§2　三角形中的几何计算

知能目标解读

1.通常对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的度量问题.

2.能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些有关三角形的边和角以及三角形的面积等问题.

3.深刻理解三角形的知识在实际中的应用，增强应用数学建模意识，培养分析问题和解决实际问题的能力.

重点难点点拨

重点：应用正、余弦定理解三角形.

难点：灵活应用正、余弦定理及三角恒等变换解决三角形中的几何计算.

学习方法指导

一、三角形中的几何计算问题

正弦定理、余弦定理揭示了任意三角形边角之间的关系，是解三角形的重要工具，余弦定理与平面几何知识、向量、三角有着密切的联系.解三角形广泛应用于各种平面图形，如菱形、梯形、平行四边形、扇形及一些不规则图形等，处理时，可通过添加适当的辅助线，将问题纳入到三角形中去解决，这是化复杂为简单，化未知为已知的化归思想的重要应用.

注意：

三角形中的几何计算问题主要包括长度、角、面积等，常用的方法就是构造三角形，把所求的问题转化到三角形中，然后选择正弦定理、余弦定理加以解决，有的问题与三角函数联系比较密切，要熟练运用有关三角函数公式.

二、正、余弦定理在几何计算问题中的应用规律

1.对于平面图形的计算问题，首先要把所求的量转化到三角形中，然后选用正弦定理、余弦定理解决.构造三角形时，要注意使构造三角形含有尽量多个已知量，这样可以简化运算.

2.对于求平面图形中的最值问题，首先要选用恰当的变量，然后选择正弦定理或余弦定理建立待求量与变量间的函数关系，借助于三角函数的相关知识求最值，有时要用到不等式的均值定理（后面将要学习）求最值.

3.正、余弦定理沟通了三角形中的边与角之间的数量关系，对三角形中的任何元素加以变化，都会引起三角形的形状、大小等的变化，但边角之间仍符合正、余弦定理，所以不论题目如何千变万化，变换条件也好，变换结论也好.甚至在立体几何中的计算问题，只要紧紧抓住正、余弦定理，依托三角恒等变换和代数恒等变换，就可以将复杂问题化为简单问题来计算或证明.

知能自主梳理

三解形面积公式

（1）$S=\frac{1}{2}$________________________；

（2）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}$____________________$=\frac{1}{2}$________________；

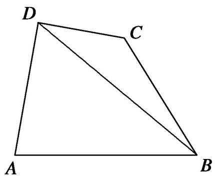
(3) $S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot$ __________________(r 为内切圆半径).

［答案］　（1）底×高　（2）$ac\sin B$　$bc\sin A$　（3）$(a+b+c)$

思路方法技巧

命题方向　利用正、余弦定理求边长

［例 1］　如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$, $AD=10$, $AB=14$, $\angle BDA=60°$，$\angle BCD=135°$，求 BC 的长.



［分析］　本题的图形是由两个三角形组成的四边形，在△ABD 中，已知两边和其中一边的对角，用余弦定理可求出 BD 的长，在△BCD 中，应用正弦定理可求出 BC 的长.

［解析］　在△ABD 中，由余弦定理，

得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$,

设 $BD=x$，则有 $14^2=10^2+x^2-2\times10x\cos60°$，

∴ $x^2-10x-96=0$,

∴ $x_1=16$, $x_2=-6$(舍去)，∴ $BD=16$.

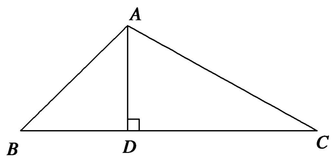
在△BCD 中，由正弦定理知 $\frac{BC}{\sin\angle CDB}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

∴ $BC=\frac{16}{\sin135°}\cdot\sin30°=8\sqrt{2}$.

［说明］ 解决此类问题的关键是将已知条件转化为三角形的边角关系，再利用正、余弦定理求解.

变式应用 1

如图所示，在△ABC 中，已知 $BC=15$, AB：$AC=7$：8, $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，求 BC 边上的高 AD 的长.



