【学习目标】

1. 掌握用综合法证题的思路和特点。

2. 掌握用分析法证题的思路和叙述方式.

3．掌握间接证明中的常用方法 —— 反证法的思维过程和特点.

【要点梳理】

要点一、 综合法证题

1．定义:

一般地， 从命题的已知条件出发，利用公理、已知的定义及定理 等，经过一系列的推理论证，最后推导出所要证明的结论成立，这种证明方法叫做综合法 .

2．综合法的的 基本思路：执因索果

综合法又叫 “ 顺推证法 ” 或 “ 由因导果法 ”. 它是 由已知走向求证,即从数学题的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后导出待证结论或需求的问题.

综合法这种由因导果的证明方法，其逻辑依据是三段论式的演绎推理方法.

3． 综合法的思维框图：

用 P 表示已知条件， Q_i（$i=1, 2, 3, \ldots, n$）为定义、定理、公理等， Q 表示所要证明的结论，则综合法可用框图表示为：

$$\boxed{P\Rightarrow Q_1}\to\boxed{Q_1\Rightarrow Q_2}\to\boxed{Q_2\Rightarrow Q_3}\to\ldots\to\boxed{Q_n\Rightarrow Q}$$

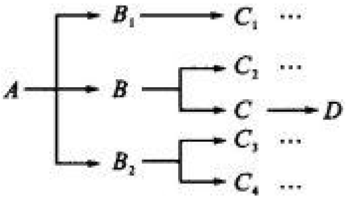
（已知） （逐步推导结论成立的必要条件） （结论）

要点诠释

（ 1 ）从 “ 已知 ” 看 “ 可知 ” ，逐步推出 “ 未知 ” ，由因导果，其逐步推理实际上是寻找它的必要条件；

（ 2 ）用综合法证明不等式，证明步骤严谨，逐层递进，步步为营，条理清晰，形式简洁，宜于表达推理的思维轨迹；

（ 3 ）因用综合法证明命题 “ 若 A 则 D” 的思考过程可表示为：



故要从 A 推理到 D，由 A 推演出的中间结论未必唯一，如 B 、 B1 、 B2 等，可由 B 、 B1 、 B2 进一 步推演出的中间结论则可能更多，如 C 、 C1 、 C2 、 C3 、 C4 等等.

所以如何找到 “ 切入点 ” 和有效的推理途径是有效利用综合法证明问题的 “ 瓶颈 ” .

4 . 综合法证明不等式时常用的不等式

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ （当且仅当 a=b 时取 “=” 号）；

(2) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ （ a ， b ∈ R* ，当且仅当 a=b 时取 “=” 号）；

(3) $a^2\geqslant 0$ ， $|a|\geqslant 0$ ， $(a-b)^2\geqslant 0$ ；

(4) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$ （ a ， b 同号）； $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leq -2$ （ a ， b 异号）；

(5) a ， b ∈ R ， $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}(a+b)^2$ ，

(6) 不等式的性质

定理 1 对称性： $a>b\Leftrightarrow b<a$ 。

定理 2 传递性： $\left.\begin{matrix}a>b\\b>c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a>c$ 。

定理 3 加法性质： $\left.\begin{matrix}a>b\\c\in R\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+c$ 。

推论 $\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$ 。

定理 4　乘法性质：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$。

推论 1　$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$。

推论 2　$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ n\in N^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^n>b^n$。

定理 5　开方性质：$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ n\in N^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

要点二、 分析法证题

1 ．定义：

一般地， 从需要证明的命题出发，分析使这个命题成立的充分条件，逐步寻找使命题成立的充分条件，直至所寻求的充分条件显然成立 （已知条件、定理、定义、公理等） ，或由已知证明成立，从而确定所证的命题成立的一种证明方法， 叫做分析法 .

2 ．分析法的 基本思路：执果索因

分析法又叫 “ 逆推证法 ” 或 “ 执果索因法 ”． 它是从要证明的结论出发， 分析使之成立的条件，即 寻求使每一步成立的充分条件，直到最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定 义、公理等）为止 .

