2018~2019学年四川成都武侯区成都七中高新校区高二上学期文科期中数学试卷(详解)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

1. 不在曲线$x^2-xy+2y+1=0$上的点的坐标是（ ）．

A. $(1,-2)$
B. $(2,-3)$
C. $(3,10)$
D. $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

【答案】B

【解析】将坐标代入曲线方程，若点的坐标满足曲线方程，则在曲线上；否则该点不在曲线上．

故选B．

2. 抛物线$y^2=12x$的焦点坐标为（ ）．

A. $(0,3)$
B. $(0,6)$
C. $(3,0)$
D. $(6,0)$

【答案】C

【解析】考察抛物线的性质，抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，故抛物线$y^2=12x$的焦点坐标为$\left(\frac{12}{4},0\right)$即$(3,0)$．

故选C．

3. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的渐近线方程为（ ）．

A. $y=\pm\frac{3}{4}x$
B. $y=\pm\frac{9}{16}x$
C. $y=\pm\frac{16}{9}x$
D. $y=\pm\frac{4}{3}x$

【答案】D

【解析】双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，则$a=3$，$b=4$，

故其渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，$y=\pm\frac{4}{3}x$．

故选D．

4. 直线$2x+y=2$在y轴上的截距为（ ）．

A. 2　　B. 1　　C. -2　　D. -1

【答案】A

【解析】考察直线的性质，$x=0$时，$y=2$，即y轴上的截距．

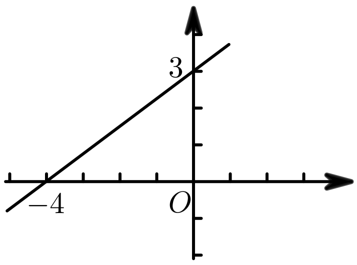
故选A．

5. 直线$3x-4y+12=0$与坐标轴围成的三角形的面积为（ ）．

A. 12　　B. 6　　C. 3　　D. 2

【答案】B

【解析】直线$3x-4y+12=0$，如图所示，



横截距为4，纵截距为3，

故与坐标轴围成的三角形的面积$S=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$．

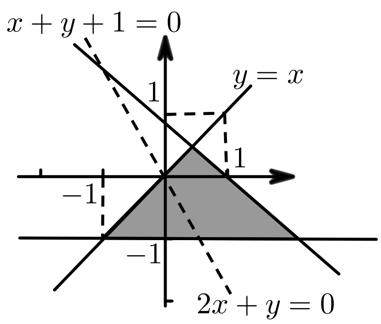
故选B．

6. 若x，y满足约束条件$\begin{cases} y\leqslant x \\ x+y\leqslant 1 \\ y\geqslant -1 \end{cases}$，则$2x+y$的最小值为（ ）．

A. -3　　B. 0　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 3

【答案】A

【解析】线性规划，画出三条直线的图象，如图所示，



阴影部分表示x、y满足的范围，

则$2x+y$在$(-1,1)$处取最小值$(2x+y)_{\min}=-3$.

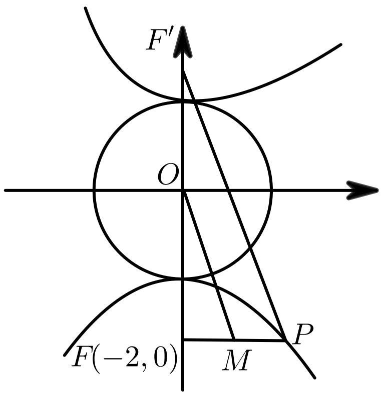
故选A.

7. 设P为双曲线$y^2-\dfrac{x^2}{2}=1$上任一点，$F(0,-2)$，则以FP为直径的圆与双曲线实轴长为直径的圆（　）.

A. 相切　　B. 相交　　C. 相离　　D. 内含

【答案】A

【解析】点M为以FP为直径的圆的圆心，



则圆心距$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF'|=\dfrac{1}{2}||PF|\pm 2a|=\left|\dfrac{1}{2}|PF|\pm a\right|$，当$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF|+a$时，两圆外切，当$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF|-a$时，两圆内切.

故选A.

8. 已知P为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，$F_1$，$F_2$为椭圆焦点，且$|PF_1|=3|PF_2|$，则椭圆离心率的范围是（　）.

A. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{3},1\right)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$

【答案】D

【解析】$\because|PF_1|\leqslant a+c$，$|PF_2|\geqslant a-c$，

$\therefore a+c\geqslant|PF_1|=3|PF_2|\geqslant 3a-3c\Rightarrow e\geqslant\dfrac{1}{2}$，

又椭圆的离心率小于1，故$e\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

故选D.

9. 点$M(x,y)$满足关系式$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=6$，则点$M$的轨迹是（　）.

A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 双曲线的一支　　D. 线段

【答案】D

【解析】关系式$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=6$，可看作点$M$到点$F_1(0,-3)$及点$F_2(0,3)$的距离和，即有$|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$，所以$M$的轨迹是线段$F_1F_2$.

故选D.

10. 圆$C:x^2+y^2-x+2y=0$关于直线$l:x+y+1=0$对称的圆的方程为（ ）.

A. $x^2+y^2+4x-3y+4=0$

B. $x^2+y^2-2x+y=0$

C. $x^2+y^2+3y+1=0$

D. $x^2+y^2+2x-y=0$

【答案】C

【解析】圆$C:x^2+y^2-x+2y=0$即圆$C:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$，它的圆心为$\left(\frac{1}{2},-1\right)$半径为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，设圆心$\left(\frac{1}{2},-1\right)$关于直线$x+y+1=0$对称点为

$M(x,y)$，则由$\begin{cases}\frac{y+1}{x-2}\cdot(-1)=-1\\ \frac{x+\frac{1}{2}}{2}+\frac{y-1}{2}+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{3}{2}\end{cases}$，

则圆C关于直线$x+y+1=0$对称的圆M的方程为$x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$即

$x^2+y^2+3y+1=0$.

故选C.

11. 设点$A(-5,0)$，$B(5,0)$，直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积为k，对于结论：

①当$k=-1$时，点M的轨迹方程为$x^2+y^2=25$；

②当$k=\frac{4}{9}$时，点M的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}-\frac{9y^2}{100}=1(x\neq\pm5)$；

③当$k=0$时，点M的轨迹方程为$y=0$.

其中正确结论的个数为（ ）.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】设$M(x,y)$，则AM斜率$k_1=\frac{y}{x+5}$，BM斜率为$k_2=\frac{y}{x-5}$，斜率之积为k，

即有$\frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=k\Rightarrow\frac{y^2}{x^2-25}=k(x\neq\pm5)$，

当$k=-1$时，M的轨迹方程为$y^2\pm x^2=25(x\neq\pm5)$，故①错；

当$k=\frac{4}{9}$时，M的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}-\frac{9y^2}{100}=1(x\neq\pm5)$，故②对；

当$k=0$时，M的轨迹方程为$y=0(x\neq\pm5)$，故③错；

故正确的结论只有1个.

故选B．

12. 已知圆$O: x^2+y^2=1$，直线$l: y=ax+2$，在直线l上存在点M作圆O的两条切线，切点为A，B，且四边形$OAMB$为正方形，则实数a的范围是（　）．

A. $-1 \leqslant a \leqslant 1$

B. $a \leqslant -1$或$a \geqslant 1$

C. $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$

D. $a \leqslant -\frac{1}{2}$或$a \geqslant \frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】因为圆O圆心为原点$(0,0)$，半径为$r=1$，且四边形$OAMB$为正方形，故易得$|OM|=\sqrt{2}$，满足题意，则只需圆心O到直线$l: y=ax+2$的距离$d \leqslant \sqrt{2}$，即$\frac{|2|}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant \sqrt{2}$，即$a \geqslant 1$或$a \leqslant -1$．

故选B．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

13. 双曲线$25x^2-16y^2=400$的实轴长为 ______ ．

【答案】8

【解析】双曲线$25x^2-16y^2=400$即$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$即有$a=4$，故实轴长为$2a=8$．

