用反证法证明:  $a, b, c, d$  中至少有一个大于0, 则下列假设中正确的是 ( ).

A. 假设  $a, b, c, d$  至多有一个大于0

B. 假设  $a, b, c, d$  都小于等于0

C. 假设  $a, b, c, d$  中至多有两个小于0

D. 假设  $a, b, c, d$  都小于0

答案 B

解析 至少有一个大于0的反面是全都小于等于0.  
故选B.

标注

不等式

证明不等式的基本方法

反证法

推理与证明

直接证明与间接证明

反证法

6 已知 $a$ 是实数, 则“ $a > 2$ ”是“ $a^2 > 4$ ”的( )条件.

A. 充分不必要

B. 必要不充分

C. 充要

D. 既不充分也不必要

答案 A

解析 由 $a^2 > 4$ , 即 $a > 2$ 或 $a < -2$ ,  
故“ $a > 2$ ”是“ $a^2 > 4$ ”的充分不必要条件.  
故选A.

标注

常用逻辑用语

充要条件

充要条件与不等式综合

常用逻辑用语

充要条件

7 函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 的零点所在区间为( ) .

A.  $(0, \frac{1}{4})$

B.  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

C.  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

D.  $(\frac{3}{4}, 1)$

答案 B

解析 由零点存在性定理  $f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + 1 - 3 = e^{\frac{1}{4}} - 2 < 0$ ,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + 2 - 3 = \sqrt{e} - 1 > 0,$$

$$\text{故 } f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0.$$

故选B.

标注

函数

函数的应用

求零点所在区间的问题

函数零点的判定 (存在性定理)

函数

函数的应用

函数的零点

函数零点存在性定理

8

已知曲线  $y = \frac{x^2}{2} - 3\ln x$  的一条切线的斜率为2, 则切点的横坐标为 ( ).

A. 3

B. 2

C. 1

D.  $\frac{1}{2}$

答案 A

解析 由题可得,  $y' = x - \frac{3}{x} (x > 0)$ ,

$$\text{由 } x - \frac{3}{x} = 2, \text{ 得 } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

解得  $x = 3$  或  $x = -1$  (舍去).

故选A.

标注

导数

导数的概念及其意义

导数的几何意义的应用

导数

导数的概念及其意义

导数的几何意义

9 若函数  $y = x^3 + mx^2 + 3x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是单调函数, 则实数  $m$  的取值范围是 ( ).

A.  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

B.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

C.  $[-3, 3]$

D.  $(-3, 3)$

答案 C

解析  $y' = 3x^2 + 2mx + 3 \geq 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  上恒成立,

则  $\Delta \leq 0$ ,

即  $4m^2 - 36 \leq 0$ , 得  $-3 \leq m \leq 3$ .

故选C.

标注

导数

导数的应用

利用导数研究函数的单调性问题

已知单调性求参数的取值范围

导数

导数的应用

导数与单调性

10 已知  $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ,  $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{4}}$ ,  $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( ).

A.  $c < a < b$

B.  $a < b < c$

C.  $b < a < c$

D.  $c < b < a$

答案 D

解析 由指数函数单调性得  $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} > b = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{4}} > 1$ ,

又由  $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} < \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ ,

故有  $a > b > c$ .

故选D.

标注

函数

基本初等函数

指对幂函数的图象与性质问题

指对幂比较大小

函数

基本初等函数

指数函数

指数函数的图象及性质

11 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且在区间  $[0, +\infty)$  上单调递增. 若实数  $a$  满足

$f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$ , 则  $a$  的取值范围是 ( ).

A.  $[1, 2]$

B.  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

C.  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

D.  $(0, 2]$

答案 C

解析 因为 $\log_{\frac{1}{2}} a = -\log_2 a$ , 且 $f(x)$ 是偶函数,  
所以 $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) = 2f(\log_2 a) = 2f(|\log_2 a|) \leq 2f(1)$ ,  
即 $f(|\log_2 a|) \leq f(1)$ , 又函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,  
所以 $0 \leq |\log_2 a| \leq 1$ , 即 $-1 \leq \log_2 a \leq 1$ , 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ .

标注 一函数

基本初等函数

对数的概念及其运算

12 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0$ , 且其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) > 1$ , 则不等式 $f(e^x) < x$ 的解集为 ( ).

