

绵阳市高中 2017 级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

DCABB ADBCD AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2

14. 3.12

15. $\frac{2\pi}{3}$

16. 8

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：（1）由题意得，直方图中第一组，第二组的频率之和为

$$0.04 \times 5 + 0.06 \times 5 = 0.5.$$

所以阅读时间的中位数 $m=10$. ……………4 分

（2）由题意得，男生人数为 45 人，因此女生人数为 55 人，阅读时长大于等于 m 的人数为 $100 \times 0.5 = 50$ 人，

故列联表为如右图： ……………8 分

$$K^2 \text{ 的观测值 } k = \frac{100 \times (25 \times 30 - 25 \times 20)^2}{50 \times 50 \times 45 \times 55} = \frac{100}{99}$$

$$\approx 1.01 < 2.706,$$

	男	女	总计
$t \geq m$	25	25	50
$t < m$	20	30	50
总计	45	55	100

所以不能在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下认为阅读与性别有关. ……12 分

18. 解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q 。

$$\text{由题意，得 } \begin{cases} 2a_1 + d = 0, \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 24. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = -1, \\ d = 2. \end{cases}$$

$\therefore a_n = 2n - 3$. ……………4 分

\therefore 等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数，

$$\text{由 } \begin{cases} b_1 + b_1q = 6, \\ b_1q^2 = 8. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b_1 = 2, \\ q_1 = 2. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b_1 = 18, \\ q_2 = -\frac{2}{3}. \end{cases} \text{ (舍)}$$

$\therefore b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$. ……………7 分

（2）由（1）得， $1 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. ……………9 分

$$T_n = 1 + (1 + b_1) + (1 + b_1 + b_2) + \dots + (1 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1})$$

$$= 1 + (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^n - 1) = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \dots + (2^n - 1)$$

$$= \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2. \text{ ……………12 分}$$

19. 解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得

$$(a+b)(a-b)=c(c+b), \text{ 即 } a^2=b^2+c^2+bc. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{结合 } 0 < A < \pi, \text{ 可知 } A = \frac{2\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} BC \cdot AD, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2} bc = a \cdot AD.$$

$$\text{由已知 } BC = 2\sqrt{3} AD, \text{ 可得 } AD = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore 3bc = a^2. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ,$$

$$\text{即 } 3bc = b^2 + c^2 + bc, \text{ 整理得 } (b-c)^2 = 0, \text{ 即 } b=c,$$

$$\therefore A = B = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore \sin B = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解：（1）设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \mathbf{0}, \text{ 且点 } P(-1, 1), \text{ 得 } x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = -1. \text{ ①}$$

$$\therefore \text{线段 } AB \text{ 的中点坐标为 } (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \text{ 其在椭圆内. } \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1, \\ \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1, \end{cases} \text{ 两式相减得 } \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + y_2^2 - y_1^2 = 0,$$

$$\text{整理得 } \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{将①代入, 得 } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 方程为 } y - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}), \text{ 即 } 2x - 4y - 3 = 0. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ 2x - 4y - 3 = 0, \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 得 } 24y^2 + 24y + 1 = 0,$$

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = -1$, $y_1 y_2 = \frac{1}{24}$.

$$\therefore |AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 设直线 AB 的方程为 $x = ty + 2$. 由题意得 $M(x_1, -y_1)$.

由已知 $\overline{MN} = \lambda \overline{NB}$, 可知 M, N, B 三点共线, 即 $k_{MN} = k_{MB}$.

$$\therefore \frac{0 - (-y_1)}{n - x_1} = \frac{y_2 - (-y_1)}{x_2 - x_1}, \quad \text{即 } \frac{y_1}{n - x_1} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\text{解得 } n = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 + y_1} + x_1. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{将 } x_1 = ty_1 + 2, \quad x_2 = ty_2 + 2, \quad \text{代入得 } n = \frac{2ty_1 y_2}{y_1 + y_2} + 2. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2 = 0, \\ x = ty + 2, \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 得 } (t^2 + 2)y^2 + 4ty + 2 = 0,$$

$$\text{由韦达定理得 } y_1 + y_2 = \frac{-4t}{t^2 + 2}, \quad y_1 y_2 = \frac{2}{t^2 + 2}. \quad \textcircled{3} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

将③代入②得到 $n = 1$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 解: (1) $f'(x) = \frac{2}{x} + x - a = \frac{x^2 - ax + 2}{x} \quad (x > 0). \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $g(x) = x^2 - ax + 2$, 则 $\Delta = a^2 - 8$.