故答案为：8．

14. F_1，F_2为椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，$P$为椭圆上一点，则$\triangle F_1PF_2$的面积最大值为 ______ ．

【答案】2

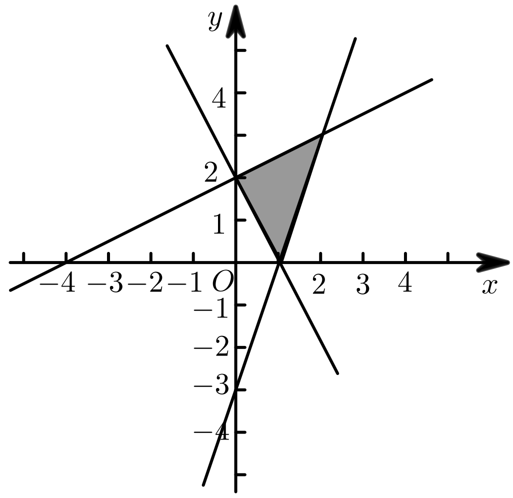
【解析】椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$，则$a=\sqrt{5}$，$b=2$，$c=1$，$\triangle F_1PF_2$面积最大时有点$P$为短轴端点，此时$(S_{\triangle F_1PF_2})_{\max}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot b=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$．

故答案为：2．

15. 已知x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+y-2 \geqslant 0\\ x-2y+4 \geqslant 0\\ 3x-y-3 \leqslant 0\end{cases}$，则$x^2+y^2$的最小值为 ______ ．

【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】画出可行域，如图所示，



$z=x^2+y^2$表示可行域内的点到原点$(0,0)$的距离的平方，

由图得，距离最小值为原点到直线$2x+y-2=0$的距离，

$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则$z_{\min}=d^2=\dfrac{4}{5}$.

故答案为：$\dfrac{4}{5}$.

16. 点M为椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$上一点，$F_1$，$F_2$为椭圆的两个焦点，则$\triangle F_1MF_2$的重心的轨迹方程为 ______ .

【答案】$x^2+\dfrac{9y^2}{5}=1(y\neq 0)$

【解析】椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，$C^2=a^2-b^2=4$，则焦点$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

设$\triangle F_1MF_2$的重心$G(x,y)$，$M(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，

则有$\begin{cases} x=\dfrac{-2+2+x_0}{3} \\ y=\dfrac{0+0+y_0}{3} \end{cases}$ 即$\begin{cases} x_0=3x \\ y_0=3y \end{cases}$，

M在椭圆上则有$\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{5}=1$，即$\dfrac{(3x)^2}{9}+\dfrac{(3y)^2}{5}=1$，

化简得G的轨迹方程为$x^2+\dfrac{9y^2}{5}=1(y\neq 0)$.

故答案为：$x^2+\dfrac{9y^2}{5}=1(y\neq 0)$.

三、解答题：本大题共6小题，共70分

17. 已知圆C的圆心在直线$3x+2y=0$上，并且与x轴的交点分别为$A(-2,0)$，$B(6,0)$.

（1）求圆C的方程.

（2）若直线l过原点且垂直直线$3x+2y=0$，直线l交圆C于M、N，求$\triangle MCN$的面积.

【答案】（1）$(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

（2） $S_{\triangle MCN}=2\sqrt{39}$.

【解析】（1）线段AB的中垂线方程为：$x=2$，

由$\begin{cases}x=2\\3x+2y=0\end{cases}$，得$y=-3$，

$\therefore$圆心C为$(2,-3)$，

又半径$r=|AC|=5$，

$\therefore$圆C的方程为$(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

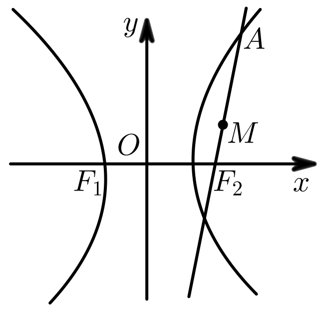
（2）直线l的方程为：$2x-3y=0$，

所以点C到直线l的距离为：$d=\dfrac{|4+9|}{\sqrt{4+9}}=\sqrt{13}$，

$\therefore|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=4\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle MCN}=\dfrac{1}{2}\times|MN|\times d=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{13}=2\sqrt{39}$.

18. 已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$，焦距为$2\sqrt{3}$，过点$M(2,1)$作直线$l$交双曲线$E$于$A$、$B$两点，且$M$为$AB$的中点.



（1）求双曲线E的方程.

（2）求直线l的方程.

【答案】（1）$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）$4x-y-7=0$.