A.  $(0, +\infty)$

B.  $(-\infty, 0)$

C.  $(1, +\infty)$

D.  $(-\infty, 1)$

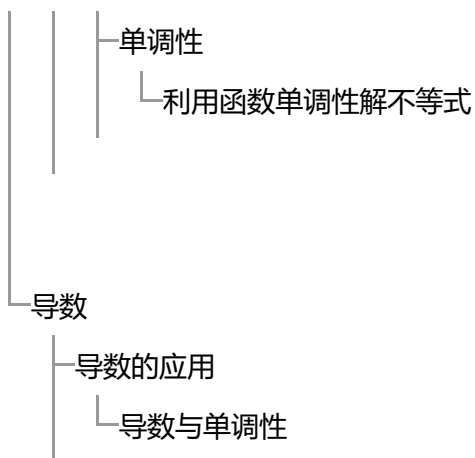
答案 B

解析 已知 $xf'(x) > 1$ , 由 $x > 0$ , 有 $f'(x) > \frac{1}{x}$ ,  
即 $f'(x) - \frac{1}{x} > 0$ , 令 $g(x) = f(x) - \ln x$ ,  
则 $g(x)$ 是一个增函数,  
又 $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0 - 0 = 0$ ,  
对 $f(e^x) < x$ , 令 $t = e^x$ ,  $x = \ln t$ ,  
则有 $f(t) < \ln t$ ,  
即 $f(t) - \ln t < 0 = g(1)$ ,  
则 $t < 1$ ,  
所以 $e^x < 1$ , 有 $x < 0$ .  
故选B.

标注 函数

函数的性质





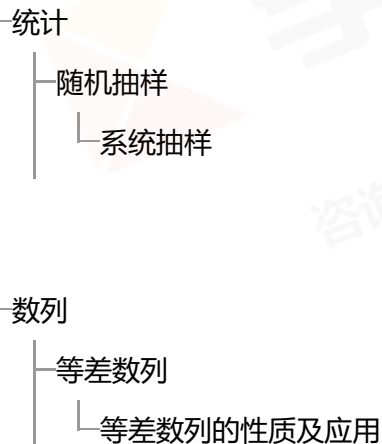
## 二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

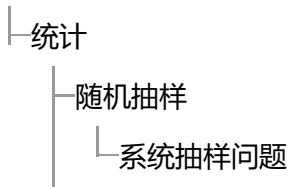
- 13 现将某班45名同学按1, 2, 3, ..., 45随机编号，采用系统抽样的方法在该班抽取一个容量为5的样本，若抽取的样本编号为 $a, b, 25, c, d$ ，则 $a + b + c + d =$  \_\_\_\_\_ .

答案 100

解析 由 $45 \div 5 = 9$ ，故每组9人， $a = 25 - 18 = 7$ ， $b = 25 - 9 = 16$ ， $c = 25 + 9 = 34$ ， $d = 34 + 9 = 43$ ，  
故 $a + b + c + d = 100$ .  
故答案：100.

标注



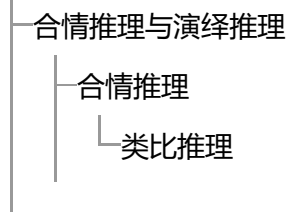


- 14 若三角形内切圆的半径为 $r$ ，三边长为 $a, b, c$ ，则三角形的面积等于 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ ，根据类比推理的方法，若一个四面体的内切球的半径为 $R$ ，四个面的面积分别是 $S_1, S_2, S_3, S_4$ ，则四面体的体积 $V =$ \_\_\_\_\_.