［分析］　要求高 AD 的长，可先求 AB 的长，再在 Rt△ADB 中，求出 AD 的长.

［解析］　在△ABC 中，由已知设 $AB=7x$, $AC=8x$, $x>0$，由正弦定理，得 $\frac{7x}{\sin C}=\frac{8x}{\sin B}$，

∴ $\sin C=\frac{7x\sin B}{8x}=\frac{7}{8}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴$\angle C$=60° 或 120° .

若$\angle C$=120° ，由 $8x>7x$，知$\angle B$也为钝角，不合题意，故$\angle C\neq$120° .

∴$\angle C$=60° .

由余弦定理，得（$7x$）^{2}=($8x$) ^{2}+15^2-2×$8x$×15cos60° ，

∴$x^2-8x+15=0$,解得 x=3 或 x=5.

∴AB=21 或 AB=35.

在 Rt△ADB 中，AD=ABsin$B$=$\frac{4\sqrt{3}}{7}AB$ ，

∴AD=12$\sqrt{3}$ 或 20$\sqrt{3}$.

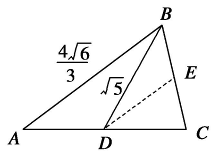
命题方向　利用正、余弦定理求角度问题

［例 2］　在△ABC 中，已知 AB=$\frac{4\sqrt{6}}{3}$,$\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{6}}{6}$,AC 边上的中线 BD=$\sqrt{5}$, 求 sin$A$ 的值.

［分析］　要求 sin$A$ 的值，需根据“D 是 AC 的中点”这个条件，取 BC 的中点 E，连结 DE，则 DE//AB，所以$\angle ABE$+$\angle BED$=180° ，根据题目中的条件 cos$\angle ABC$=$\frac{\sqrt{6}}{6}$, 进而求得 cos$\angle BED$=－$\frac{\sqrt{6}}{6}$. 又由 D E $\frac{1}{2}AB$, 得 $DE=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 在△BDE 中，利用余弦定理可求出 BE，从而 BC 可求. 再在△ABC 中，利用余弦定理可求出 AC，再利用正弦定理即可求出 sin$A$ 的值.

［解析］　如图所示，取 BC 的中点 E，连结 DE，则 DE// AB, 且 DE=

$\frac{1}{2}AB$=$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



∵cos$\angle ABC$=$\frac{\sqrt{6}}{6}$,

∴cos$\angle BED$=-$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

设 $BE=x$, 在△BDE 中，利用余弦定理，

可得 $BD^2=BE^2+ED^2-2BE\cdot ED\cos\angle BED$,

即 $5=x^2+\frac{8}{3}+2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}x$。

解得 x=1 或 x=-$\frac{7}{3}$ （舍去），故 BC=2.

在△ABC 中，利用余弦定理，

可得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$=$\frac{28}{3}$,

即 AC=$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

又 sin$\angle ABC$=$\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\frac{\sqrt{30}}{6}$,

$\therefore \dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2\dfrac{\sqrt{21}}{3}}{\dfrac{\sqrt{30}}{6}}$,$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

［说明］　运用正、余弦定理解决有关问题时，需根据需要作出辅助线构造三角形，再在三角形中运用定理求解.

变式应用 2

在△ABC中，∠A、∠B、∠C所对的边长分别为 a、b、c. 设 a、b、c 满足条件 $b^2+c^2-bc=a^2$ 和 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$，求∠$A$ 和 $\tan B$的值.

［解析］　解法一：由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

因此，∠A=60°.

在△ABC中，∠C=180°−∠A−∠B=120°−∠B.

由正弦定理,得 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin(120°-B)}{\sin B}$

$=\dfrac{\sin 120°\cos B-\cos 120°\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cot B+\dfrac{1}{2}$，

解得 $\cot B=2$，从而 $\tan B=\dfrac{1}{2}$.

解法二：由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

因此，∠A=60°. 由 $b^2+c^2-bc=a^2$, 得 $(\dfrac{a}{b})^2=1+(\dfrac{c}{b})^2-\dfrac{c}{b}=1+\dfrac{1}{4}+\sqrt{3}+3-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}=\dfrac{15}{4}$.

