2019秋.高二八校联考.数学解析

——学而思高二数学组

一.选择题

1-6 DABBAB 7-12 ACCABD

二.填空题

13. $(-3,1)$ 14. $(x-2)^2+(y-1)^2=13$ 15. $-\sqrt{3}$ 16. 1

[题15分析]

设$P(x_0,y_0)$，则由$\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OQ}$得：$Q(\frac{x_0}{3},\frac{y_0}{3})$，代入$x^2+(y-1)^2=1$得：

$$(\frac{x_0}{3})^2+(\frac{y_0}{3}-1)^2=1 \quad 即 \quad x_0^2+(y_0-3)^2=9$$

又点P在直线$y=k(x-3\sqrt{3})$上，则与圆$x^2+(y-3)^2=9$有交点，

则$\frac{|3\sqrt{3}k+3|}{\sqrt{1+k^2}}\leq 3$，解得：$k\in[-\sqrt{3},0]$ $\therefore k_{min}=-\sqrt{3}$

[题16分析]

若$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$取最小值，则令$|OP|$，$|OQ|$均取最大值$\sqrt{2}$时即可.

此题$|OP|=|OQ|=\sqrt{2}$时，$k_1=k_2=k=0$，符合题意.

则$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$的最小值为1.

17. 解：(1) ∵ $BE \perp AC$ ∴ $k_{BE} \cdot k_{AC} = -1$ ∴ $k_{AC} = \frac{4}{7}$

又 $A(-1,2)$ ∴ AC方程为：$4x-7y+18=0$

联立：$\begin{cases} 4x-7y+18=0 \\ 2x-11y+54=0 \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$ ∴ $C(6,6)$

(2) 设 $B(x_0, y_0)$，则 $M\left(\frac{x_0-1}{2}, \frac{y_0+2}{2}\right)$，则有

$\begin{cases} 7x_0+4y_0-46=0 \\ 2\cdot\frac{x_0-1}{2}-11\cdot\frac{y_0+2}{2}+54=0 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=8 \end{cases}$ ∴ $B(2,8)$

则直线BC的方程为：$y=-\frac{1}{2}(x-6)+6$ 即 $x+2y-18=0$.

18. 解：(1) 设⊙A的半径为r，则 $r=\frac{|-1+4+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

则⊙A的方程：$(x+1)^2+(y-2)^2=20$

(2) 可知：圆心A到MN的距离：$d=\sqrt{20-19}=1$

1°：当MN斜率不存在时，MN：$x=-2$ 又 $A(-1,2)$

满足 $d=1$，符合题意

2°：当MN斜率存在时，设MN：$y=k(x+2)$

则 $d=\frac{|k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 解得：$k=\frac{3}{4}$ ∴ MN：$y=\frac{3}{4}(x+2)$

综上所述：直线l的方程为 $x=-2$ 或 $3x-4y+6=0$

19. 解：(1) 连 AC_1，过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AC 于点 F，连 DF.