**答案**  $\frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$

**解析** 可将四面体分成四个等高（高为 $R$ ）的三棱锥，由棱锥体积 $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ 得出结论.

**标注** 推理与证明

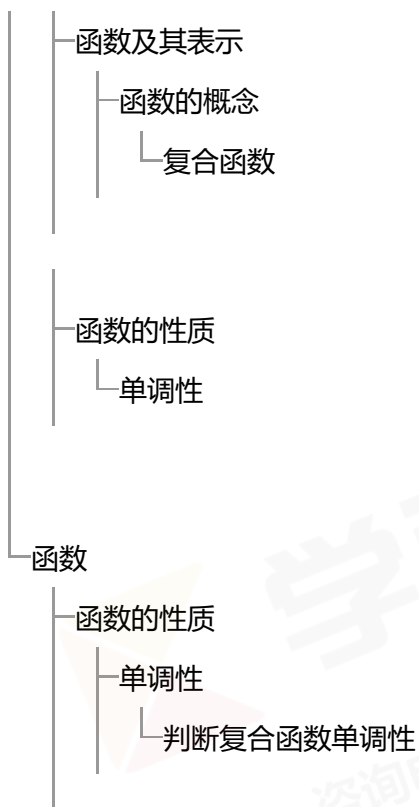


- 15 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)$ 的单调递增区间为\_\_\_\_\_.

**答案**  $(-\infty, 2)$

**解析** 由题知 $x^2 - 5x + 6 > 0$ ，解得 $x > 3$ 或 $x < 2$ ，  
 又由复合函数单调性可得 $x < 2$ ，  
 故所求函数单调增区间为 $(-\infty, 2)$ .  
 故答案为： $(-\infty, 2)$ .

**标注** 函数



16 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$  在  $x = 1$  处有极值为 10, 则实数  $a + b =$  \_\_\_\_\_ .

**答案** -7

**解析** 由  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处有极值 10,

$$\text{可得} \begin{cases} f(1) = 10 \\ f'(1) = 0 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} 1 + a + b + a^2 = 10 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\text{或} \begin{cases} a = 4 \\ b = -11 \end{cases},$$

经检验,  $a = 4, b = -11$ ,

故  $a + b = -7$ .

故答案为: -7.

**标注** 一导数

一导数的应用

## 三、解答题：本大题共6小题，共70分

17 试讨论函数  $f(x) = \frac{ax}{x-1}$  ( $a \neq 0$ ) 在区间  $(-1, 1)$  内的单调性.

**答案**  $a > 0$  时，函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为减函数；  
 $a < 0$  时，函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为增函数.

**解析** 设  $-1 < x_1 < x_2 < 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{ax_1}{x_1 - 1} - \frac{ax_2}{x_2 - 1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}, \end{aligned}$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0, (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0,$$

当  $a > 0$  时， $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ，函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为减函数；

当  $a < 0$  时， $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为增函数，

$\therefore a > 0$  时，函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为减函数；

$a < 0$  时，函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为增函数.

**标注**

函数

函数的性质

单调性

用定义法证明函数的单调性

函数

函数的性质

单调性

18 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数,  $\pi < \alpha \leq 2\pi$ ) 以  $O$

为极点,  $x$  正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$ .

(1) 求  $C_2$  的直角坐标方程.

(2) 当  $C_1$  与  $C_2$  有两个公共点时, 求实数  $t$  的取值范围.

答案

(1)  $x + y = t$ .

(2)  $t \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ .

解析

(1)  $\because \rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$ ,

$\therefore \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = t$ ,

$\therefore x + y = t$ .

(2) 曲线  $C_1$  的方程为  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,

令  $\frac{|1 + 1 - t|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} < 1$ ,

得  $t^2 - 4t + 2 < 0$ ,

解得  $t \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ .

标注

坐标系与参数方程

└ 极坐标

└ 极坐标与直角坐标的关系

└ 参数方程

└ 圆的参数方程

坐标系与参数方程

└ 极坐标与普通方程互化问题

└ 参数方程与普通方程互化问题

19 某项科研活动共进行了4次实验，其数据如下表所示：

特征量	第1次	第2次	第3次	第4次
$x$	67	70	66	69
$y$	105	110	102	107

(1) 从4次特征量 $y$ 的实验数据中随机地抽取两个数据，求恰有一个不大于105的概率.

(2) 求特征量 $y$ 关于 $x$ 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ . (附:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x})$$

答案

(1)  $\frac{2}{3}$ .

(2)  $\hat{y} = 1.8x - 16.4$ .

解析

(1)  $P = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}$ .