分析法这种执果索因的证明方法，其逻辑依据是三段论式的演绎推理方法。

3 ． 分析法的思维框图：

用 $P_i(i=1,2,3,\cdots)$ 表示已知条件和已有的定义、公理、公式、定理等， Q 所要证明的结论，则用分析法证明可用框图表示为：

$$\boxed{Q\Leftarrow P_1}\to\boxed{P_1\Leftarrow P_2}\to\boxed{P_2\Leftarrow P_3}\to\ldots\to\boxed{\text{得到一个明显成立的条件}}$$

（结论）　　（逐步寻找使结论成立的充分条件）　　（已知）

4 ．分析法的格式：

要证 …… ，只需证 …… ，只需证 …… ，因为 …… 成立，所以原不等式得证。

要点诠释：

（ 1 ）分析法是综合法的逆过程，即从 “ 未知 ” 看 “ 需知 ” ，执果索因，逐步靠拢 “ 已知 ” ，其逐步推理，实际上是寻找它的充分条件．

（ 2 ）由于分析法是逆推证明，故在利用分析法证明时应注意逻辑性与规范性，即分析法有独特的表述．

5 ．综合法与分析法的横向联系

（ 1 ） 综合法是把整个不等式看做一个整体，通过对欲证不等式的分析、观察，选择恰当不等式作为证题的出发点，其难点在于到底从哪个不等式出发合适，这就要求我们不仅要熟悉、正确运用作为定理性质的不等式，还要注意这些不等式进行恰当变形后的利用．

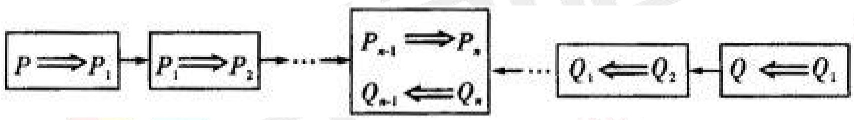
分析法的优点是利于思考，因为它方向明确，思路自然，易于掌握，而综合法的优点是宜于表述，条理清晰，形式简洁．

我们在证明不等式时，常用分析法寻找解题思路，即从结论出发，逐步缩小范围，进而确定我们所需要的 “ 因 ” ，再用综合法有条理地表述证题过程．分析法一般用于综合法难以实施的时候．

（ 2 ） 有些不等式的证明，需要把综合法和分析法联合起来使用：根据条件的结构特点去转化结论，得到中间结论 Q ；根据结论的结构特点去转化条件，得到中间结论 P ．若由 P 可以推出 Q 成立，就可以证明结论成立，这种边分析边综合的证明方法，称之为分析综合法，或称 “ 两头挤法 ” ．

分析综合法充分表明分析与综合之间互为前提、互相渗透、互相转化的辩证统一关系，分析的终点是综合的起点，综合的终点又成为进一步分析的起点．

命题 “ 若 P 则 Q” 的推演过程可表示为：



要点三、 反证法证题

间接证明不是从正面确定命题的真实性，而是证明它的反面为假，或改证它的等价命题为真，间接地达到目的，反证法是间接证明的一种基本方法．

1 ．反证法定义 ：

一般地，首先假设要证明的命题结论不正确，即结论的反面成立，然后利用公理，已知的定义、定理，命题的条件逐步分析，得到和命题的条件或公理、定理、定义及明显成立的事实等矛盾的结论，以此说明假设的结论不成立，从而证明了原命题成立，这样的证明方法叫做反证法 ．

2 ．反证法的基本思路： 假设 —— 矛盾 —— 肯定 ”

① 分清命题的条件和结论.

② 做出与命题结论相矛盾的假设.

③ 由假设出发，结合已知条件，应用演绎推理方法，推出矛盾的结果.

④ 断定产生矛盾结果的原因，在于开始所做的假定不真，于是原结论成立，从而间接地证明原命题为真.