又 $A_1C_1 \parallel AC$ 且 $AC = 2A_1C_1$

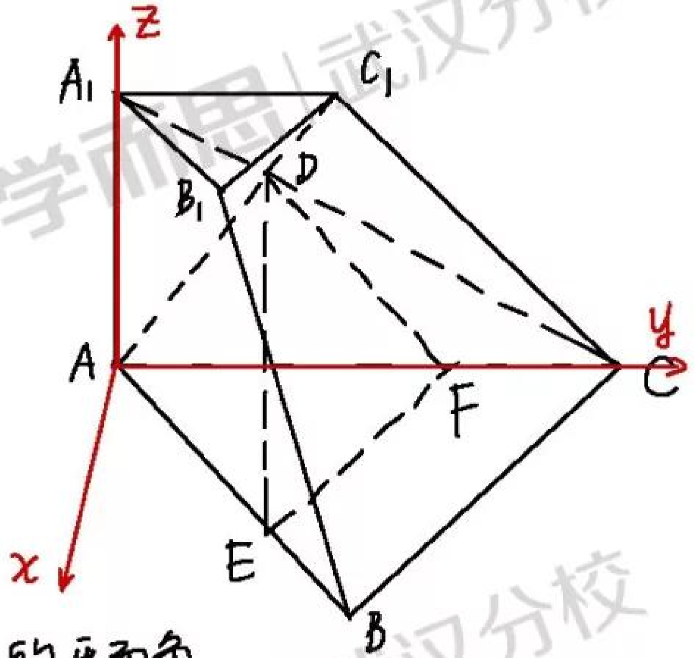
∴ AC_1 过点 D，则 $DA = 2DC_1$

又 $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} = 2 = \frac{DA}{DC_1}$

∴ $DF \parallel CC_1$ 又 $EF \parallel BC$

∴ 平面 DEF // 平面 BCC_1B_1

∴ DE // 平面 BCC_1B_1



(2) 由题可知：$AA_1 \perp$ 平面 ABC

则 $\angle BAC$ 即为二面角 C_1-AA_1-B 的平面角

∴ $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \frac{\pi}{3}$，设 $A_1A = 1$，则 $A_1B_1 = 2$，$AB = 4$

如图，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系

则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B(2\sqrt{3},2,0)$，$C(0,4,0)$，$C_1(0,2,1)$

∴ $\overrightarrow{AA_1} = (0,0,1)$，$\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{CC_1} = (0,-2,1)$

设平面 A_1AB 一个法向量为 $\vec{n_1} = (x_1,y_1,z_1)$，平面 BCC_1 一个法向量 $\vec{n_2} = (x_2,y_2,z_2)$

则 $\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n_1} = (1,-\sqrt{3},0)$

$\begin{cases} \vec{n_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n_2} = (1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$

则 $\cos\langle \vec{n_1},\vec{n_2} \rangle = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{1-3}{2 \cdot \sqrt{1+3+12}} = -\frac{1}{4}$

∴ 所求锐二面角余弦值为 $\frac{1}{4}$.

20. 解：(1) 设点 $M(x,y)$，则 $x\neq\pm3$

$\therefore k_{AM}\cdot k_{BM}=\dfrac{y}{x+3}\cdot\dfrac{y}{x-3}=\dfrac{y^2}{x^2-9}=-\dfrac{1}{9}$

整理得：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

$\therefore$ 曲线C的方程：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\ (x\neq\pm3)$

(2) 可知：直线 l 不可能斜率为0，则设直线 l：$x=ty+1$

$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

联立：$\begin{cases}x^2+9y^2=9\\x=ty+1\end{cases}$ 得：$(t^2+9)y^2+2ty-8=0$

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+9}$，$y_1\cdot y_2=-\dfrac{8}{t^2+9}$

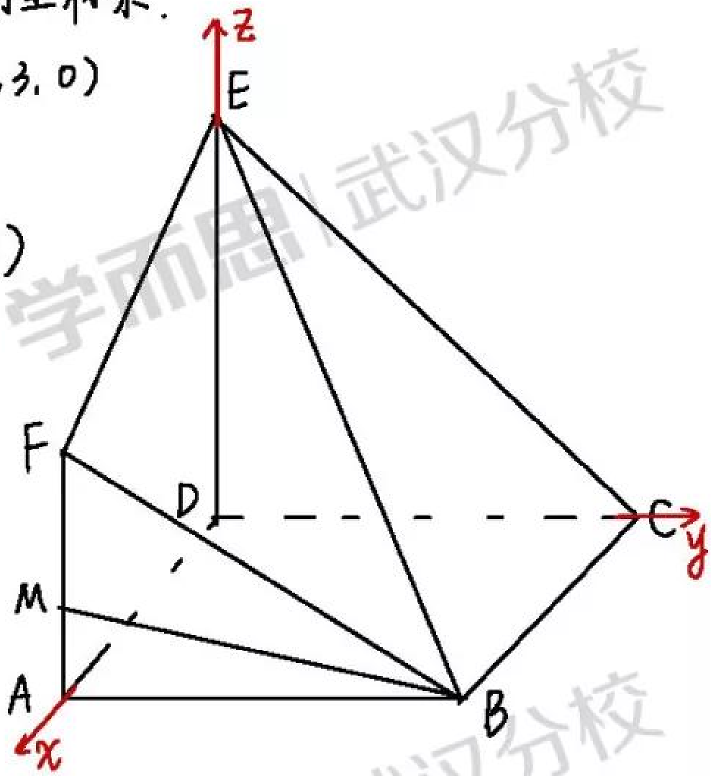
则 $k_{SP}\cdot k_{SQ}=\dfrac{y_1}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-x_0}=\dfrac{y_1y_2}{t^2y_1y_2+t(1-x_0)(y_1+y_2)+(1-x_0)^2}$