① 当 $a \leq 0$ 或 $\Delta \leq 0$, 即 $a \leq 2\sqrt{2}$ 时, 得 $f'(x) \geq 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

② 当 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta > 0, \end{cases}$ 即 $a > 2\sqrt{2}$ 时,

$$\text{由 } f'(x) > 0, \quad \text{得 } 0 < x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2} \text{ 或 } x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2};$$

$$\text{由 } f'(x) < 0, \quad \text{得 } \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2})$ 和 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2})$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

综上所述，当 $a \leq 2\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；当 $a > 2\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0, \frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 和 $(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}, +\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递减。 6分

(2) 由 (1) 知，当 $a > 2\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 有两极值点 x_1, x_2 (其中 $x_2 > x_1$)，

由 (1) 得 x_1, x_2 为 $g(x) = x^2 - ax + 2 = 0$ 的两根，

于是 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 2$ 。

$$\begin{aligned} \therefore f(x_2) - f(x_1) &= 2\ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - a(x_2 - x_1) \\ &= 2\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = 2\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2} \\ &= 2\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned} \dots\dots\dots 7分$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$ ($t > 1$)，则 $f(x_2) - f(x_1) = h(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}$ 。

$$\therefore h'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{t^2} = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0,$$

$\therefore h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。 9分

由已知 $h(t) = f(x_2) - f(x_1)$ 的最大值为 $2\ln 2 - \frac{3}{2}$ ，

$$\text{而 } h(2) = 2\ln 2 - 2 + \frac{1}{2} = 2\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

$\therefore t = 2$ 。 10分

设 t 的取值集合为 T ，则只要满足 $T \subseteq [2, +\infty)$ 且 T 中的最小元素为 2 的 T 集合均符合题意。

$$\text{又 } \frac{a^2}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = t + \frac{1}{t} + 2 (t \in T), \text{ 易知 } \varphi(x) = t + \frac{1}{t} + 2 \text{ 在 } [2, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

结合 $a > 2\sqrt{2}$ ，可得 a 与 t 是一一对应关系。

而当 $t = 2$ ，即 $\frac{x_2}{x_1} = 2$ 时，联合 $x_1 x_2 = 2$ ，解得 $x_2 = 2, x_1 = 1$ ，进而可得 $a = 3$ 。

\therefore 实数 a 的取值范围为 $[3, +\infty)$ 或 $[3, +\infty)$ 的任意最小元素为 3 的子集。

..... 12分

22. 解：（1）将 C_1 的参数方程化为普通方程为 $(x-1)^2+y^2=r^2$.

由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$

得点 $P(2, \frac{\pi}{3})$ 的直角坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 代入 C_1 , 得 $r^2 = 3,$

\therefore 曲线 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=3$ 3 分

C_2 可化为 $\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 1,$ 即 $\rho^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1$

\therefore 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 1$ 5 分

（2）将点 $A(\rho_1, \alpha), B(\rho_2, \alpha - \frac{\pi}{6})$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程,

得 $\rho_1^2 \cos 2\alpha = 1, \rho_2^2 \cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) = 1,$

$\therefore \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \cos 2\alpha + \cos(2\alpha - \frac{\pi}{3})$

$= \frac{3}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha = \sqrt{3} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}).$ 8 分

由已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4}),$ 可得 $2\alpha + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}),$ 于是 $\sqrt{3} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}].$

所以 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}].$ 10 分

23. 解：（1）由 $a=4$ 时, $\log_{\frac{1}{2}} a = -2.$ 原不等式化为 $|x+1| - |2x-1| \leq -2,$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $x+1-(2x-1) \leq -2,$ 解得 $x \geq 4,$ 综合得 $x \geq 4;$ 3 分

当 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 时, $x+1+2x-1 \leq -2,$ 解得 $x \leq -\frac{2}{3},$ 综合得 $-1 < x \leq -\frac{2}{3};$

当 $x \leq -1$ 时, $-(x+1)+2x-1 \leq -2,$ 解得 $x \leq 0,$ 综合得 $x \leq -1.$ 4 分

\therefore 不等式的解集为 $\{x | x \leq -\frac{2}{3}, \text{ 或 } x \geq 4\}.$ 6 分

(2) 设函数 $f(x) = |x+1| - |2x-1| = \begin{cases} x-2, & x < -1, \\ 3x, & -1 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -x+2, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$

画图可知, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}.$

由 $\frac{3}{2} \leq \log_{\frac{1}{2}} a,$ 解得 $0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$ 10 分