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.　　　　　　　①

由正弦定理，得 $\sin B=\dfrac{b}{a}\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{15}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

由①式可知 $a>b$, 故∠B<∠A, 因此∠B为锐角, 于是 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 从而 $\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{1}{2}$.

探索延拓创新

命题方向　利用正、余弦定理解决平面几何中的面积问题

［例 3］　已知△ABC的角 A、B、C所对的边分别是 a、b、c，设向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$，$\boldsymbol{p}=(b-2,a-2)$.

（1）若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$, 求证：△$ABC$为等腰三角形.

（2）若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{p}$, 边长 c=2, 角 $C=\dfrac{\pi}{3}$，求△ABC的面积.

［分析］　(1) $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}\rightarrow a\sin A=b\sin B\rightarrow$ 由正弦定理得 $a=b\rightarrow$△ABC为等腰三角形

（2）$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{p}\to a+b=ab\to$由余弦定理求出 $ab\to S_{\triangle ABC}$

［解析］　（1）$\because \boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$, $\therefore a\sin A=b\sin B$,

$a\cdot\dfrac{a}{2R}=b\cdot\dfrac{b}{2R}$,其中 R 是三角形 ABC 外接圆半径，

$\therefore a^2=b^2$, $a=b$,

$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2)由题意可知 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}=0$,即 $a(b-2)+b(a-2)=0$.

$\therefore a+b=ab$.

由余弦定理可知，$4=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$,

即$(ab)^2-3ab-4=0$,

$\therefore ab=4$(舍去 $ab=-1$).

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

［说明］　解本题的关键是灵活运用正弦定理、余弦定理和三角形的面积公式，并能熟练地运用公式进行求值.

变式应用 3

（1）在$\triangle ABC$中，若已知三边为连续整数，最大角为钝角，求最大角的余弦.

（2）求以（1）中的最大角为内角，相邻两边之和为 4 的平行四边形的最大面积.

［解析］　（1）设三边长分别为 $a-1, a, a+1$,

由于最大角是钝角，所以$(a-1)^2+a^2-(a+1)^2<0$,

解得 $0<a<4$.又因为 a 为整数，所以 $a=1$ 或 2 或 3.

当 $a=1$ 时，$a-1=0$，不合题意舍去；

当 $a=2$ 时，三边长为 1,2,3，不能构成三角形；

当 $a=3$ 时，三边长为 2,3,4，设最大角为 θ，则

$\cos\theta=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$.

（2）$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

设相邻两边分别为 x, y，则 $x+y=4$.

所以面积 $S=xy\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}xy=\dfrac{\sqrt{15}}{4}x(4-x)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\left[-(x-2)^2+4\right]$.

又因为 $x\in(0,4)$，所以当 $x=2$ 时，S 取得最大值 $\sqrt{15}$

名师辨误做答

［例 4］　$\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是角 A、B、C 的对边，$\cos B=\dfrac{3}{5}, a=7, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-21$，求$\angle C$.

［误解］　$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-B)$

$=-ac\cos B=-\frac{3}{5}ac=-21$,

∴ $ac=35$.

又∵ $a=7$,

∴ $c=5$.

由余弦定理，得 $b^2=49+25-2\times7\times5\times\frac{3}{5}=32$，

∴ $b=4\sqrt{2}$

由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}$.

又∵ $\cos B=\frac{3}{5}$，$B\in(0,\pi)$，

∴ $\sin B=\frac{4}{5}$.

∴ $\sin C=\frac{5\times\frac{4}{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\angle C=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

［辨析］　误解中忽视了 $c<a$ 这一条件，导致错误.

［正解］　∵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-B)$

$=-ac\cos B=-\frac{3}{5}ac=-21$ ∴ $ac=35$.

又∵ $a=7$,

∴ $c=5$.

由余弦定理，得 $b^2=49+25-2\times7\times5\times\frac{3}{5}=32$，

∴ $b=4\sqrt{2}$.

由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}$.

又∵ $\cos B=\frac{3}{5}$，$B\in(0,\pi)$，

∴ $\sin B=\frac{4}{5}$.