3 ． 反证法的格式：

用反证法证明命题 “ 若 p 则 q” 时，它的全部过程和逻辑根据可以表示如下：

肯定条件p，否定结论q $\xrightarrow{\text{推理}}$ 导致逻辑矛盾 → “若p则¬q”为假命题 → “若p则q”为真命题

要点诠释：

（ 1 ）反证法是间接证明的一种基本方法 .

它是先假设要证的命题不成立，即结论的反面成立，在已知条件和 “ 假设 ” 这个新条件下，通过逻辑推理，得出与定义、公理、定理、已知条件、临时假设等相矛盾的结论，从而判定结论的反面不能成立，即证明了命题的结论一定是正确的 .

(2)　反证法的优点：对原结论否定的假定的提出，相当于增加了一个已知条件 .

4 ． 反证法的一般步骤：

（ 1 ）反设：假设所要证明的结论不成立，假设结论的反面成立；

（ 2 ）归谬：由 “ 反设 ” 出发，通过正确的推理，导出矛盾 —— 与已知条件、已知的公理、定义、定理、反设及明显的事实矛盾或自相矛盾；

（ 3 ）结论：因为推理正确，产生矛盾的原因在于 “ 反设 ” 的谬误，既然结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.

要点诠释：

（ 1 ）结论的反面即结论的否定，要特别注意：

“ 都是 ” 的反面为 “ 不都是 ” ，即 “ 至少有一个不是 ” ，不是 “ 都不是 ” ；

“ 都有 ” 的反面为 “ 不都有 ” ，即 “ 至少有一个没有 ” ，不是 “ 都没有 ” ；

“ 都不是 ” 的反面是 “ 部分是或全部是 ” ，即 “ 至少有一个是 ” ，不是 “ 都是 ” ；

“ 都没有 ” 的反面为 “ 部分有或全部有 ” ，即 “ 至少有一个有 ” ，不是 “ 都有 ”

（ 2 ）归谬的主要类型：

① 与已知条件矛盾；

② 与假设矛盾（自相矛盾）；

③ 与定义、定理、公理、事实矛盾．

5 ．宜用反证法证明的题型：

① 要证的结论与条件之间的联系不明显，直接由条件推出结论的线索不够清晰；比如 “ 存在性问题、唯一性问题 ” 等；

② 如果从正面证明，需要分成多种情形进行分类讨论，而从反面进行证明，只要研究一种或很少的几种情形 ． 比如带有 “ 至少有一个 ” 或 “ 至多有一个 ” 等字样的数学问题 ．

要点诠释：

反证法体现出正难则反的思维策略（补集的思想）和以退为进的思维策略，故在解决某些正面思考难度较大和探索型命题时，有独特的效果．

【典型例题】

【 例题 1 】

类型一、 利用综合法证明有关命题

例 1 ． 如果 a,b 都是正数，且 $a\neq b$，求证： $a^6+b^6>a^4b^2+a^2b^4$．

【思路点拨】当不等式左右结构形式不易直接用公式时，考虑比差法。

【解析】 因为 $a^6+b^6-(a^4b^2+a^2b^4)$

$=a^4(a^2-b^2)+b^4(b^2-a^2)$

$=\left(a^2-b^2\right)(a^4-b^4)$

$=\left(a^2+b^2\right)(a^2-b^2)^2$，

又因为 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$，

所以 $(a^2+b^2)(a^2-b^2)^2>0$，

即 $a^6+b^6>a^4b^2+a^2b^4$.

