

2018~2019学年广东天华南师范大学附属中学、广东省实验中学、广雅中学、深圳中学四校联考高三上学期理科期末数学试卷

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1 已知 $z = \frac{3i}{1-i}$ ，则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为（ ）。

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}i$ D. $\frac{3}{2}i$

2 设 $a > 1 > b > -1$ ， $b \neq 0$ ，则下列不等式中恒成立的是（ ）。

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $a > b^2$ D. $a^2 > 2b$

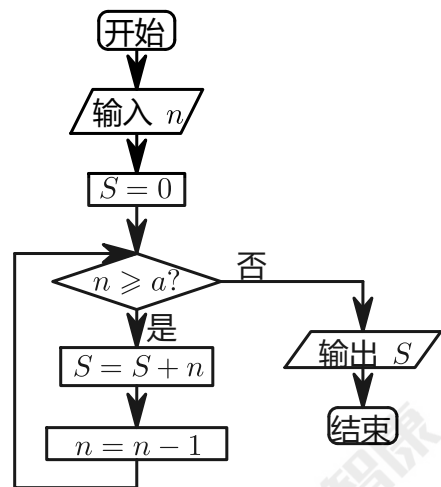
3 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_2 = 2$ ， $a_5 = \frac{1}{4}$ ，则 $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_na_{n+1} =$ （ ）。

- A. $16(1 - 4^{-n})$ B. $16(1 - 2^{-n})$ C. $\frac{32}{3}(1 - 4^{-n})$ D. $\frac{32}{3}(1 - 2^{-n})$

4 祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”。意思是说：两个同高的几何体，如在等高处的截面积恒相等，则体积相等。设 A 、 B 为两个同高处的截面积不恒相等。根据祖暅原理可知， p 是 q 的（ ）。

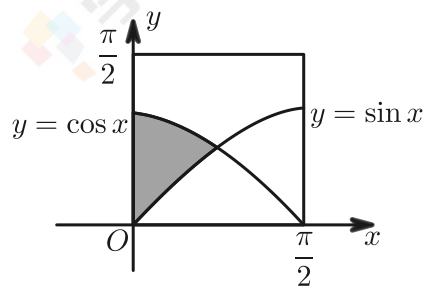
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 即不成分也不必要条件

5 如图是一个算法流程图，若输入 n 的值为13，输出 S 的值是46，则 a 的取值范围是（ ）。



- A. $9 \leq a < 10$ B. $9 < a \leq 10$ C. $10 < a \leq 11$ D. $8 < a \leq 9$

6 如图，在正方形区域内任取一点，则此点取自阴影部分的概率是 () .



- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\frac{4(\sqrt{2} - 1)}{\pi^2}$ C. $\frac{4(\sqrt{2} + 1)}{\pi^2}$ D. $\frac{1}{6}$

7 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, 先将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ (纵坐标不变), 再将得到的图象上所有点向右平移 $\theta (\theta > 0)$ 个单位长度, 得到的图象关于 y 轴对称, 则 θ 的最小值 () .

- A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{18}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

8 $\left(x^2 - 3x + \frac{4}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中常数项为 () .

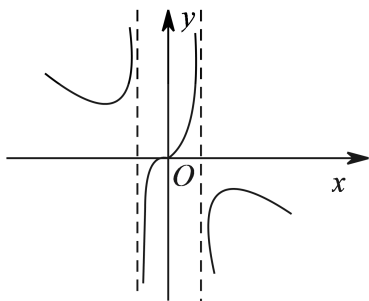
- A. -30 B. 30 C. -25 D. 25

9 已知 P 是边长为 2 的等边三角形 ABC 边 BC 上的动点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 的值 () .

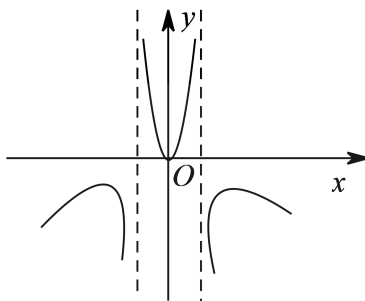
- A. 有最大值 8 B. 是定值 6 C. 有最小值 2 D. 与 P 点的位置有关

10 函数 $f(x) = \frac{x(e^{-x} - e^x)}{4x^2 - 1}$ 的部分图象大致是 () .

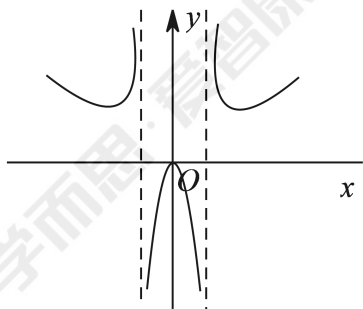
A.



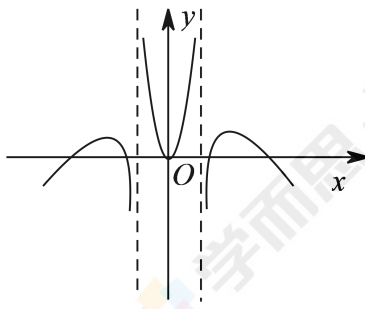
B.



C.



D.



11 设 F_1 、 F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，若直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 上存在点 P ，使线段 PF_1 的中垂线过点 F_2 ，则椭圆离心率的取值范围是 ()

A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

12 已知函数 $f(x) = \sin x - \sin 3x$, $x \in [0, 2\pi]$, 则函数 $f(x)$ 的所有零点之和等于 () .