(2)  $\bar{x} = \frac{67 + 70 + 66 + 69}{4} = 68,$   
 $\bar{y} = \frac{105 + 110 + 102 + 107}{4} = 106,$

$\therefore$

$$\hat{b} = \frac{(67 - 68)(105 - 106) + (70 - 68)(110 - 106) + (66 - 68)(102 - 106) + (69 - 68)(107 - 106)}{(67 - 68)^2 + (70 - 68)^2 + (66 - 68)^2 + (69 - 68)^2}$$

$$= 1.8,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 106 - 1.8 \times 68 = -16.4,$$

$$\therefore \text{回归方程为 } \hat{y} = 1.8x - 16.4.$$

标注

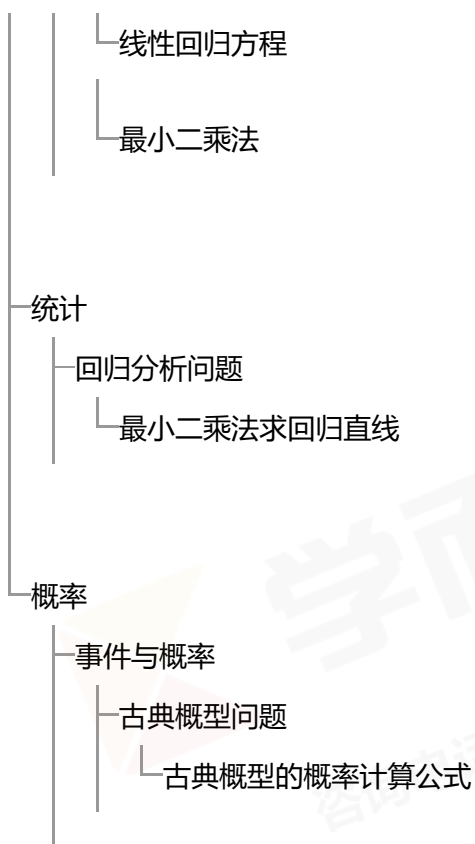
概率

事件与概率

古典概型

统计

两个变量的线性相关



20 已知函数  $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + b (x \in \mathbf{R})$ , 其中  $a > 0$ , 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y = 6x - 9$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的解析表达式.
- (2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = k$  有三个实根, 求实数  $k$  的取值范围.

答案

- (1)  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ .
- (2)  $\frac{1}{2} < k < 1$ .

解析

- (1)  $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + b, x \in \mathbf{R}, a > 0, f'(x) = 3ax^2 - 3x$ ,  
 $f(x)$  在  $(2, f(2))$  处切线,  $y = 6x - 9$ ,  
 $f(2) = 6 \times 2 - 9 = 3 = a \cdot 8 - 3 \times 2 + b$ ,  
 $f'(2) = 3a \cdot 4 - 6 = 6$ ,  

$$\begin{cases} 8a - 6 + b = 3 \\ 12a - 6 = 6 \end{cases},$$
 解得:  $a = 1, b = 1$ ,

$$\therefore f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

(2) 由 (1) 得:  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1,$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{则 } x_1 = 0, x_2 = 1,$$

$f'(x)$ ,  $f(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, 1)$  上单调递减, 且  $f(0) = 1, f(1) = 0$

$\therefore f(x) = k$  有三个不相等的实数根,

$$\therefore \frac{1}{2} < k < 1.$$

标注

导数

— 导数的应用

— 利用导数求曲线的切线方程问题

— 已知切线方程求参数

— 利用导数研究函数的零点与交点问题

— 已知零点或根情况求参数范围

导数

— 导数的概念及其意义

— 导数的几何意义

— 导数的应用

— 导数与单调性



随着我国电子商务行业飞速发展, 相关管理部门推出了规范电商的商品和服务的评价体系. 现从评价系统中随机选出100次成功交易, 并对其评价进行统计. 已知对商品的好评率为0.6, 对服务的好评率为0.75, 其中对商品和服务都做出好评的交易为40次.

- (1) 完成下面的列联表, 并判断是否可以在犯错误概率不超过1%的前提下, 认为商品好评与服务好评有关.

	对服务好评	对服务不满意	合计
对商品好评			
对商品不满意			
合计			

- (2) 若将频率视为概率, 某人在该购物平台上进行的4次购物中, 设对商品和服务全好评的次数为随机变量 $X$ .

- ① 求对商品和服务全好评的次数 $X$ 的分布列.

- ② 求 $X$ 的数学期望和方差. 参考公式与数据:  $X^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中 $n = a + b + c + d$ .