【解析】（1）由已知得$\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$，$2c=2\sqrt{3}$，

解得$a=1$，$b=\sqrt{2}$，

$\therefore$双曲线E的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）设直线l方程为：$y-1=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+(1-2k)\\x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，

得$(2-k^2)x^2+2k(2k-1)x-(1-2k)^2-2=0$，

$\therefore\begin{cases}2-k^2\neq0\\\Delta=4k^2(2k-1)^2+4(2-k^2)[(1-2k)^2+2]>0\end{cases}$①，

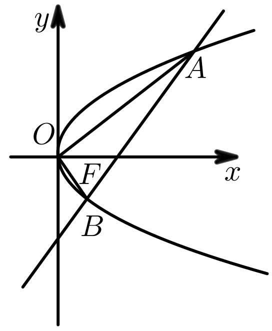
$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2k(2k-1)}{k^2-2}$，

由$M(2,1)$为AB的中点，

得$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k(2k-1)}{k^2-2}=2$，解得$k=4$，适合①，

$\therefore$直线l的方程为$y-1=4(x-2)$，即$4x-y-7=0$．

19. 从抛物线$y^2=16x$上各点向x轴作垂线，垂线段中点的轨迹为E．



（1）求曲线E的方程．

（2）若直线$y=x-4$与曲线E相交于A、B两点，求证：$OA\perp OB$．

【答案】（1）$y^2=4x$．

（2）证明见解析．

【解析】（1）令抛物线上一点$P(x_0,y_0)$，设$E(x,y)$，

由已知得$x_0=x$，$y=\dfrac{1}{2}y_0$，

$\because P(x_0,y_0)$满足$y^2=16x$，

$\therefore y_0^2=16x_0$，则$4y^2=16x$，即$y^2=4x$，

$\therefore$曲线E的方程为：$y^2=4x$．

（2）由$\begin{cases}y=x-4\\y^2=4x\end{cases}$，可得$x^2-12x+16=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由于$\Delta=12^2-4\times16>0$，

由韦达定理可知：$x_1+x_2=12$，$x_1x_2=16$，

$y_1y_2=(x_1-4)(x_2-4)=x_1x_2-4(x_1+x_2)+16=-16$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\therefore OA\perp OB$．

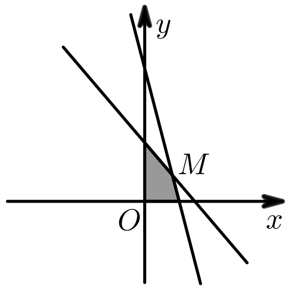
20. 一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，生产1车皮甲种肥料的主要原料是磷酸盐$4t$，硝酸盐$18t$，生产1车皮乙种肥料需要的主要原料是磷酸盐$1t$，硝酸盐$15t$，现库存磷酸盐$10t$，硝酸盐$66t$，在此基础上生产这两种肥料，若生产1车皮甲种肥料，产生的利润为10000元，生产1车皮乙种肥料，产生的肥料为5000元，那么分别生产甲、乙两种肥料各多少车皮，能够产生最大的利润？

【答案】生产甲、乙两种肥料各2车皮，能够产生最大利润，最大利润为3万元．

【解析】设生产甲种肥料x车皮，乙种肥料y车皮，能够产生利润z万元，

目标函数为$z=x+0.5y$，其中x，y满足以下条件：$\begin{cases}4x+y\leqslant 10\\18x+15y\leqslant 66\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，

可行域如图：



把$z=x+0.5y$变形为$y=-2x+2z$，

得到斜率为-2，在y轴上的截距为$2z$，随z变化的一组平行直线，

当直线$y=-2x+2z$经过可行域上的点M时，截距$2z$最大，即z最大，

联立方程$\begin{cases}4x+y=10\\18x+15y=66\end{cases}$，得$M(2,2)$，

$\therefore z_{\max}=2+1=3$.

答：生产甲、乙两种肥料各2车皮，能够产生最大利润，最大利润为3万元.

21. 已知圆P过$A(5,-2)$，$B(0,3)$，$C(4,1)$.

（1）求圆P的方程.

（2）若过点$M(-3,-3)$的直线l被圆P所截得的弦长为8，求直线l的方程.

【答案】（1）$x^2+y^2+4y-21=0$.

（2）直线l的方程为$4x+3y+21=0$，或$x=-3$.

【解析】（1）设圆P的方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

$\because A$、B、C都在圆上，

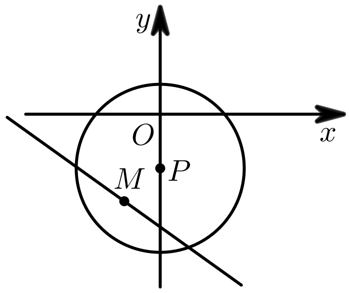
$\therefore\begin{cases}29+5D-2E+F=0\\9+3E+F=0\\17+4D+E+F=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}D=0\\E=4\\F=-21\end{cases}$，

$\therefore$所求圆P的方程为$x^2+y^2+4y-21=0$.

