教学准备

1. 教学目标

灵活应用等比数列的定义及通项公式;深刻理解等比中项的概念;熟悉等比数列的有关性质,并系统了解判断数列是否是等比数列的方法.通过自主探究、合作交流获得对等比数列性质的认识.充分感受数列是反映现实生活的模型,体会数学是来源于现实生活,并应用于现实生活的,数学是丰富多彩的而不是枯燥无味的,提高学习的兴趣.

2. 教学重点/难点

重点:等比中项的理解与应用

难点:灵活应用等比数列定义、通项公式、性质解决一些相关问题.

3. 教学用具

4. 标签

教学过程

合作学习

一、设计问题,创设情境

首先回忆一下上一节课所学主要内容:

1.等比数列:如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比等于同一常数,那么这个数列叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母 q 表示(q≠0),即:.

2.等比数列的通项公式:.

二、信息交流,揭示规律

1.等比中项:如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成等比数列,那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项.即 G=±(a,b 同号).

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成等比数列,则,反之,若 G2=ab,则,即 a,G,b 成等比数列.

(1)在等比数列{an}中,是否有=an-1an+1(n≥2)?

(2)如果数列{an}中,对于任意的正整数 n(n≥2),都有=an-1an+1,那么{an}一定是等比数列吗?

分析:(1)由{an}是等比数列,知,所以有=an-1an+1(n≥2);

(2)当数列为0,0,0,0,…时,仍有=an-1an+1,而等比数列的任一项都是不为零的,所以不一定;若数列{an}中的每一项均不为零,且=an-1an+1(n≥2,n∈N),则数列{an}是等比数列,反之成立.

2.几个性质

(1)已知a1,a2,a3,…,an是公比为q的等比数列,新数列an,an-1,…,a2,a1也是等比数列吗?

分析:由等比数列的定义可得=…==q.

所以=…=,由此可以看出an,an-1,…,a2,a1是从第2项起,每一项与它的前一项的比值都等于,所以是首项为,公比为的等比数列.

(2)已知无穷等比数列{an}的首项为a1,公比为q.

①依次取出数列{an}的所有奇数项,组成一个新数列,这个数列还是等比数列吗?如果是,它的首项和公比分别是多少?

②数列{can}(其中常数c≠0)是等比数列吗?如果是,它的首项和公比分别是多少?

分析:①由=q,得an+1=anq,

a3=a2q=a1q2,所以=q2;a5=a4q=a3q2,所以=q2;以此类推,可得,=q2,所以数列{an}的所有奇数项组成的数列是首项为,公比为的等比数列.

②因为=…==q,

所以数列{can}(c≠0)是首项为ca1,公比为q的等比数列.

(3)已知数列{an}是等比数列.

①=a3a7是否成立?=a1a9成立吗?

②=an-1an+1(n>1)是否成立?

③=an-kan+k(n>k>0)是否成立?

④在等比数列中,m+n=p+k,am,an,ap,ak有什么关系呢?

分析:①设数列{an}的公比为q,则a3=a1q2,a5=a1q4,

a7=a1q6,q8,a3a7=(a1q2)(a1q6)=q8,

所以=a_3a_7,同理=a_1a_9.

②=$a_{n-1}a_{n+1}(n>1)$成立.

③=$a_{n-k}a_{n+k}(n>k>0)$成立.

④由等比数列定义,得 $a_m=a_1q^{m-1}$,$a_n=a_1q^{n-1}$,$a_p=a_1q^{p-1}$,$a_k=a_1q^{k-1}$,

$a_m \cdot a_n=q^{m+n-2}$,$a_p \cdot a_k=q^{p+k-2}$,则 $a_ma_n=a_pa_k$.

结论:若 $m+n=p+k$,则.

三、运用规律,解决问题

【例 1】等比数列$\{a_n\}$中,

(1)已知 $a_2=4$,$a_5=-$,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)已知 $a_3a_4a_5=8$,求 $a_2a_3a_4a_5a_6$ 的值.

【例 2】如果数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是项数相同的等比数列,那么$\{a_n \cdot b_n\}$也是等比数列.