$P(X^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

答案

(1)

	对服务好评	对服务不满意	合计
对商品好评	40	20	60
对商品不满意	35	5	40
合计	75	25	100

不能.

- (2) ①  $X$ 的分布列为

$X$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

- ②  $EX = \frac{8}{5}$ ,  $DX = \frac{24}{25}$ .

--	--	--	--

解析

(1)		对服务好评	对服务不满意	合计
	对商品好评	40	20	60
	对商品不满意	35	5	40
	合计	75	25	100

$$K^2 = \frac{100 \times (35 \times 20 - 40 \times 5)^2}{60 \times 40 \times 75 \times 25} \approx 5.56 < 6.635,$$

故不能.

- (2) ① 某人进行一次购物, 双好评的概率为  $\frac{2}{5}$ ,

$X$ 可能的取值有0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}, \quad P(X=1) = C_4^1 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{96}{625},$$

$$P(X=4) = C_4^4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{16}{625},$$

$X$ 的分布列为

$X$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

②  $EX = np = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5},$

$$DX = np(1-p) = 4 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

标注

概率

—条件概率与事件的独立性

└n次独立重复试验与二项分布

概率

—典型分布

└二项分布问题

已知函数  $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

(2) 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上的最大值为 2, 求实数  $a$  的值.

答案

(1)  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 无减区间;

$f(x)$  在  $(-\infty, -1-a)$ ,  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1-a, -1)$  上单调递减;

$f(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1, -1-a)$  上单调递减.

(2)  $a = 2 - 2e$ .

解析

(1)  $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$ ,

$$f'(x) = e^x(x^2 + ax + 1) + (2x + a) \cdot e^x$$

$$= e^x(x^2 + ax + 1) + (2x + a) \cdot e^x$$

$$= e^x[x^2 + (a+2)x + a+1]$$

$$= e^x(x+1)(x+a+1),$$

① 当  $a = 0$  时,  $f'(x) \geq 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立,

$\therefore f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 无减区间;

②  $-1 < a < 1$  时, ( $a > 0$ ),

$f'(x)$ ,  $f(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(-\infty, -1-a)$	$(-1-a, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, -1-a)$ ,  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1-a, -1)$  上单调递减;

③  $-1-a > -1$  时, ( $a < 0$ ),

$f'(x)$ ,  $f(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, -1-a)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1, -1-a)$  上单调递减.

(2)  $\therefore$  在  $(-\infty, 0]$ ,  $f(x)_{\max} = 2$ ,

$\therefore$  ① 当  $a = 0$  时, 由 (1) 知  $f(x)$  单增,

$f(x) \leq f(0) = 1$ , 不成立;

②当  $a > 0$  时,  $f(0) = 1$ ,

由 (1) 知在  $(-\infty, 0]$ ,  $f(x)$  最大值在  $x = -1 - a$  或  $x = 0$  取得,

$f(0) = 1$  (舍)

$$f(-1-a) = e^{-1-a}[(-1-a)^2 + a(-1-a) + 1] = 2,$$

$$\text{得 } \frac{2+a}{2} = e \cdot e^a (a > 0),$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{2+x}{2} (x > 0),$$

$$g(x) = 1, \quad g'(x) = \frac{1}{2},$$

$$\text{令 } h(x) = e \cdot e^x (x > 0),$$

$$h(0) = e, \quad h'(x) = e \cdot e^x,$$

$$\therefore h(0) > g(0),$$

$$\text{且 } h'(0) > g'(x) > 0,$$

$\therefore h(x)$  与  $g(x)$  无交点,

$$\text{即 } \frac{2+a}{2} \neq e \cdot e^a;$$

③  $a < 0$  时,

(i) 当  $-1 - a > 0$  时, ( $a < -1$ ),

$$\text{此时 } f(x)_{\max} = f(-1) = e^{-1}(2-a) = 2,$$

$$\text{得 } a = 2 - 2e < -1 \text{ 成立};$$

②当  $-1 < -1 - a < 0$  时, ( $-1 < a < 0$ ),

$$f(0) = 1 \text{ (舍)},$$

$$f(-1) = e^{-1}(2-a) = 2,$$

$$\text{得: } a = 2 - 2e < -1, \text{ 不成立},$$

综上:  $a = 2 - 2e$ .

标注

— 导数

— 导数的应用

— 导数与单调性