【总结升华】

比差法属于综合法的一种，利用综合法时，从已知出发，进行运算和推理得到要证明的结论。本题首先做差，然后对差式分解因式，判断各因式的正负，进而判断出差值为正。

举一反三：

【变式 1 】 已知 a ， b 是正数，且 a+b=1 ，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 4$。

【答案】

证法一：∵ a ， b ∈ R ，且 a+b=1 ，

∴ $a+b\ge 2\sqrt{ab}$， ∴ $\sqrt{ab}\le\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}\ge 4$。

证法二：∵ a ， b ∈ R + ， ∴ $a+b=2\sqrt{ab}>0$， $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}>0$，

∴ $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$。

又 a+b=1 ， ∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 4$。

证法三：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1\ge 2+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4$。

当且仅当 a=b 时，取 “=” 号。

【变式 2 】求证： $\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<2$

【答案】

待证不等式的左端是 3 个数和的形式，右端是一常数的形式，而左端 3 个分母的真数相同，由此可联想到公式， $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ 转化成能直接利用对数的运算性质进行化简的形式 .

∵ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ ， ∴ 左边

$=\log_{19}5+2\log_{19}3+3\log_{19}2=\log_{19}5+\log_{19}3^2+\log_{19}2^3=\log_{19}(5\times 3^2\times 2^3)$

$=\log_{19}360$ ∵ $\log_{19}360<\log_{19}361=2$,

∴ $\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<2$.

例 2 . 已知数列 {a n } 中， S n 是它的前 n 项和，并且 S n+1 =4a n +2 （ n=1 ， 2 ， … ）， a 1 =1 。

（ 1 ）设 b n =a n+1 － 2a n （ n=1 ， 2 ， … ），求证：数列 {b n } 是等比数列。

（ 2 ）设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$ （ n=1 ， 2 ， … ）， 求证：数列 {c n} 是等差数列。

【思路点拨】根据等比数列的定义变形。

【解析】（ 1 ） ∵ S n+1 =4a n +2 ， ∴ S n+2 =4a n+1 +2 ，

两式相减，得 S n+2 －S n+1 =4a n+1 －4a n （ n=1 ， 2 ， 3 ， … ） ，

即 a n+2 =4a n+1 －4a n ，变形得 a n+2 －2a n+1 =2(a n+1 －2a n ） 。

∵ b n =a n+1 － 2a n （ n=1 ， 2 ， … ），

∴ b n+1 =2b n （ n=1 ， 2 ， … ）。

由此可知，数列 {b n } 是公比为 2 的等比数列。

由 S 2 =a 1 +a 2 =4a 1 +2 ， a 1 =1 ，

得 $a_2=5$，$b_1=a_2-2a_1=3$。故 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$。

（2）∵ $c_n=\frac{a_n}{2^n}$（n=1，2，…）

∴ $c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}$

将 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$ 代入，得 $c_{n+1}-c_n=\frac{3}{4}$（n=1，2，…）。

由此可知，数列 $\{c_n\}$ 是公差 $d=\frac{3}{4}$ 的等差数列，它的首项 $c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，故 $c_n=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$。

【总结升华】 本题从已知条件入手，分析数列间的相互关系，合理实现了数列间的转化，从而使问题获解，综合法是直接证明中最常用的证明方法。

举一反三：

【变式 1】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$， $a_2=5$， $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}(n\geq 2)$.

求证：$\{a_{n+1}+2a_n\}$ 是等比数列；

【答案】 由 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$，$a_{n+1}+2a_n=3(a_n+2a_{n-1})$ $(n\geqslant 2)$

∵ $a_1=5$，$a_2=5$ ∴ $a_2+2a_1=15$

故数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ 是以 15 为首项，3 为公比的等比数列

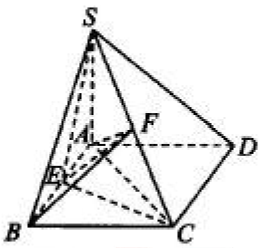
【变式 2】 在 △ABC 中，若 $a^2=b(b+c)$，求证：A=2B。

【答案】

∵ $a^2=b(b+c)$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b^2+bc)}{2bc}$，

又 $\cos^2 B=2\cos^2 B-1=2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2-1=2\left(\frac{b+c}{2a}\right)^2-1$

$=\frac{(b+c)^2-2b^2-2bc}{2b(b+c)}=\frac{c-b}{2b}$ ， ∴ cosA=cos2B 。



又 A 、 B 是三角形的内角，故 A=2B 。

例 3. 如图所示,在四棱锥 S—ABCD 中,底面 ABCD 是正方形，SA 平面 ABCD ，且 SA=AB ，点 E 为 AB 的中点，点 F 为 SC 的中点.