【例 3】设 a,b,c,d 成等比数列,求证:$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$.

【例 4】若 a, b, c 成等差数列, 且 a+1, b, c 与 a, b, c+2 都成等比数列, 求 b 的值.

四、变式训练, 深化提高

变式训练 1:等比数列{an}中, 若 a7・a12=5, 则 a8・a9・a10・a11=.

变式训练 2:等比数列{an}中, 若 a1+a2+a3=7, a1・a2・a3=8, 则 an=.

变式训练 3:已知数列{an}为等比数列, 且 an>0, a2a4+2a3a5+a4a6=25, 则 a3+a5=.

变式训练 4:三个数成等比数列, 它们的和为 14, 它们的积为 64, 求这三个数.

五、反思小结, 观点提炼

参考答案

一、设计问题,创设情境

1. =q(q≠0)

2. an=・qn-1(a1・q≠0),an=・qn-m(am・q≠0)

二、信息交流,揭示规律

1. ⇒G2=ab⇒G=±

2. (1)an

(2)①a1q2

(3)aman=apak(m,n,p,k∈N*)

三、运用规律,解决问题

【例 1】解:(1)∵a5=a2q5-2,∴q=-.

∴an=a2qn-2=4×.

(2)∵a3a5=,a3a4a5==8,

∴a4=2.

又∵a2a6=a3a5=,

∴a2a3a4a5a6==32.

【例 2】解:设数列{an}的首项是 a1,公比为 q1;数列{bn}的首项为 b1,公比为 q2,那么数列{an・bn}的第 n 项与第 n+1 项分别为 a1・・b1・与 a1・・b1・,即为 a1b1(q1q2)n-1 与 a1b1・(q1q2)n,

因为=q1q2,

它是一个与 n 无关的常数,所以{an・bn}是一个以 a1b1 为首项,以 q1q2 为公比的等比数列.

【例 3】证明:法一:∵a,b,c,d 成等比数列,

∴,

∴b2=ac,c2=bd,ad=bc,

∴左边=b2-2bc+c2+c2-2ac+a2+d2-2bd+b2

=2(b2-ac)+2(c2-bd)+(a2-2bc+d2)

=a2-2ad+d2

=(a-d)2=右边.

证毕.

法二:∵a,b,c,d 成等比数列,设其公比为 q,

则 b=aq,c=aq2,d=aq3,

∴左边=(aq-aq2)2+(aq2-a)2+(aq3-aq)2

=a2-2a2q3+a2q6

=(a-aq3)2,

=(a-d)2=右边

证毕.

【例 4】解:设 a,b,c 分别为 b-d,b,b+d,由已知 b-d+1,b,b+d 与 b-d,b,b+d+2 都成等比数列,有

整理,得

所以 b+d=2b-2d,即 b=3d,

代入①,得 9d2=(3d-d+1)(3d+d),

9d2=(2d+1)·4d,

解之,得 d=4 或 d=0(舍 d=0),

所以 $b=12$.

四、变式训练,深化提高

变式训练 1:解析:因为 $a_7 \cdot a_{12}=a_8 \cdot a_{11}=a_9 \cdot a_{10}$,又 $a_7 \cdot a_{12}=5$,所以 $a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11}=5\times5=25$.

答案:25

变式训练 2:解析:由 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3=8$ 得=8,于是 $a_2=2$ 所以 $a_1 \cdot a_3=4$, ①

由 $a_1+a_2+a_3=7$ 得 $a_1+a_3=5$, ②

由①②解得

当时,$q==2$,$a_n=2n-1$,

当时,$q=$,$a_n=4\times=23-n$.

答案:$2n-1$ 或 $23-n$

变式训练 3:解析:因为 $a_2a_4=a_3a_3=$,$a_4a_6=a_5a_5=$,

所以 $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=+2a_3a_5+=(a_3+a_5)2=25$.

又 $a_n>0$,所以 $a_3+a_5=5$.

答案:5

变式训练 4:解:设这三个数为,a,aq,由题意解得

于是所求的三个数为 2,4,8 或 8,4,2.

五、反思小结,观点提炼

略