∴ $\sin C=\frac{5\times\frac{4}{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又∵c=5, a=7,

∴$c<a$, ∴∠C<∠A,

故∠C为锐角，∴∠C=$\frac{\pi}{4}$.

课堂巩固训练

一、选择题

1.三角形的两边长为 3cm、5cm,其夹角的余弦是方程 $5x^2-7^x-6=0$ 的根，则此三角形的面积是（　　）

A.$6cm^2$　　　　B.$\frac{15}{2}$ cm^2

C.$8cm^2$　　　　D.$10cm^2$

［答案］　A

［解析］　解方程 $5x^2-7x-6=0$,得

$x_1=-\frac{3}{5}$或 $x_2=2$.

由题意，得三角形的两边长为 3cm、5cm,其夹角的余弦为$-\frac{3}{5}$，

∴夹角的正弦为$\frac{4}{2}$，

故三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{1}{2}=6cm^2$.

2.在△ABC中，周长为 7.5 cm,且 sin$A$：sin$B$：sin$C$=4：　5：6,下列结论：

①a：b：c=4：5：6

②a：b：c=2：$\sqrt{5}$：$\sqrt{6}$

③a=2 cm,b=2.5 cm,c=3 cm

④A：B：C=4：5：6

其中成立的个数是（　　）

A.0 个　　　　B.1 个

C.2 个　　　　D.3 个

［答案］　C

［解析］　由正弦定理知 a：b：c=4：5：6,故①对，②错，④错；结合 $a+b+c$=7.5，知 a=2，b=2.5,c=3，∴③对，∴选 C.

3.△ABC中，若∠A=60°，b=16，此三角形面积 $S=220\sqrt{3}$，则 a 的值为（　　）

A.7　　　　B.25

C.55　　　　D.49

［答案］　D

［解析］　由题意，得 $S=220\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times16\times c\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴c=55.

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=16^2+55^2-2\times16\times55\times\dfrac{1}{2}=2401$,

∴$a=49$.

二、填空题

4. 在△ABC中，$a+b=12, A=60°, B=45°$，则 $a=$______________.

［答案］ $36-12\sqrt{6}$

［解析］ 由正弦定理$\dfrac{a}{\sin 60°}=\dfrac{12-a}{\sin 45°}$，

解之得 $a=36-12\sqrt{6}$.

5. 在△ABC中，三个角 A、B、C的对边边长分别为 $a=3, b=4, c=6$，则 $bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C$的值为_______

［答案］ $\dfrac{61}{2}$

［解析］ $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C$

$=bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=\dfrac{3^2+4^2+6^2}{2}=\dfrac{61}{2}$.

三、解答题

6. 在△ABC中，角 A, B, C所对的边分别为 a, b, c，且满足 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$.

（1）求△ABC的面积；

(2)若 $c=1$，求 a 的值.

［解析］ (1)∵$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

∴$\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2}-1=\dfrac{3}{5}$,

∴$\sin A=\dfrac{4}{5}$.

又由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，得 $bc\cos A=3$, ∴$bc=5$.

∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=2$.

（2）由（1）知，$bc=5$, 又 $c=1$,

∴$b=5$,

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+1-2\times5\times1\times\dfrac{3}{5}=20$,

∴$a=2\sqrt{5}$.

课后强化作业

一、选择题

1.已知△ABC周长为20，面积为$10\sqrt{3}$，A=60°，则BC边长为（　　）

A.5　　　　B.6

C.7　　　　D.8

［答案］　C

［解析］　由题设$a+b+c=20$，$\frac{1}{2}bc\sin60°=10\sqrt{3}$，∴$bc=40$.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos60°=(b+c)^2-3bc$

$=(20-a)^2-120$.

∴$a=7$.

2.在△ABC中，已知$B=45°$，$c=2\sqrt{2}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则A的值是（　　）

A.15°　　　　B.75°

C.105°　　　　D.75°或15°

［答案］　D

［解析］　∵$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，∴$\sin C=\frac{c\sin B}{b}$，

$=\frac{2\sqrt{2}\sin45°}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∵$0°<C<180°$. ∴$C=60°$或$120°$，

∴$A=75°$或$15°$.

