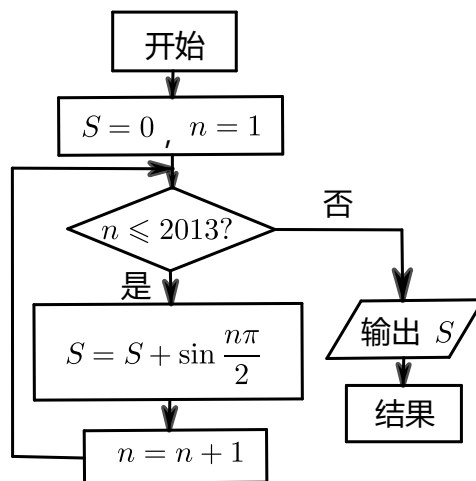


2018~2019学年10月四川成都青羊区成都市树德中学高三上学期月考理科数学试卷

一、选择题 (本大题共12题, 每小题5分, 共计60分)

1. 已知集合 $M = \{x|x^2 = 1\}$, $N = \{x|ax = 1\}$, 若 $N \subseteq M$, 则实数 a 的取值集合为 () .
- A. $\{1\}$ B. $\{-1, 1\}$
C. $\{1, 0\}$ D. $\{1, -1, 0\}$
2. 若 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, 则 $|z_1 z_2| = ()$.
- A. 6 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{2}$
3. 已知命题 p : 若 a, b 是实数, 则 $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的充分不必要条件; 命题 q : " $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 3x$ " 的否定是 " $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 < 3x$ ", 则下列命题为真命题的是 () .
- A. $p \vee q$ B. $\neg p \wedge q$
C. $p \wedge \neg q$ D. $\neg p \wedge \neg q$
4. 下列三个数: $a = \ln \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$, $b = \ln \pi - \pi$, $c = \ln 3 - 3$, 大小顺序正确的是 () .
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$
5. 阅读如右下图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出的结果是 () .



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_3, a_4 的等比中项为 $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} dx$, 令 $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$, 则 $T_6 = ($

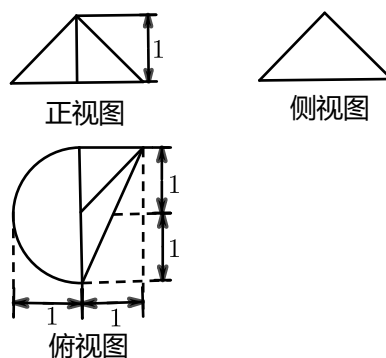
-) .
 A. 6 B. 16 C. 32 D. 64

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且

$$2S = a^2 + b^2 - c^2, \text{ 则 } \tan C = () .$$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

8. 一个空间几何体的三视图(单位: cm)如图所示, 则该几何体的体积为 () .



- A. $(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}) \text{ cm}^3$
 B. $(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}) \text{ cm}^3$
 C. $(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}) \text{ cm}^3$
 D. $(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}) \text{ cm}^3$

9. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, M, N 是双曲线 C 的一条渐近线上的两点, 四边形 MF_1NF_2 为矩形, A 为双曲线的一个顶点, 若 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}c^2$, 则该双曲线的离心率为()

- A. 3 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

10. 过点 $P(2, 1)$ 的直线与函数 $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ 的图象交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} + \vec{OB} \cdot \vec{OP} = () .$$

- A. 10 B. $2\sqrt{5}$ C. 5 D. $\sqrt{5}$

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交 C 于 A, B 两点, 点 A 在第一象限, $P(0, 6)$, O 为坐标原点, 则四边形 $OPAB$ 面积的最小值为 () .

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{13}{4}$ C. 3 D. 4

12. 已知 $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, 若 $f(t) = g(s)$, 则当 $s - t$ 取得最小值时, $f(t)$ 所在区间是 () .
- A. $\left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)$
 B. $(\ln 2, 1)$
 C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$
 D. $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right)$

二、填空题 (本大题共4题, 每小题5分, 共计20分)