求证：（ 1 ） EF ⊥ CD ； （ 2 ）平面 SCD ⊥ 平面 SCE .

【解析】 （ 1 ） ∵ SA ⊥ 平面 ABCD ， F 为 SC 的中点，

∴ AF 为 Rt △ SAC 斜边 SC 上的中线。 ∴ $AF=\frac{1}{2}SC$ 。

又 ∵ 四边形 ABCD 是正方形， ∴ CB ⊥ AB 。

而由 SA ⊥ 平面 ABCD ，得 CB ⊥ SA ， ∴ CB ⊥ 平面 SAB 。

又 ∵ SB ⊂平面 SAB ， ∴ CB ⊥ SB 。

∴ BF 为 Rt △ SBC 的斜边 SC 上的中线， ∴ $BF=\frac{1}{2}SC$ 。

∴ AF=BF ， ∴△ AFB 为等腰三角形。

又 E 为 AB 的中点， ∴ EF ⊥ AB 。

又 CD // AB ， ∴ EF ⊥ CD 。

（ 2 ）由已知易得 Rt △ SAE ≌ Rt △ CBE ，

SE=EC ，即 △ SEC 是等腰三角形， ∴ EF ⊥ SC 。

又 ∵ EF ⊥ CD 且 SC∩CD=C ， ∴ EF ⊥ 平面 SCD 。

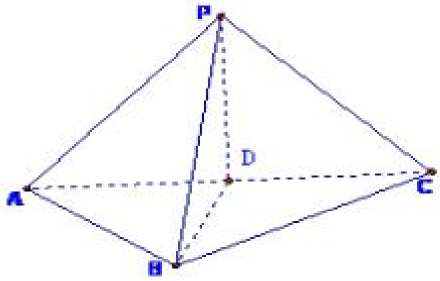
又 EF $\subset$平面 SCE ， ∴ 平面 SCD ⊥ 平面 SCE 。

【总结升华】 利用综合法证明立体几何中线线、线面和面面关系的关键在于熟练地运用判定定理和性质定理。

举一反三：

【变式】 如图，设在四面体 $PABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$， $PA=PB=PC$， D 是 AC 的中点 .

求证： PD 垂直于 ΔABC 所在的平面 .



【答案】

连 PD、 BD

因为 BD 是 $Rt\Delta ABC$ 斜边上的中线，

所以 $DA=DC=DB$

又因为 $PA=PB=PC$， 而 PD 是 ΔPAD 、 ΔPBD 、 ΔPCD 的公共边，

所以 $\Delta PAD\cong\Delta PBD\cong\Delta PCD$

于是 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC$，

而 $\angle PDA=\angle PDC=90^\circ$，因此 $\angle PDB=90^\circ$

∴ $PD\perp AC$， $PD\perp BD$

由此可知 PD 垂直于 ΔABC 所在的平面 .

类型二、 利用分析法证明有关命题

例 4 . 求证: $\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{4}+\sqrt{5}$.

【解析】

错证: 由不等式 $\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{4}+\sqrt{5}$, ①

平方得 $9+6\sqrt{2}<9+4\sqrt{5}$, ②

即 $3\sqrt{2}<2\sqrt{5}$, ③

则 18 ＜ 20 , ④

因为 18 ＜ 20 ,所以 $\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{4}+\sqrt{5}$.

错因: 由于上述分析法的流程结构是 ① ⇒② ⇒③ ⇒④ ,
因而上述书写格式导致了逻辑错误.

正确的证法如下:

欲证不等式 $\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{4}+\sqrt{5}$,

只需证 $3+2\sqrt{18}+6<4+2\sqrt{20}+5$ 成立,

即证 $\sqrt{18}<\sqrt{20}$,

即证 18 ＜ 20 成立.

