2018~2019学年四川成都武侯区成都七中高新校区高三上学期理科期中数学试卷(详解)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

1. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x|x<0或x>3\right\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$（　）．

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

【答案】D

【解析】$\because B=\left\{x|x<0或x>3\right\}$，

$\therefore\complement_U B=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，

$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{0,1,2\}$．

故选D．

2. 函数$f(x)=\log_4 x-\dfrac{3}{x}$的零点所在区间是（　）．

A. $(1,2)$　　B. $(2,3)$　　C. $(3,4)$　　D. $(4,5)$

【答案】C

【解析】$f(1)=\log_4 1-3=-3<0$，

$f(2)=\log_4 2-\dfrac{3}{2}=-1<0$，

$f(3)=\log_4 3-1<0$，

$f(4)=1-\dfrac{3}{4}>0$，

故存在$x_0\in(3,4)$使$f(x_0)=0$存在．

故选C．

3. 在$\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^4$的展开式中，常数项等于（　）．

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

【答案】A

【解析】$T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r(x^{\frac{1}{3}})^{4-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=\mathrm{C}_4^r\cdot(-1)^r\cdot x^{\frac{4-r}{3}-r}=\mathrm{C}_4^r(-1)^r\cdot x^{\frac{4-4r}{3}}$，

要使项为常数，则$\frac{4-4r}{3}=0$即$r=1$，

$\therefore$常数项为$T_2=\mathrm{C}_4^1\cdot(-1)^1=-4$.

故选D.

4. 执行右图所示的算法程序，输出的结果是（ ）.

```
INPUT  k = 1
       S = 0
WHILE  k < 10
 S = S + k
 k = k + 2
WEND
PRINT  S
END
```

A. 9　　B. 16　　C. 20　　D. 25

【答案】D

【解析】由题意，第一次循环：$S=1$，$k=3$；第二次循环：$S=4$，$k=5$；

第三次循环：$S=9$，$k=7$；第四次循环：$S=16$，$k=9$；

第五次循环：$S=25$，$k=11$；k不满足要求退出，故$S=25$.

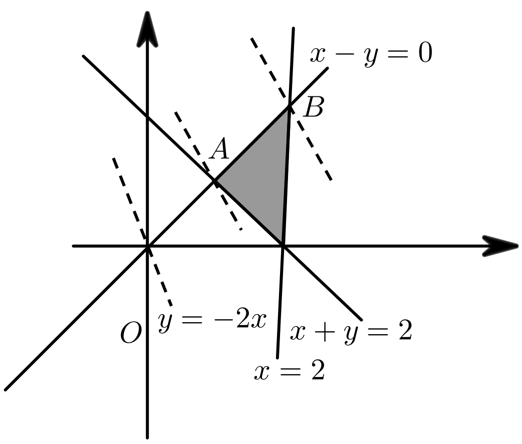
故选D.

5. 设实数x，y满足$\begin{cases}x-y>0\\x+y>2\\x<2\end{cases}$，则$2x+y$的取值范围是（ ）.

A. $(3,4)$　　B. $(3,5)$　　C. $(3,6)$　　D. $(4,6)$

【答案】C

【解析】作出$\begin{cases}x-y=0\\x+y>2\\x<2\end{cases}$的可行域：



$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$得$A(1,1)$，

$\begin{cases} x=2 \\ x-y=0 \end{cases}$得$B(2,2)$，

目标函数$z=2x+y$在A、B处取得极值，故$2x+y\in(3,6)$．

故选C．

6. 已知m是直线，α、β是两个不同平面，且$m//\alpha$，则$m\perp\beta$是$\alpha\perp\beta$的（ ）．

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】当$m//\alpha$，$m\perp\beta$时，$\because m//\alpha$则α内存在一条直线$n//m$，又$m\perp\beta$，故$n\perp\beta$，

$\therefore\alpha\perp\beta$，

当$m//\alpha$，$\alpha\perp\beta$时，不能推出$m\perp\beta$，故是充分不必要条件．

故选A．

7. 函数$f(x)=\begin{cases} x+2,-2\leqslant x\leqslant 0 \\ 2\cos x,0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$的图象与$x$轴围成的封闭图形的面积是（ ）．

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】由题意得：$S=\int_{-2}^{0}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)|_{-2}^{0}+2\sin x|_{0}^{\frac{3}{2}}$

$=0-(2-4)+2-0=4$．

故选B．

8. 某路口的交通信号灯在绿灯亮15秒后，黄灯闪烁3秒，然后红灯亮12秒，如此往复，设X为某交通参与者20次经过该路口时遇到红灯的次数，则随机变量X的期望EX等于（ ）．

A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】B

【解析】$P_{红灯亮}=\dfrac{12}{15+3+12}=\dfrac{2}{5}$，$P_{非红灯亮}=\dfrac{3}{5}$，该试验显然符合二项分布，

故$E(X)=nP=20\times\dfrac{2}{5}=8$．

故选B．

9. 函数$f(x)=\sin x\cdot\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)$是（ ）.