A. 0

B. 3π

C. 5π

D. 7π

二、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13 已知直线 $ax + y - 1 = 0$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y+a)^2 = 1$ 相交于 A , B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 则实数 a 的值为 _____ .

14 某化肥厂生产甲、乙两种肥料, 生产一车皮甲种肥料需要磷酸盐4吨、硝酸盐18吨; 生产一车皮乙种肥料需要磷酸盐1吨、硝酸盐15吨. 已知生产一车皮甲种肥料产生的利润是10万元, 生产一车皮乙种肥料产生的利润是5万元. 现库存磷酸盐10吨、硝酸盐66吨. 如果该厂合理安排生产计

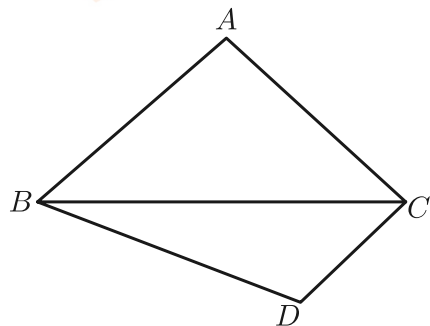
划, 则可以获得的最大利润是 _____.

- 15 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 15$, $a_7 + a_9 = 34$, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $T_n < \frac{a_n + 11}{t}$, 则实数 t 的取值范围为 _____.

- 16 在半径为4的球面上有四点 A, B, C, D , 若 $AB = AC = AD = 4$, 则平面 BCD 被球 O 所截得的图形的面积为 _____.

三、解答题 (本大题共5小题, 共60分)

- 17 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = c(\sin B + \cos B)$.



(1) 求 $\angle ACB$ 的大小.

(2) 若 $\angle ACB = \angle ABC$, 点 A, D 在 BC 的异侧, $DB = 2$, $DC = 1$, 求平行四边形 $ABDC$ 面积的最大值.

- 18 等边三角形 ABC 的边长为3, 点 D, E 分别是边 AB, AC 上的点, 且满足 $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$ (如图1), 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使二面角 $A_1 - DE - B$ 成直二面角, 连结 A_1B, A_1C (如图2).

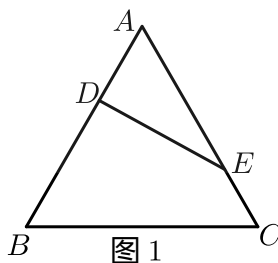


图 1

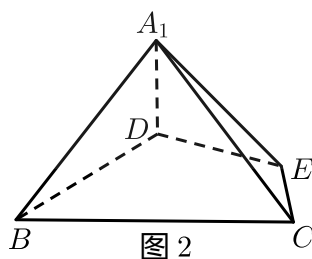


图 2

- (1) 求证: $A_1D \perp$ 平面 $BCED$.
- (2) 在线段 BC 上是否存在点 P , 使直线 PA_1 与平面 A_1BD 所成的角为 60° ? 若存在, 求出 PB 的长; 若不存在, 请说明理由.

19 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 $M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 若不过原点的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 与直线 OM 交于点 N , 并且点 N 是线段 AB 的中点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

20 某工厂共有员工 5000 人, 现从中随机抽取 100 位员工, 对他们每月完成合格产品的件数进行统计, 统计表如下:

每月完成合格产品的件数 (单位: 百件)	(26, 28]	(28, 30]	(30, 32]	(32, 34]	(34, 36]
频数	10	45	35	6	4
男员工人数	7	23	18	1	1

- (1) 工厂规定: 每月完成合格产品的件数超过 3200 件的员工, 会被评为“生产能手”称号. 由以上统计数据填写下面的 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为“生产能手”称号与性别有关?

	非“生产能手”	“生产能手”	合计
男员工			
女员工			
合计			

- (2) 为提高员工劳动的积极性, 该工厂实行累进计件工资制: 规定每月完成合格产品的件数在定额 2600 件以内的 (包括 2600 件), 计件单位为 1 元; 超出 (0, 200] 件的部分, 累进计件单位为 1.2 元; 超出 (200, 400] 件的部分, 累进计件单位为 1.3 元; 超出 400 件以上的部分, 累进计件单价为 1.4 元. 将这 4 段的频率视为相应的概率, 在该厂男员工中随机选取 1 人, 女员工随机选取 2 人进行工资调查, 设实得计件工资 (实得计件工资 = 定额计件工资 + 超定额

计件工资) 超过3100元的人数为 Z , 求 Z 的分布列和数学期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)},$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

21 已知函数 $f(x) = a \ln x - e^x$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 试讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数.
- (2) 若 $a \in \mathbf{N}^*$, 且 $f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的最大值.

参考数据:

x	1.6	1.7	1.74	1.8	10
e^x	4.953	5.474	5.697	6.050	22026
$\ln x$	0.470	0.531	0.554	0.588	2.303

四、选做题 (本大题共2小题, 选做一题计10分)

22 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ (t 为参数, $a > 0$), 以坐标原点为极

点, 以正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$.

- (1) 设 P 是曲线 C 上的一个动点, 当 $a = 2\sqrt{3}$ 时, 求点 P 到直线 l 的距离的最大值.
- (2) 若曲线 C 上所有的点均在直线 l 的右下方, 求 a 的取值范围.

23 已知函数 $f(x) = |x - m| - |2x + 3m|$ ($m > 0$).

- (1) 当 $m = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集.
- (2) 对于任意实数 x, t , 不等式 $f(x) < |2 + t| + |t - 1|$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.