

2017~2018学年11月广东广州天河区广州中学高三上学期理科月考数学试卷

一、选择题（每小题5分，共60分）

1 从集合 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 中任意选出三个不同的数，使这三个数成等比数列，这样的等比数列的个数为()

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

2 复数 $z = \frac{2i}{1-i} + i^3$ (i 为虚数单位)的共轭复数为() .

- A. $1 + 2i$ B. $i - 1$
C. $1 - i$ D. $1 - 2i$

3 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是() .

- A. $[0, 1) \cup (1, 2]$ B. $[0, 1) \cup (1, 4]$
C. $[0, 1)$ D. $(1, 4]$

4 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)，则 $\sin \theta - \cos \theta$ 的值为() .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

5 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上到直线 $l: x + y = a$ 的距离等于1的点至少有2个，则 a 的取值范围为() .

- A. $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ B. $(-\infty, -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

D. $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

6 若函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$, 则该函数图像的一条对称轴方程是 () .

A. $x = \frac{\pi}{12}$

B. $x = \frac{5\pi}{12}$

C. $x = \frac{\pi}{6}$

D. $x = \frac{\pi}{3}$

7 $(x^2 + 2)(x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为 () .

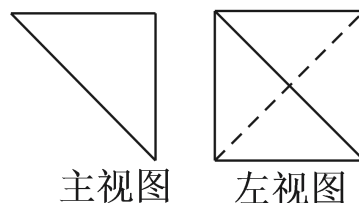
A. -40

B. -25

C. 25

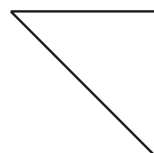
D. 55

8 某四面体的三视图如图所示, 正视图、俯视图都是腰长为2的等腰直角三角形, 侧视图是边长为2的正方形, 则此四面体的四个面中面积最大的为 () .



主视图

左视图



俯视图

A. $2\sqrt{2}$

B. 4

C. $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{6}$

9 若函数 $f(x)$ 满足: 在定义域 D 内存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0 + 1) = f(x_0) + f(1)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为“1的饱和函数”. 给出下列四个函数:

① $f(x) = \frac{1}{x}$; ② $f(x) = 2^x$; ③ $f(x) = \lg(x^2 + 2)$; ④ $f(x) = \cos(\pi x)$.

其中是“1的饱和函数”的所有函数的序号为 () .

A. ①③

B. ②④

C. ①②

D. ③④

10 点 S 、 A 、 B 、 C 在半径为 $\sqrt{2}$ 的同一球面上，点 S 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}$ ，

$AB = BC = CA = \sqrt{3}$ ，则点 S 与 $\triangle ABC$ 中心的距离为()。

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

11 过点 $(0, 2b)$ 的直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的一条斜率为正值的渐近线平行，若

双曲线 C 的右支上的点到直线 l 的距离恒大于 b ，则双曲线 C 的离心率的取值范围是()。

- A. $(1, 2]$ B. $(2, +\infty)$
C. $(1, 2)$ D. $(1, \sqrt{2}]$

12 函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + x$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是()。

- A. $(0, 1)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(-\infty, \frac{1+e}{e^2})$ D. $(0, \frac{1+e}{e^2})$

二、填空题 (每小题5分, 共20分)

13 下列结论：

①若命题 p :存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $\tan x = 1$; 命题 q :对任意 $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$, 则命题“ p 且 $\neg q$ ”为假命题;

②已知直线 $l_1: ax + 3y - 1 = 0$, $l_2: x + by + 1 = 0$, 则 $l_1 \perp l_2$ 的充要条件为 $\frac{a}{b} = -3$;

③命题“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 1$ ”的逆否命题为“若 $x \neq 1$ 则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”。

其中正确结论的序号为 _____。

14 若椭圆 $mx^2 + ny^2 = 1$ 于直线 $x + y - 1 = 0$ 交于 A 、 B 两点, 过原点与线段 AB 中点的直线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{n}{m}$ 的值等于 _____。

15

过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F ，且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线与抛物线交于 A, B 两点，若弦 AB 的垂直平分线经过点 $(0, 2)$ ，则 p 等于_____。

16 设点 P 在曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y = \ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为_____。

三、解答题 (6小题, 共70分)

17 已知在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a, b, c 依次成等差数列。

(1) 若 $\sin A : \sin B = 3 : 5$ ，求三个内角中最大角的度数。

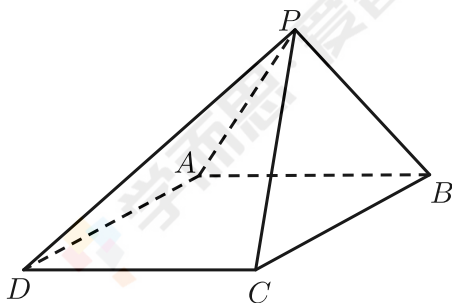
(2) 若 $b = 1$ 且 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = b^2 - (a - c)^2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，点 $(n, \frac{S_n}{n}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 均在函数 $y = 3x - 2$ 的图象上。

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。

(2) T_n 是数列 $\left\{\frac{3}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和，求使 $T_n < \frac{m}{20}$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m 。

19 如图，四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $PA \perp PB$ ， $PC = 2$ 。



(1) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(2) 若 $PA = PB$ ，求二面角 $A - PC - D$ 的余弦值。

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $A(\sqrt{2}, 1)$ 。直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + m$ 交椭圆 C 于 B, D (不与点 A 重合) 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由。

21 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，直线 $x + y + \sqrt{3} = 0$ 与椭圆 E 仅有一个公共点。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2) 直线 l 被圆 $O: x^2 + y^2 = 3$ 所截得的弦长为 3，且与椭圆 E 交于 A, B 两点，求 $\triangle ABO$ 面积的最大值。

22 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$ 。

(1) 函数 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - 2y + 1 = 0$ 垂直，求 a 的值。

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

(3) 不等式 $2x \ln x \geq -x^2 + ax - 3$ 在区间 $(0, e]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围。