

深圳市南头中学高二下学期文科期末数学试卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

- 1 设集合 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B = ()$.
A. $\{2, 5\}$ B. $\{2, 3, 5\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{3, 5\}$
- 2 用三段论证明命题：“任何实数的平方大于0，因为 a 是实数，所以 $a^2 > 0$ ”，你认为这个推理 ()
A. 大前提错误 B. 小前提错误 C. 推理形式错误 D. 是正确的
- 3 已知 i 为虚数单位，且复数 $z = \frac{i}{1-i}$, 则 z 的共轭复数 \bar{z} 所对应的点在 () .
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 4 已知 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ 的极值点，则实数 a 的值是 () .
A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
- 5 已知实数 a, b, c, d 满足 $a + b = c + d = -1$, $ac + bd > 1$, 若用反证法证明: a, b, c, d 中至少有一个大于0, 则下列假设中正确的是 () .
A. 假设 a, b, c, d 至多有一个大于0 B. 假设 a, b, c, d 都小于等于0
C. 假设 a, b, c, d 中至多有两个小于0 D. 假设 a, b, c, d 都小于0
- 6 已知 a 是实数，则“ $a > 2$ ”是“ $a^2 > 4$ ”的 () 条件.
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 的零点所在区间为 () .

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ D. $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

8 已知曲线 $y = \frac{x^2}{2} - 3 \ln x$ 的一条切线的斜率为 2, 则切点的横坐标为 () .

- A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

9 若函数 $y = x^3 + mx^2 + 3x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数, 则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ B. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
C. $[-3, 3]$ D. $(-3, 3)$

10 已知 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{4}}$, $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

- A. $c < a < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

11 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足

$f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $[1, 2]$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ D. $(0, 2]$

12 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0$, 且其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) > 1$, 则不等式

$f(e^x) < x$ 的解集为 () .

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分

13 现将某班 45 名同学按 1, 2, 3, ..., 45 随机编号, 采用系统抽样的方法在该班抽取一个容量为 5 的样本, 若抽取的样本编号为 $a, b, 25, c, d$, 则 $a + b + c + d =$ _____ .

若三角形内切圆的半径为 r , 三边长为 a, b, c , 则三角形的面积等于 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$, 根据类比推理的方法, 若一个四面体的内切球的半径为 R , 四个面的面积分别是 S_1, S_2, S_3, S_4 , 则四面体的体积 $V =$ _____.

15 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)$ 的单调递增区间为_____.

16 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值为10, 则实数 $a + b =$ _____.

三、解答题: 本大题共6小题, 共70分

17 试讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x-1} (a \neq 0)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的单调性.

18 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数, } \pi < \alpha \leq 2\pi)$ 以 O 为极点, x 正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程.

(2) 当 C_1 与 C_2 有两个公共点时, 求实数 t 的取值范围.

19 某项科研活动共进行了4次实验, 其数据如下表所示:

特征量	第1次	第2次	第3次	第4次
x	67	70	66	69
y	105	110	102	107

(1) 从4次特征量 y 的实验数据中随机地抽取两个数据, 求恰有一个不大于105的概率.

(2) 求特征量 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. (附: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$,

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x})$$

已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + b (x \in \mathbf{R})$, 其中 $a > 0$, 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = 6x - 9$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析表达式.
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有三个实根, 求实数 k 的取值范围.

21 随着我国电子商务行业飞速发展, 相关管理部门推出了规范电商的商品和服务的评价体系. 现从评价系统中随机选出100次成功交易, 并对其评价进行统计. 已知对商品的好评率为0.6, 对服务的好评率为0.75, 其中对商品和服务都做出好评的交易为40次.

- (1) 完成下面的列联表, 并判断是否可以在犯错误概率不超过1%的前提下, 认为商品好评与服务好评有关.

	对服务好评	对服务不满意	合计
对商品好评			
对商品不满意			
合计			

- (2) 若将频率视为概率, 某人在该购物平台上进行的4次购物中, 设对商品和服务全好评的次数为随机变量 X .

① 求对商品和服务全好评的次数 X 的分布列.

② 求 X 的数学期望和方差. 参考公式与数据: $X^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(X^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

22 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最大值为2, 求实数 a 的值.