3.已知锐角三角形ABC中，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，△ABC的面积为$\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值为（　　）

A.2　　　　B.-2

C.4　　　　D.-4

［答案］　A

［解析］　由题意，得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin A$

$=\frac{1}{2}\times4\times1\times\sin A=\sqrt{3}$，

∴$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又∵$A\in(0,\frac{\pi}{2})$，

∴$\cos A=\frac{1}{2}$.

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A=4\times1\times\frac{1}{2}=2$.

4.在△ABC中，$\lg a-\lg b=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，∠$B$为锐角，则∠$A$的值是（　　）

A. 30°　　　　B. 45°

C. 60°　　　　D. 90°

［答案］　A

［解析］　由题意得$\frac{a}{b}=\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又∵∠$B$为锐角，

∴B=45°，又$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin A=\sin B\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$，

∴∠A=30°.

5.在△ABC中，$A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$BC$的长为（　　）

A. $\sqrt{7}$　　　　B. 7

C. $\sqrt{3}$　　　　D. 3

［答案］　C

［解析］　∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$

$=\frac{1}{2}\times2\times AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$AC=1$.

则$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$

$=2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$

∴$BC=\sqrt{3}$，故选C.

6.已知锐角三角形的边长分别为1，3，a，则a的取值范围是（　　）

A.（8，10）　　　　B.（$2\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$）

C.（$2\sqrt{2}$，10）　　　　D.（$\sqrt{10}$，8）

［答案］　B

［解析］　若a是最大边，则$\begin{cases}1+3>a\\1^2+3^2>a^2\end{cases}$

∴$3\leqslant a<\sqrt{10}$.

若3是最大边，则$\begin{cases}1+a>3\\1^2+a^2>3^2\end{cases}$

∴$3>a>\sqrt{8}$，∴$2\sqrt{2}<a<\sqrt{10}$.

7.在△ABC中，若$\sin A$：$\sin B$：$\sin C=k$：$(k+1)$：$2k$，则k的取值范围是（　　）

A.（2，+∞）　　　　B.（-∞，0）

C. $(-\frac{1}{2}, 0)$ 　　　　　　　D. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

［答案］ D

［解析］ 由正弦定理知 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=k:(k+1):2k$,又因为三角形两边之和大于第三边，

$$\therefore \begin{cases} k+(k+1)>2k \\ (k+1)+2k>k \\ k+2k>k+1 \end{cases}$$

所以 $k>\frac{1}{2}$，故选 D.

8.已知 a、b、c 为△ABC 的三个内角 A、B、C 的对边，向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$.若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$,则角 A、B 的大小分别为（　　）

A. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$ 　　　　　　　B. $\frac{2\pi}{6}$，$\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$ 　　　　　　　D. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$

［答案］ C

［解析］ $\because \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

$\therefore \sqrt{3}\cos A-\sin A=0$,

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$,

又$\because 0<A<\pi$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

又$\because a\cos B+b\cos A=c\sin C$,由正弦定理，得

$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin^2 C$,

$\therefore \sin(A+B)=\sin^2 C$,

$\therefore \sin C=\sin^2 C$,

$\because \sin C\neq 0$,

$\therefore \sin C=1$,

$\therefore C=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.

二、填空题

9.在△ABC 中，$a=2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$, $A=45°$，则边 c=______________.

［答案］ $3+\sqrt{3}$

［解析］ 由余弦定理，得

$a^2=c^2+b^2-2cb\cos A$,

$\therefore 12=c^2+6-2\sqrt{6}\,c\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore c^2-2\sqrt{3}\,c-6=0$,

解得 $c=3+\sqrt{3}$.

10. 若 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，则△$ABC$的形状为________________.

［答案］　正三角形

［解析］　解法一:由正弦定理得

$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}$，

即 $\tan A=\tan B=\tan C$,

∵A、B、$C\in(0,\pi)$，∴$A=B=C$,

∴△ABC为等边三角形.