代入得：$k_{SP}\cdot k_{SQ}=\dfrac{-8}{(x_0^2-9)t^2+9(x_0-1)^2}$ 为定值，即与 t 无关

则 $x_0^2-9=0$ $\therefore x_0=\pm3$

$\therefore$ 存在定点 $S(3,0)$ 或 $(-3,0)$.

21. 解：(1) 如图，以D为原点建立空间直角坐标系.



则 $E(0,0,3\sqrt{6})$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$

$A(3,0,0)$，$F(3,0,2\sqrt{6})$

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-3,3,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-3,2\sqrt{6})$

$\overrightarrow{EF}=(3,0,-\sqrt{6})$

设平面BEF的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(2,4,\sqrt{6})$

则 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

$\therefore$ 直线CA与平面BEF所成角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

(2) 设 $M(3,0,m)$，连AC，则 $AC\perp BD$，$AC\perp DE$

$\therefore AC\perp$ 平面BDE $\therefore \overrightarrow{AC}=(-3,3,0)$ 为平面BDE的法向量

又 $\overrightarrow{BE}=(-3,-3,3\sqrt{6})$，$\overrightarrow{BM}=(0,-3,m)$

设平面BEM的法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases} \Rightarrow \vec{n_1}=(3\sqrt{6}-m,m,3)$

则 $|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{1}{2}$

整理得：$2m^2-6\sqrt{6}m+15=0$　解得：$m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\dfrac{5}{2}\sqrt{6}$.

又 $m\in[0,2\sqrt{6}]$　$\therefore m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　$\therefore |AM|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore$ 存在点M，$\dfrac{AM}{AF}=\dfrac{1}{4}$.

22. 解：(1) 由题可知：$c=\sqrt{3}$，则 $2a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}=4$

$\therefore a=2,\ c=\sqrt{3},\ b=1$

$\therefore$ 椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 设直线 $l: x=ty+4$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $P'(x_1,-y_1)$

联立 $\begin{cases} x=ty+4 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 得：$(t^2+4)y^2+8ty+12=0$

则 $\Delta=64t^2-4\times12(t^2+4)>0$ $\quad\therefore t^2>12$

$\therefore y_1+y_2=-\frac{8t}{t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{12}{t^2+4}$

由 $P'(x_1,-y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 得：$PQ: y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)-y_1$

令 $y=0$ 得：$x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+4)y_2+(ty_2+4)y_1}{y_1+y_2}$

即：$x=\frac{2ty_1y_2+4(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot\frac{12}{-8t}+4=1$

$\therefore D(1,0)$

又 $|PQ|=\sqrt{1+t^2}\cdot|y_1-y_2|$，$d=\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}$

则 $S_{\triangle DPQ}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$\therefore S_{\triangle DPQ}=\frac{6\sqrt{t^2-12}}{t^2+4}$ 令 $u=\sqrt{t^2-12}>0$ $\therefore t^2=u^2+12$

$\therefore S_{\triangle DPQ}=\frac{6u}{u^2+16}=\frac{6}{u+\frac{16}{u}}\le\frac{6}{2\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$

(取等时：$u=\frac{16}{u}$ $\therefore u=4$ $\therefore t=2\sqrt{7}$ 时，可取到)

$\therefore\triangle DPQ$ 面积最大为 $\frac{3}{4}$.