A. 最小正周期为π的奇函数

B. 最小正周期为π的偶函数

C. 最小正周期为2π的奇函数

D. 最小正周期为2π的偶函数

【答案】A

【解析】$f(x)=\sin x\cdot\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin x\cos x=\frac{1}{4}\sin 2x$,

故$f(x)$为奇函数，最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

故选A.

10. 已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的交角为120°，设$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$（其中$x$，$y\in\mathbf{R}$），若$|\vec{c}|=3$，则$x+y$的最大值是（ ）.

A. $\sqrt{6}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 6

D. $3\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，$|\vec{c}|=3$,

$\therefore\vec{c}^2=(x\vec{a}+y\vec{b})^2=x^2+y^2-xy=9$,

$\therefore(x+y)^2-3xy\geqslant\frac{(x+y)^2}{4}$即$9\geqslant\frac{(x+y)^2}{4}$,

$\therefore$当且仅当$x=y>0$时，$(x+y)_{\max}\leqslant 6$.

故选C.

11. 已知F_1、F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，其右支上的一点满足$|PF_2|=|F_1F_2|$，且直线$PF_1$与圆$x^2+y^2=a^2$相切，则该曲线的离心率为（ ）.

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】设$|PF_1|$与圆相切于M，则因为$|PF_2|=|F_1F_2|$，所以$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，所以$|F_1M|=\frac{1}{4}|PF_1|$，又因为在直角$\triangle F_1MO$中，$|F_1M|^2=|F_1O|^2-a^2=c^2-a^2$，所以$|F_1M|=b=\frac{1}{4}|PF_1|$，又因为$|PF_1|=|PF_2|+2a=2c+2a$，$c^2=a^2+b^2$,

$\therefore 4\sqrt{c^2-a^2}=2c+2a$，得$e=\frac{5}{3}$.

故选D.

12.

已知a为常数，曲线$C_1: y=x^3+x^2$和$C_2: y=ax+3\ln x$在它们的公共点处具有相同的切线，则a之值为（ ）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】设切点横坐标为t，$y=x^3+x^2$的导数为$y'=3x^2+2x$，

$y=ax+3\ln x$的导数为$y'=a+\frac{3}{x}$，

由题意得$\begin{cases}3t^2+2t=a+\frac{3}{t}\\t^3+t^2=at+3\ln t\end{cases}$，解得$\begin{cases}t=1\\a=2\end{cases}$，

故选B.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

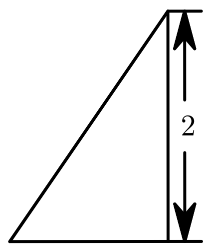
13. 复数$z=\frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（其中$\mathrm{i}$是虚数单位）的共轭复数$\bar{z}=$ ______ .

【答案】$1+2\mathrm{i}$

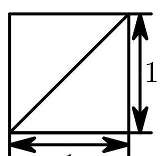
【解析】$z=\frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2-4\mathrm{i}}{2}=1-2\mathrm{i}$，

故答案为：$\bar{z}=1+2\mathrm{i}$.

14. 我国古代数学巨著《九章算术》中将“底面为矩形，且有两个侧面都与底面垂直的四棱锥”叫做“阳马”，右图是一个阳马的正视图和俯视图，则其外接球的表面积为 ______ .



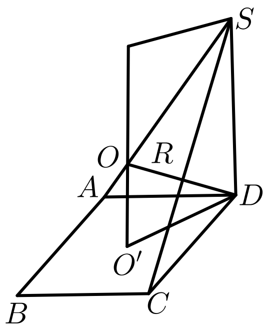
正视图



俯视图

【答案】6π

【解析】所求三视图的直观图如图所示：



所求外接球球心在$ABCD$中心的垂线上，且$|OO'| = \frac{1}{2}|SD| = 1$，$|O'D| = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore R = \sqrt{|OO'|^2 + |O'D|^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore S_{球} = 4\pi R^2 = 6\pi$.