（2）由$x^2+(y+2)^2=25$，知圆心$P(0,-2)$,半径$r=5$，

如下图，



由直线l被圆P截得的弦长为8，

得圆心距$d=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

当直线l与x轴不垂直时，设直线l的方程为：$y+3=k(x+3)$，

即$kx-y+3k-3=0$，

$\therefore$圆心P到直线l距离$d=\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，化简得$-6k=8$，则$k=-\dfrac{4}{3}$，

$\therefore$直线l方程为：$y+3=-\dfrac{4}{3}(x+3)$，即$4x+3y+21=0$，

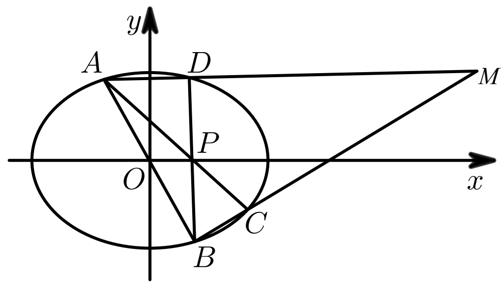
当直线$l\perp x$轴时，直线l方程为$x=-3$，

代入圆方程得$y^2+4y-12=0$，解得$y_1=-6$，$y_2=2$，

$\therefore$弦长仍为8，满足题意.

综上，直线l的方程为$4x+3y+21=0$，或$x=-3$.

22. ．已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，短轴长为4，直线$AB$过原点$O$交椭圆于$A$，$B$，$P(1,0)$，直线$AP$，$BP$分别交椭圆于$C$、$D$，且直线$AD$，$BC$交于点$M$，图中所有直线的斜率都存在.



（1）求椭圆方程.

（2）求证：$k_{AD}\cdot k_{BD}=-\dfrac{4}{9}$.

（3）求证：点M在定直线上.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（2）证明见解析.

（3）证明见解析.

【解析】（1）由$2b=4$，得$b=2$，

由$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{c}{a}$，得$\dfrac{a^2-4}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，解得$a^2=9$，

∴椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（２）设$A(x_0,y_0)$，$D(x_1,y_1)$，则$B(-x_0,-y_0)$，

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{4}=1① \\ \dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1②\end{cases},$$

由①−②得：$\dfrac{(x_0-x_1)(x_0+x_1)}{9}+\dfrac{(y_0-y_1)(y_0+y_1)}{4}=0$，

即$\dfrac{(x_0-x_1)(x_0+x_1)}{9}=-\dfrac{(y_0-y_1)(y_0+y_1)}{4}$，$-\dfrac{4}{9}=\dfrac{(y_0-y_1)(y_0+y_1)}{(x_0-x_1)(x_0+x_1)}$，

即$k_{AD}\cdot k_{BD}=-\dfrac{4}{9}$.

（３）由（2）知$k_{AD}\cdot k_{BD}=-\dfrac{4}{9}$，设$A(3\cos\theta,2\sin\theta)$，

则$B(-3\cos\theta,-2\sin\theta)$，

又$k_{BD}=k_{BP}=\dfrac{2\sin\theta}{1+3\cos\theta}$，则$k_{AD}=-\dfrac{2(1+3\cos\theta)}{9\sin\theta}$，

∴直线AD方程为：$y-2\sin\theta=-\dfrac{2(1+3\cos\theta)}{9\sin\theta}(x-3\cos\theta)$③，

同理$k_{BC}\cdot k_{AC}=-\dfrac{4}{9}$，又$k_{AC}=k_{AP}=\dfrac{2\sin\theta}{3\cos\theta-1}$，

则$k_{BC}=-\dfrac{2(3\cos\theta-1)}{9\sin\theta}$，

∴直线BC方程为：$y+2\sin\theta=-\dfrac{2(3\cos\theta-1)}{9\sin\theta}(x+3\cos\theta)$④，

由③−④得：$-4\sin\theta$

$=-\dfrac{2}{9\sin\theta}[(1+3\cos\theta)(x-3\cos\theta)-(3\cos\theta-1)(x+3\cos\theta)]$，

化简得$x=9$，

∴点M在定直线$x=9$上.