解法二:由正弦定理得 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$,

代入 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$ 得:

$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}$，

由 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$ 得，$\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$,

∴$\sin(A-B)=0$. 又$-\pi<A-B<\pi$.

∴$A-B=0$ 得 $A=B$.

同理得 $B=C$，∴$A=B=C$.

所以△ABC为等边三角形.

11. 在△ABC中，若 $AB=\sqrt{5}$，$AC=5$ 且 $\cos C=\dfrac{9}{10}$，则 $BC=$________________.

［答案］　4 或 5

［解析］　∵$(\sqrt{5})^2=5^2+BC^2-2\times5\times BC\times\dfrac{9}{10}$，∴$BC^2-9BC+20=0$，∴$BC=4$ 或 5.

12. (2011・安徽理，14)已知△ABC的一个内角为 120°，并且三边长构成公差为 4 的等差数列，则△ABC的面积为______________.

［答案］　$15\sqrt{3}$

［解析］　本题主要考查等差数列的概念，余弦定理的应用与三角形的面积公式.

设三角形的三边依次为 $a-4, a, a+4$, 最大角为 θ.

由余弦定理得 $(a+4)^2=a^2+(a-4)^2-2a(a-4)\cos120°$，则 $a=10$,

所以三边长为 6, 10, 14,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 10\times \sin 120°=15\sqrt{3}$.

三、解答题

13.在△ABC中，$BC=a$，$AC=b$，a、b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根，且$2\cos(A+B)=1$.求：(1)角C的度数；(2)AB的长度.

［解析］　(1)$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]$

$=-\cos(A+B)=-\frac{1}{2}$，

∴$C=120°$.

(2)由已知得，$\begin{cases} a+b=2\sqrt{3} \\ ab=2, \end{cases}$

∴$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C$

$=b^2+a^2-2ab\cos 120°$

$=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab$

$=(2\sqrt{3})^2-2=10$，

∴$AB=\sqrt{10}$.

14.在△ABC中，$B=30°$，$c=150$，$b=50\sqrt{3}$，试判断△ABC的形状.

［解析］　由正弦定理，得$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{150\sin 30°}{50\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又∵$c>b$,

∴$C>B$,

∴$C=60°$或$C=120°$.

当$C=60°$时，$A=180°-(30°+60°)=90°$；

当$C=120°$时，$A=180°-(30°+120°)=30°$.

∴△ABC是直角三角形或等腰三角形.

15.在△ABC中，$C-A=\frac{\pi}{2}$，$\sin B=\frac{1}{3}$.

(1)求$\sin A$的值；

(2)设$AC=\sqrt{6}$，求△ABC的面积.

［解析］　(1)由$C-A=\frac{\pi}{2}$和$A+B+C=\pi$，

得$2A=\frac{\pi}{2}-B$, $0<A<\frac{\pi}{4}$.

$\therefore \cos 2A=\sin B$, 即 $1-2\sin^2 A=\frac{1}{3}$,

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）由（1）得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

又由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$,

$\therefore BC=\frac{AC\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{3}}=3\sqrt{2}$.

$\because C-A=\frac{\pi}{2}$, $\therefore C=\frac{\pi}{2}+A$,

$\therefore \sin C=\sin(\frac{\pi}{2}+A)=\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}$.

16. 在△ABC中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，已知 $\cos 2C=-\frac{1}{4}$.

（1）求 $\sin C$ 的值;

(2) 当 $a=2, 2\sin A=\sin C$ 时，求 b 及 c 的长.

［解析］ (1) $\because \cos 2C=1-2\sin^2 C=-\frac{1}{4}$，$0<C<\pi$,

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

(2) 当 $a=2, 2\sin A=\sin C$ 时, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, 得 $c=4$,

由 $\cos 2C=2\cos^2 C-1=-\frac{1}{4}$, 及 $0<C<\pi$ 得

$\cos C=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$.

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得

$b^2\pm\sqrt{6}b-12=0$,

解得 $b=\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{6}$,

所以 $\begin{cases} b=\sqrt{6} \\ c=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=2 \\ c=4 \end{cases}$