15. 若关于x的不等式$ax^2 - (a+1)x + 1 > 0$有且仅有一个整数解，则实数a的取值范围是 ______ .

【答案】$(-\infty, -1]$

【解析】$ax^2 - (a+1)x + 1 = (x-1)(ax-1) > 0$，当$a = 0$时，不等式解为$x < 1$，不符合题意；

当$a = 1$时，原式为$(x-1)^2 > 0$，解得$x = 1$，不符合题意；

当$a < 0$时，不等式解为$\frac{1}{a} < x < 1$，要使其有唯一整数解，只能为0，

故$-1 \leqslant \frac{1}{a} < 0$，解得$a \leqslant -1$；

当$a > 0$时，解集为$\left\{x \middle| x < \frac{1}{a}或x > 1\right\}$或$\left\{x \middle| x < 1或x > \frac{1}{a}\right\}$必然有无数个整数，故$a$取值范围为$(-\infty, -1]$.

16. 设a、b、c分别为$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边，已知$c^2 = 3(a^2 - b^2)$，且$\tan C = 3$，则$\angle B$的大小为 ______ .

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】由已知得$\tan C = 3$，又$C \in (0, \pi)$，故C为锐角，

$\therefore \cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}$，又$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$，

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - \frac{\sqrt{10}}{5}ab = 3(a^2 - b^2)$，

$\therefore 10a^2 + \sqrt{10}ab - 20b^2 = 0$，得$2\sqrt{2}b = \sqrt{5}a$，

不妨设$b = \sqrt{5}$，$a = 2\sqrt{2}$，则$c = 3$，

$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$B \in (0, \pi)$，

$\therefore B = \frac{\pi}{4}$.

三、解答题：本大题共5小题，共60分

17. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = k(2^n - 1)$，且$a_4 = 8$，其中k为常数，$n \in \mathbf{N}^*$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式.

（2）求证：$2n - 2 < \dfrac{S_1}{a_1} + \dfrac{S_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{S_n}{a_n} \leqslant 2n - 1$.

【答案】（1）$a_n = 2^{n-1}$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（2）证明见解析.

【解析】（1）当$n \geqslant 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = k(2^n - 2^{n-1}) = k \cdot 2^{n-1}$，

由$a_4 = 8$，解得$k = 1$，

于是$a_n = 2^{n-1}(n \geqslant 2)$，

又当$n = 1$时，$a_1 = S_1 = k = 1$也适合上式，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = 2^{n-1}$

，$n \in \mathbf{N}^*$.

（2）由$S_n = 2^n - 1$，$a_n = 2^{n-1}$得，

$\dfrac{S_n}{a_n} = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$，

则$T_n = \dfrac{S_1}{a_1} + \dfrac{S_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{S_n}{a_n}$

$= 2n - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

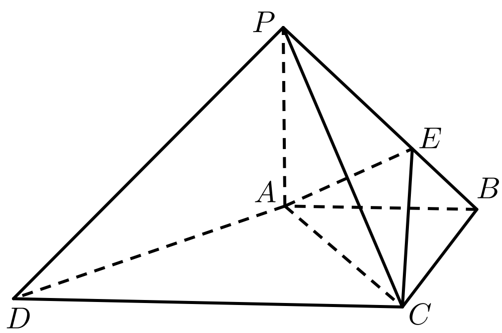
$= 2n - 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

$= 2n - 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$，

又因为$0 < \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1(n \in \mathbf{N}^*)$，

所以$2n - 2 < T_n \leqslant 2n - 1$，此题得证.

18. 如图所示，在四棱锥$P - ABCD$中，$DC = 2AB$，$\angle BAC = \angle ACD = 45^\circ$，且$\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{EB}$.



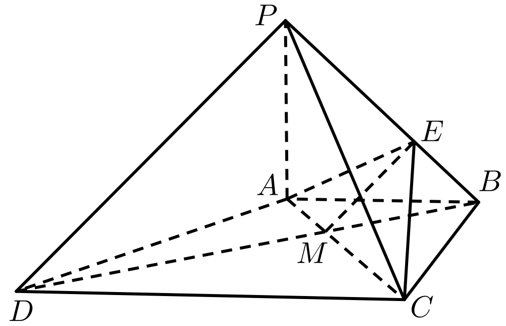
（1）求证：$PD//$平面ACE.

