

华中师大一附中2019-2020学年度上学期高一期中检测

数学试题

时限：120分钟 满分：150分 命题人：蔡卉 胡立松 审题人：钟涛

I卷 (共16小题, 满分80分)

一、选择题 (本大题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

1. 函数 $f(x) = \frac{\lg(x+1)}{\sqrt{1-2^x}}$ 的定义域为

A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

Handwritten notes: $1-2^x > 0 \Rightarrow x < 0$

2. 与函数 $y = 2^{\log_2(x+1)}$ 为同一函数的是

A. $y = x$ B. $y = \frac{1}{|x|}$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = -\frac{1}{x}$

Handwritten notes: $x > 0$

3. 已知集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

4. 已知实数 $a = \log_2 3$, $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10}$, 则它们的大小关系为

A. $a > c > b$ B. $c > a > b$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

Handwritten notes: $\log_2 3 > 1$, $(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} < 1$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10} > 1$

5. 拟定从甲地到乙地通话 m 分钟的电话费 (单位: 元) 由 $f(m) = 1.06 \times (0.5 \times \langle m \rangle + 1)$ 给出, 其中 $m > 0$. $\langle m \rangle$ 是大于或等于 m 的最小整数 (如 $\langle 3 \rangle = 3, \langle 3.7 \rangle = 4, \langle 3.1 \rangle = 4$), 则从甲地到乙地通话时间为 5.5 分钟的话费为

A. 3.71 B. 3.97 C. 4.24 D. 4.77

Handwritten notes: $f(5.5) = 1.06(0.5 \times 6 + 1) = 1.06(4) = 4.24$

6. 函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^{\sqrt{-x^2-x+2}}$ 的单调递增区间为

A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, -\frac{1}{2}]$ C. $[-\frac{1}{2}, 1]$ D. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

Handwritten notes: $-x^2-x+2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, 1)$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1-a)x + 3a, & x < e \\ \ln x, & x \geq e \end{cases}$ (e 为自然对数的底数) 的值域为 R , 则实数 a 的取值范围是

A. $[\frac{e}{e-3}, 1]$ B. $[\frac{e}{e-3}, 1)$ C. $[\frac{1-e}{3-e}, 1]$ D. $[\frac{1-e}{3-e}, 1)$

Handwritten notes: $(1-a)e + 3a \geq 1$

8. 给出下列四个说法:

① 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x(x+1)$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - x$

② 若函数 $y = f(x-1)$ 的定义域为 $(1, 2)$, 则函数 $y = f(2x)$ 的定义域为 $(0, \frac{1}{2})$; ③ 若 $\log_5 \frac{3}{5} < 1$, 则 $a > \frac{1-e}{3-e}$

Handwritten notes: $0 < 2x < 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$

的取值范围为 $(\frac{3}{5}, 1)$ 。说法的个数是

④ 函数 $y = \log_a(3x-2) + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象必过定点 $(1, 0)$ 。其中正确

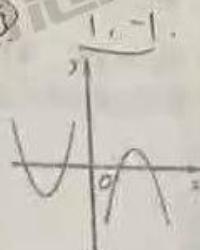
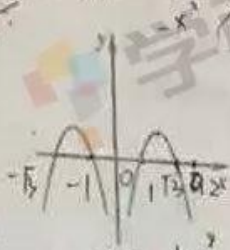
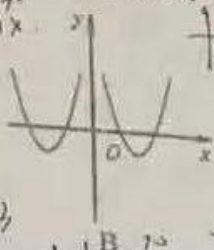
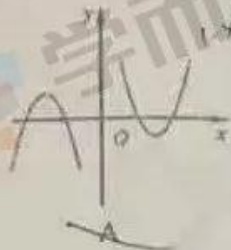
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. 函数 $f(x) = (-x^2 + 3)\ln|x|$ 的图象大致为



10. 若对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) + f(y) - f(x+y) = 3$. 函数 $g(x) = \frac{x}{x^2+1} + f(x)$. 则 $g(2) + g(-2)$ 的值为

A. 0

B. 4

C. 6

D. 9

11. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x), g(x)$. 其中函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$ 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 函数 $g(x)$ 满足 $g(1-x) = g(1+x)$ 且在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 设函数 $F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$. 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 均有

A. $F(1-x) \geq F(1+x)$

B. $F(1-x) \leq F(1+x)$

C. $F(1-x^2) \geq F(1+x^2)$

D. $F(1-x^2) \leq F(1+x^2)$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的奇函数. 且当 $x < 0$ 时, $g(x) = x^2 - 2x - 5$.

若 $f(g(a)) \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty, -1] \cup [0, 2\sqrt{2}-1]$

B. $[-1, 2\sqrt{2}-1]$

C. $(-\infty, -1] \cup (0, 2\sqrt{2}-1]$

D. $[-1, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-1]$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

13. 化简: $\sqrt{(3-\pi)^4} + \frac{1}{6} \lg \frac{1}{100} + 2^{\log_2 3} = \pi - \frac{1}{3}$

14. 已知幂函数 $f(x) = (2m-1)x^{-2m^2+m+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) 为偶函数, 且满足 $f(3) < f(5)$. 则 $m+n = 2$

15. 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$. 若函数 $f(x) = a^{\ln(x^2-2x+3)}$ 有最大值, 则关于 x 的不等式 $\log_a(x^2-5x+7) \geq 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 6\}$, $0 < a < 1$

16. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, b 为实数. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ a^x - 1, & x < 0 \end{cases}$. 若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) - b^2 < 0$ 恰有一个整数解, 则实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 1)$

$[f(x)]^2 + af(x) - b^2 < 0$ 恰有一个整数解. 则实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 1)$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

$1+a < b^2$

II 卷 (共 6 小题, 满分 70 分)

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明过程或演算步骤, 请将答案写在答题纸上的相应位置.)

