2019秋·高二数学期中考试分析——二高

作答老师：学而思高二数学组

一、选择题

1	2	3	4	5	6
B	C	A	B	C	A
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
B	A	C	D	D	A

第12题解析：

由题知 $a_n=2^n$，所以 $S_n=2^{n+1}-2$，所以 $\dfrac{2^n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{2^n}{\left(2^{n+1}-2\right)\left(2^{n+2}-2\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}-2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}\right)$

所以左边 $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}\right)$，带入 $n=9$，则左边 $>$ 右边；带入 $n=10$，则左边 $<$ 右边；

所以使得不等式成立的最小的整数为 10

二、填空题

13．充分不必要

14．$\dfrac{1}{4}$

15．$x+3y=0$ 或 $x+y-2=0$

16．①③

第16题解析：

①若 $m=-1$ 则，这样的点的轨迹是以 A_1A_2 为直径的圆；

②设点坐标，表示斜率后可以化简方程为一个焦点在 y 轴上的椭圆，且 $\dfrac{a^2}{b^2}=2$，所以离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③设点坐标，表示斜率后可以化简方程为一个焦点在 y 轴上的双曲线，且 $\dfrac{b^2}{a^2}=2$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$

④当 $m>0$ 时是双曲线，也成立所以 $m\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

所以选①③

三、解答题

17．解：(1)证明：$\because \angle FAD=90^\circ$

$\therefore FA\perp AD$

又$\because PA\perp CD$，$AD\cap CD=D, AD\subset$面$ABCD$，$CD\subset$面$ABCD$

$\therefore FA\perp$面$ABCD$

(2) $AD=2\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{5}$

$\therefore FD=2\sqrt{3}$，$PC=2\sqrt{6}$

$\therefore \cos\angle ADC=\dfrac{4+12-24}{2\times2\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore AB$与PD所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

18．解：(1)由题意知：$4=2p$，所以E的方程为$y^2=4x$

(2)①若$l\perp x$轴，则AB中点为F，与题意矛盾，舍

②设l斜率为k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，AB中点坐标为$(x_0,-1)$

$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_2^2=4x_2\end{cases}$，作差得$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$，即$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$

所以$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_0}=-2$

所以l的方程为$2x+y-2=0$

19．解：(1)设公差为d，所以$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$

所以$\dfrac{S_4}{4}-\dfrac{S_3}{3}=\dfrac{d}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以$d=1$

而$a_3^2=a_1a_9$，所以$(a_1+2)^2=a_1(a_1+8)$，解得$a_1=1$

所以$a_n=n$；

(2)令$b_n=\dfrac{n}{2^n}$

则 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$

$\dfrac{1}{2}T_n=\qquad \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-1}}+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}$

作差得$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$

所以$T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

20．解：(1)设方程为 $x^2+(y-b)^2=r^2$，因为 S 在圆上

$3+(3-b)^2=r^2$

又根据弦长为 $2\sqrt{3}$ 得 $r^2-(5-b)^2=3$

所以 $b=4$， $r=2$

所以圆的方程为 $x^2+(y-4)^2=4$

(2)圆心到 l 的距离 $d=\dfrac{|2a+4|}{\sqrt{a^2+1}}$，而弦长 $l=2\sqrt{4-d^2}$

$S=d\sqrt{4-d^2}\le\dfrac{d^2+4-d^2}{2}=2$，

当且仅当 $d=\sqrt{4-d^2}$ ，即 $d=\sqrt{2}$ 时成立；

此时 $a=-1$ 或 $a=-7$

21．解：(1)证明：连 BN 交 MC 于 Q

$\because MN\parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $MBCN$ 为平行四边形；

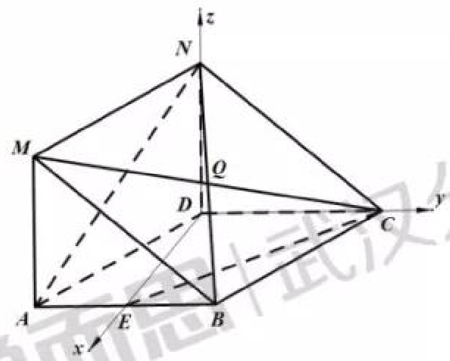
而 E 为 AB 中点；

$\therefore$ 在 ΔABC 中 $EQ\parallel AN$；

而 $EQ\subset$ 面 MEC；

所以 $AN\parallel$ 面 MEC

(2)建立如图所示的空间直角坐标系



所以 $E(\sqrt{3},0,0)$， $A(\sqrt{3},-1,0)$， $P(\sqrt{3},-1,h)$， $C(0,2,0)$

所以 $\overrightarrow{EP}=(0,-1,h)$， $\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{3},2,0)$

设面 PEC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$

即 $\begin{cases}-y+zh=0\\-\sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$，令 $x=2$，则 $y=\sqrt{3}$， $z=\dfrac{\sqrt{3}}{h}$

所以 $\overrightarrow{n_1}=\left(2,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{h}\right)$

面 DEC 法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$

所以 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{h}}{\sqrt{4+3+\frac{3}{h^2}}}=\dfrac{1}{2}$

解得 $h=\dfrac{3}{7}\sqrt{7}$

22．解：(1)设$b^2=a^2-5$

则$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-5}=1$，带入点得$\frac{5}{a^2}+\frac{\frac{16}{9}}{a^2-5}=1$

解得$a^2=9$或$a^2=\frac{25}{9}<5$（舍）

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(2)由题意知，若l为x轴，则P为原点，不成立

设$x=ty+3$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$

所以$E\left(0,-\frac{3}{t}\right)$

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1\\\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1\end{cases}$作差得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{4}{9}$，即$\frac{1}{t}\cdot k_{OP}=-\frac{4}{9}$

因为$EQ\perp GP$，所以$k_{EQ}=\frac{9}{4t}$

设$Q(x_0,y_0)$

则$\frac{y_0+\frac{3}{t}}{x_0}=\frac{9}{4t}$，化简为$y_0=\frac{9}{4t}x_0-\frac{3}{t}$

所以过定点$\left(\frac{4}{3},0\right)$

(3)$\begin{cases}x=ty+3\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$化简为$\left(4t^2+9\right)y^2+24ty=0$

所以$y_D=-\frac{24t}{4t^2+9}$

$l_{OM}:x=ty$

$\begin{cases}x=ty\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，解得$y_M=\frac{36}{4t^2+9}$

原式$\frac{|AD|+3|AE|}{|OM|}=\frac{|y_D|+3|y_E|}{|y_M|}=\frac{24|t|+\frac{9\left(4t^2+9\right)}{|t|}}{36}=\frac{20|t|+\frac{27}{|t|}}{12}\geq\sqrt{15}$

当且仅当$20|t|=\frac{27}{|t|}$即$t=\frac{3\sqrt{15}}{10}$时取等；

所以$\frac{|AD|+3|AE|}{|OM|}$的取值范围为$\left[\sqrt{15},+\infty\right)$