（2）若$PA \perp$底面$ABCD$，且$PA = AB = BC$，求二面角$E - AC - D$的余弦值.

【答案】（1）证明见解析.

（2）$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析】（1）连结BD交AC于点M，连结EM，



由$\angle BAC=\angle ACD$得$AB//DC$，

所以$DM:MB=DC:AB=2:1$，结合$\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{EB}$得$PE:EB=DM:MB$

，

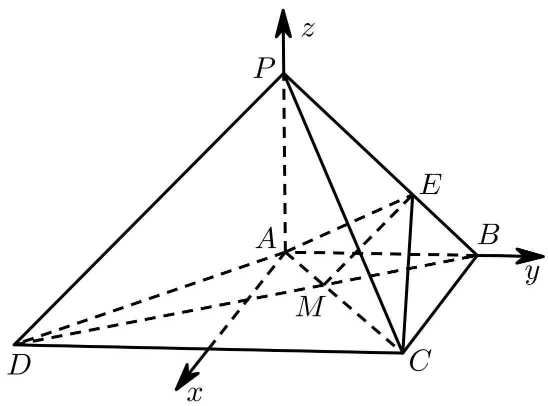
$\therefore PD//EM$，

又$PD\not\subset$平面EAC且$EM\subset$平面EAC，

$\therefore PD//$平面EAC．

（2）由$AB=BC$，$\angle BAC=45^\circ$知$AB\perp BC$，

建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



设$AB=3$，则$A(0,0,0)$，$C(3,3,0)$，$E(0,2,1)$，

$\therefore\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(3,3,0)$，

由$\begin{cases}2y+z=0\\x+y=0\end{cases}$得平面$ACE$的一个法向量为$\vec{m}=(1,-1,2)$，

又平面ACD的一个法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$，

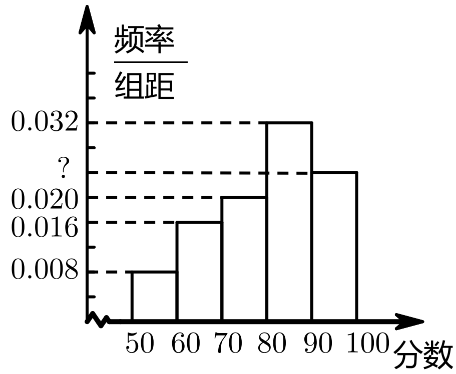
于是$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{2}{\sqrt{6}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

故二面角$E-AC-D$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

19. 某中学将全校学生在最近几次考试中的成绩（折合成百分制）与其自主学习习惯进行对照统计研究，并按系统抽样方法得到一个样本，其折合成绩（单位：分）的频率分布直方图及2×2列联表分别如下（均有部分数据缺失）．

人数	折合成绩<90分	折合成绩$\geqslant 90$分	总计

自主学习习惯良好		8	
自主学习习惯一般	26		
总计			50



（1）根据频率分布直方图估计全校学生的平均折合成绩.

（2）完善列联表中的数据，然后据此判断是否有95%的把握认为学生学习成绩与自主学习习惯有关？并解释其现实意义.

$P(K^2 \geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

【答案】（1）79.8（分）.

（2）

人数	折合成绩< 90分	折合成绩⩾ 90分	总计
自主学习习惯良好	12	8	20
自主学习习惯一般	26	4	30
总计	38	12	50

有95%的把握认为学习成绩与自主学习习惯有关，说明养成良好的自主学习习惯有助于学习成绩的提高.

【解析】（1）第五组的频率为$1-10\times(0.008+0.016+0.020+0.032)=1-0.76=0.24$，

估计全校学生的平均折合成绩为

$55\times0.08+65\times0.16+75\times0.20+85\times0.32+95\times0.24$

$=4.4+10.4+15+27.2+22.8$

$=79.8$（分）.