17. (本小题满分 10 分)

已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | \frac{x-5}{x-2} \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + (a^2 - 1) < 0\}$.

(I) 当 $a = 2$ 时, 求 $(C_U A) \cap (C_U B)$;

(II) 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

$(x-5) | (x-2) \leq 0$

$x^2 - 4x + 3 < 0$

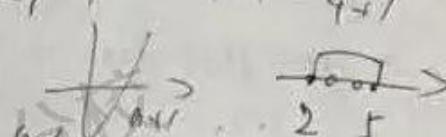
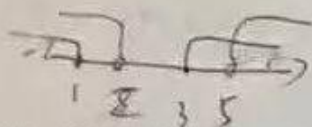
$\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$-(a+1)$

$-a-1$

$-a-1 = -a+1$



18. (本小题满分 10 分)

已知 $f(x) = 1 + \log_3 \frac{1-x}{1+x}$

(1) 求 $f(\frac{1}{2019}) + f(-\frac{1}{2019})$ 的值;

(2) 当 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最大值.

$f(-x) = 1 + \log_3 \frac{1+x}{1-x}$

$2 + \log_3 \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{1+x} = 2$

19. (本小题满分 12 分)

某工厂生产一种仪器的元件, 由于受生产能力和技术水平等因素的限制, 会产生一些次品. 根据经验知道, 次品数 P (万件) 与日产量 x (万件) 之间满足函数关系:

$$P = \begin{cases} \frac{x^2}{6}, & 1 \leq x < 4 \\ x + \frac{3}{x} - \frac{25}{12}, & x \geq 4 \end{cases}$$

已知每生产 1 万件合格元件可盈利 20 万元, 但每生产 1 万件次品将亏损 10 万元. (利润 = 盈利额 - 亏损额)

(1) 试将该工厂每天生产这种元件所获得的利润 T (万元) 表示为日产量 x (万件) 的函数;

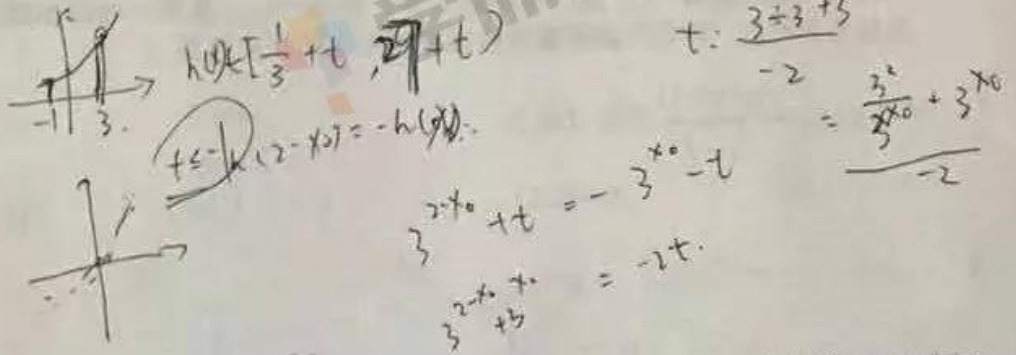
(2) 当工厂将该元件的日产量 x (万件) 定为多少时获得的日利润最大, 最大日利润为多少万元?

20. (本小题满分 12 分)

对于函数 $f(x)$, 若在定义域 D 内存在实数 x_0 满足 $f(2-x_0) = -f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为“类对称函数”.

(1) 判断函数 $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 是否为“类对称函数”? 若是, 求出所有满足条件的 x_0 的值; 若不是, 请说明理由;

(2) 若函数 $h(x) = 3^x + t$ 为定义在 $[-1, 3]$ 上的“类对称函数”, 求实数 t 的取值范围.

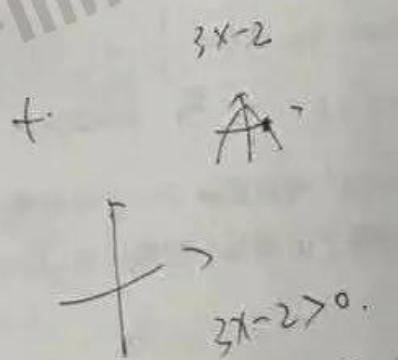


21. (本题满分 12 分)

定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ① 对任意 $x, y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 恒有 $f(xy) = f(x) + f(y)$; ② 当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(2) = -1$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性, 并加以证明;

(2) 求关于 x 的不等式 $f(3x-2) + f(x) + 4 \geq 0$ 的解集.



22. (本题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - mx (m \in \mathbb{R})$, $g(x) = -\ln x$.

(1) 若存在实数 x , 使得 $f(2^{-x}) = -f(2^x)$ 成立, 试求 m 的最小值;

(2) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2$ 恒成立, 试求 m 的取值范围;

(3) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小者, 设函数 $h(x) = \min\{f(x) + \frac{1}{4}, g(x)\} (x > 0)$, 讨论关于 x 的方程 $h(x) = 0$ 的实数解的个数.