13. 已知直线 $2x + y - 3 = 0$ 的倾斜角为 α , 则 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值是 _____ .
14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x - 2y - 4 \leq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$, 则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+y}$ 的最大值为 _____ .
15. 某科室派出4名调研员到3个学校, 调研该校高三复习备考近况, 要求每个学校至少一名, 则不同的分配方案种数为 _____ .
16. 定义: 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 $x_1, x_2 (a < x_1 < x_2 < b)$, 满足 $f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$, 则称数 x_1, x_2 为 $[a, b]$ 上的“对望数”, 函数 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的“对望函数”, 给出下列四个命题:
- (1) 二次函数 $f(x) = x^2 + mx + n$ 在任意区间 $[a, b]$ 上都不可能是“对望函数”;
 (2) 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 是 $[0, 2]$ 上的“对望函数”;
 (3) 函数 $f(x) = x + \sin x$ 是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ 上的“对望函数”;
 (4) $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的“对望函数”, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不单调.
- 其中正确命题的序号为 _____ (填上所有正确命题的序号) .

三、解答题 (本大题共5题, 每小题12分, 共计60分)

17. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_n^2 = S_n + S_{n-1} (n \geq 2)$, $a_1 = 1$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
 (2) 设 $b_n = (1 - a_n)^2 - a(1 - a_n)$, 若 $\{b_n\}$ 是递增数列, 求实数 a 的取值范围.
18. 某中学拟在高一一下学期开设游泳选修课, 为了了解高一学生喜欢游泳是否与性别有关, 该学校对100名高一新生进行了问卷调查, 得到如下列联表:
- | | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

	喜欢游泳	不喜欢游泳	合计
男生		10	
女生	20		
合计			

已知在这100人中随机抽取1人抽到喜欢游泳的学生的概率为 $\frac{3}{5}$.

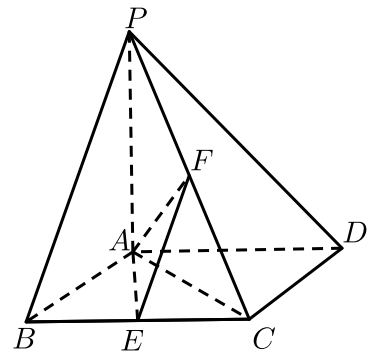
- (1) 请将上述列联表补充完整: 并判断是否有99.9%的把握认为喜欢游泳与性别有关? 并说明你的理由.
- (2) 针对于问卷调查的100名学生, 学校决定从喜欢游泳的人中按分层抽样的方法随机抽取6人成立游泳科普知识宣传组, 并在这6人中任选2人作为宣传组的组长, 设这两人中男生人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

下面的临界值表仅供参考:

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式: $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$)

19. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, E, F 分别是 BC, PC 的中点.



- (1) 证明: $AE \perp PD$.
- (2) 设 H 为线段 PD 上的动点, 若线段 EH 长的最小值为 $\sqrt{5}$, 求二面角 $E - AF - C$ 的余弦值.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点组成的四边形的面积为 $2\sqrt{2}$, 且经过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若过点 $M(2, 0)$ 作直线与椭圆 C 相交于两点 G, H , 设 P 为椭圆 C 上动点, 且满足 $\vec{OG} + \vec{OH} = t\vec{OP}$ (O 为坐标原点), 当 $t \geq 1$ 时, 求 $\triangle OGH$ 面积 S 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - mx$ ($m \in \mathbf{R}$) .

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $m \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, 设 $g(x) = 2f(x) + x^2$ 的两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 恰为 $h(x) = \ln x - cx^2 - bx$ 的零点, 求 $y = (x_1 - x_2)h' \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)$ 的最小值.

四、选做题 (本大题共2题, 每小题10分, 选做1题)

选修4-4: 坐标系与参数方程

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\sqrt{5} \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho^2 + 4\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + 4 = 0$.

(1) 写出曲线 C_1, C_2 的普通方程.

(2) 过曲线 C_1 的左焦点且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 交曲线 C_2 于 A, B 两点, 求 $|AB|$.

选修4-5: 不等式选讲

23. 已知 $\exists x \in \mathbf{R}$, 使不等式 $|x - 1| - |x - 2| \geq t$ 成立.

(1) 求满足条件的实数 t 的集合 T .

(2) 若 $m > 1, n > 1$, 对 $\forall t \in T$, 不等式 $\log_3 m \cdot \log_3 n \geq t$ 恒成立, 求 $m^2 + n^2$ 的最小值.