（2）因为样本容量为50，所以分数在$[50,90]$的频数为$50\times0.76=38$，

完善2×2列联表如下：

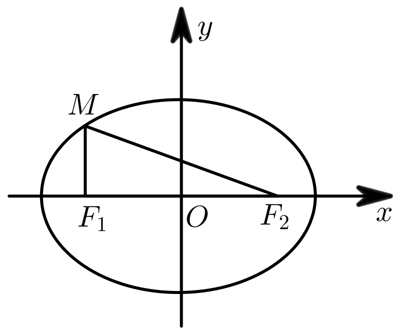
人数	折合成绩< 90分	折合成绩⩾ 90分	总计
自主学习习惯良好	12	8	20
自主学习习惯一般	26	4	30

总计	38	12	50

因为$K^2=\dfrac{50(12\times4-26\times8)^2}{38\times12\times20\times30}=\dfrac{800}{171}\approx4.68>3.841$，

所以有95%的把握认为学习成绩与自主学习习惯有关，说明养成良好的自主学习习惯有助于学习成绩的提高．

20. 如图，$F_1(-2,0)$、$F_2(2,0)$是椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$M$是椭圆$\Gamma$上的一点，当$MF_1\perp F_1F_2$时，有$|MF_2|=3|MF_1|$．



（１）求椭圆Γ的标准方程．

（２）设直线$y=kx+m(k\neq0)$与椭圆Γ交于不同两点A、B，且点$P(0,-1)$满足$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求$\triangle OAB$面积的最大值（其中$O$为坐标原点）．

【答案】（１）$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

（２）$2\sqrt{2}$．

【解析】（１）设$|MF_1|=t$，则$|MF_2|=3t$，

又$MF_1\perp F_1F_2$，

所以$16+t^2=9t^2$，解得$t=\sqrt{2}$，

所以由椭圆定义知，$2a=|MF_1|+|MF_2|=4t=4\sqrt{2}$，

于是$a=2\sqrt{2}$，进而由$b^2=a^2-4$，解得$b=2$，

故椭圆Γ的标准方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

（２）将$y=kx+m$代入$x^2+2y^2=8$，并整理得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$

，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{-4km}{2k^2+1}$，

$x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{2k^2+1}$．（※），

设线段AB的中点$N(x_0,y_0)$，则$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-2km}{2k^2+1}$，

$y_0=kx_0+m=\dfrac{m}{2k^2+1}$．（*），

由$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$知$x_0+k(y_0+1)=0$，

将（*）代入，又$k\neq0$，化简得$2k^2+1=m$，

由$\Delta>0$得$m^2<4(2k^2+1)$，结合$2k^2+1=m$及$k\neq 0$，

解得$1<m<4$，

于是$\triangle OAB$的面积

$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)-4x_1x_2]}-\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

将（※）式及$2k^2+1=m$代入得，$S=\sqrt{8m-2m^2}=\sqrt{8-2(m-2)^2}\leqslant 2\sqrt{2}$

，

当且仅当$m=2$，$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，所以$\triangle OAB$面积的最大值为$2\sqrt{2}$.

21. 已知函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{ax^2+1}$的定义域为$\mathbf{R}$，其中$a$为常数，$\mathrm{e}\approx 2.71828$为自然对数的底数.

（1）讨论$f(x)$极值点的个数.

（2）设x_1、x_2是$f(x)$的两个极值点，求证：$\frac{1}{\sqrt{a}}<f(x_1)+f(x_2)<1$.

【答案】（1）当$0\leqslant a\leqslant 1$时，$f(x)$无极值点；当$a>1$时，$f(x)$有两个极值点.

（2）证明见解析.

【解析】（1）因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，所以$a\geqslant 0$，

求导得$f'(x)=\frac{(ax^2-2ax+1)\mathrm{e}^{x-1}}{(ax^2+1)^2}$，

①当$a=0$时，$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增，所以$f(x)$无极值点；

②当$0<a\leqslant 1$时，$\Delta=4a(a-1)\leqslant 0$，故$f'(x)\geqslant 0$恒成立，所以$f(x)$在

$(-\infty,+\infty)$内单调递增，因此$f(x)$无极值点；

③当$a>1$时，$\Delta=4a(a-1)>0$，方程$ax^2-2ax+1=0$有两个不等实根x_1

，$x_2(x_1<x_2)$，于是$f(x)$在区间$(-\infty,x_1)$内单调递增，在(x_1,x_2)内单调递

减，在$(x_2,+\infty)$内单调递增，故$f(x)$有两个极值点，

综上所述，当$0\leqslant a\leqslant 1$时，$f(x)$无极值点；当$a>1$时，$f(x)$有两个极值点.

（2）因为$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，结合（1）知：$a>1$，且$ax_i^2+1=2ax_i$（其

中$i=1,2$），

由韦达定理得$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\frac{1}{a}\in(0,1)$，

不妨设$0<x_1<1<x_2<2$，

所以$f(x_1)+f(x_2)=\frac{\mathrm{e}^{x_1-1}}{ax_1^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{x_2-1}}{ax_2^2+1}$

$=\frac{\mathrm{e}^{x_1-1}}{2ax_1}+\frac{\mathrm{e}^{x_2-1}}{2ax_2}$

$=\frac{x_2\mathrm{e}^{x_1-1}+x_1\mathrm{e}^{x_2-1}}{2ax_1x_2}$

$=\frac{x_2\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{x_2}}{2\mathrm{e}}$，

$\because\frac{x_2\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{x_2}}{2}>\sqrt{x_1x_2\mathrm{e}^{x_1+x_2}}=\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{a}}$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{x_2e^{x_1}+x_1e^{x_2}}{2e}>\dfrac{1}{\sqrt{a}}$,

又$\because \dfrac{x_2e^{x_1}+x_1e^{x_2}}{2e}=\dfrac{(2-x_1)e^{x_1}+x_1e^{2-x_1}}{2e}$,

设函数$g(x)=(2-x)e^x+xe^{2-x}$，其中$x\in(0,1)$,

则$g'(x)=(1-x)(e^x+e^{2-x})>0$,

$\therefore g(x)$在$(0,1)$上单调递增，于是$g(x)<g(1)=2e$,

故$f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{g(x)}{2e}<1$,

从而此题得证.

四、选做题：共2题，选做一题计10分

22. 在平面直角坐标系xOy中，动点$P(x,y)$的坐标满足$\begin{cases}x=2t\\y=t^2\end{cases}$（其中$t\in\mathbf{R}$），在以$O$为极点、$x$轴的非负半轴为极轴的极坐标系（两种坐标系的单位长度相同）中，直线l的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\varphi)=4\cos\varphi$（其中$\varphi$为常数，且$\varphi\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$）.

（1）求动点P的轨迹C的极坐标方程（写成$\rho=f(\theta)$的形式）.

（2）设直线l与轨迹C交于A、B两点，求证：当φ变化时，$\angle AOB$的大小恒为定值.

【答案】（1）$\rho=\dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

（2）证明见解析.

【解析】（1）消去参数t，得曲线C的直角坐标方程$x^2=4y$,

将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入$x^2=4y$，得$\rho^2\cos^2\theta=4\rho\sin\theta$,

所以曲线C的极坐标方程为$\rho=\dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

（2）将l与C的极坐标方程联立，消去ρ得$\dfrac{\sin\theta\sin(\theta+\varphi)}{\cos^2\theta}=\cos\varphi$,

展开得$\dfrac{\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)}{\cos^2\theta}=\cos\varphi$,

由于$\cos\varphi\neq0$，于是可以得到$\tan^2\theta+\tan\varphi\cdot\tan\theta-1=0$,

设$A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_2,\theta_2)$，可得$\cos(\theta_1-\theta_2)=0$,

解得$\theta_1-\theta_2=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

故当φ变化时，$\angle AOB$的大小为定值$\dfrac{\pi}{2}$.

23. 已知不等式$|x+1|>|2-x|+1$的解集为M，且a，b，$c\in M$.

（1）比较$|a-b|$与$|1-ab|$的大小，并说明理由.

（2）若$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\sqrt[3]{abc}$，求$a^2+b^2+c^2$的最小值.

【答案】（1）$|a-b|<|1-ab|$；证明见解析.

（2）9.

【解析】（1）设函数$f(x)=|x+1|-|2-x|=\begin{cases}-3,x\leqslant -1\\2x-1,-1<x<2\\3,x\geqslant 2\end{cases}$，由$f(x)>1$得

$M=\{x|x>1\}$，

因为$|1-ab|^2-|a-b|^2=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2+b^2-2ab)$

$=a^2b^2-a^2-b^2+1$

$=(a^2-1)(b^2-1)>0$（由$a>1$，$b>1$），

所以$|a-b|<|1-ab|$.

（2）由已知$a>1$，$b>1$，$c>1$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$，

结合已知得$\sqrt[3]{(abc)^2}\geqslant 3$，

所以$a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}\geqslant 9$，

故$a^2+b^2+c^2$的最小值为9（当且仅当$a=b=c=\sqrt{3}$时取得）.