由于 18 ＜ 20 是成立的,

因此 $\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{4}+\sqrt{5}$. 证毕.

【总结升华】

1. 在证明过程中,若使用综合法出现困难时,应及时调整思路,分析一下要证明结论成立需要怎样的充分条件是明智之举 . 从结论出发,结合已知条件,逐步反推,寻找使当前命题成立的充分条件的方法 .

2. 用分析法证明问题时，一定要恰当地用好 “ 要证 ” “ 只需证 ” “ 即证 ” “ 也即证 ” 等词语.

举一反三:

【变式 1 】设 $a>0$ 、 $b>0$，且 $a\neq b$，用分析法证明: $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

【答案】

要证 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$ 成立，

只需证 $a^3+b^3-a^2b-ab^2>0$ 成立，

即证 $a^2(a-b)+b^2(b-a)>0$ 成立，

即证 $(a^2-b^2)(a-b)>0$ 成立，

也就是要证 $(a+b)(a-b)^2>0$ 成立，

因为 $a>0$ 、 $b>0$，且 $a\neq b$，

所以 $(a+b)(a-b)^2>0$ 显然成立，由此原不等式得证 .

【变式 2 】 设 a ， b ， c ， d ∈ R ，求证: $ac+bc\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

【答案】

当 ac+bc≤0 时，不等式显然成立。

当 ac+bd ＞ 0 时，要证明 $ac+bd\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$ ，

只需证明 $(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ ，

即证明 $a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leq a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$ ，

只需证明 $2abcd\leq a^2d^2+b^2c^2$ ，

只需证明 $(ad-bc)^2\geq0$ 。

而上式成立， ∴ $ac+bd\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$ 成立。

【变式 3 】 求证： $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}(a\geq 3)$

【答案】分析法：

要证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}(a\geq 3)$ 成立，

只需证明 $\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}(a\geq 3)$，

两边平方得 $2a-3+2\sqrt{a(a-3)}<2a-3+2\sqrt{(a-2)(a-1)}\ (a\geq 3)$，

所以只需证明 $\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-2)(a-1)}\ (a\geq 3)$，

两边平方得 $a^2-3a<a^2-3a+2$，

即 $0<2$，

∵ $0<2$ 恒成立，

∴ 原不等式得证 .

例 5. 例 5. 若 a, b, c 是不全相等的正数，求证： lg $\frac{a+b}{2}$ + lg $\frac{b+c}{2}$ + lg $\frac{c+a}{2}$ ＞ lga+lgb+lgc 。

【思路点拨】注意到不等式左右两边均为和式结构，考虑用若干次均值不等式后相加。

【解析】要证 lg $\frac{a+b}{2}$ + lg $\frac{b+c}{2}$ + lg $\frac{c+a}{2}$ ＞ lga+lgb+lgc ，

只需证 lg $\frac{a+b}{2}$ • $\frac{b+c}{2}$ • $\frac{c+a}{2}$ >lg （ a•b•c ），

只需证 $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$ ＞ abc 。

但是，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}>0$，$\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}>0$，$\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ac}>0$。

且上述三式中的等号不全成立，所以，

$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$ ＞ abc 。

因此 lg $\frac{a+b}{2}$ + lg $\frac{b+c}{2}$ + lg $\frac{c+a}{2}$ ＞ lga+lgb+lgc 。

【总结升华】这个证明中的前半部分用的是分析法，后半部分用的是综合法。

在实际证题过程中，分析法与综合法是统一运用的，把分析法和综合法孤立起来运用是脱离实际的。没有分析就没有综合；没有综合也没有分析。问题仅在于，在构建命题的证明路径时，有时分析法居主导地位，综合法伴随着它；有时却刚刚相反，是综合法导主导地位，而分析法伴随着它。

举一反三：

【变式 1 】设 a 、 b 是两个正实数，且 a≠b ，求证：a^3 ＋ b^3 ＞ a^2b+ab^2

【答案】

证明一： （ 分析法 ）

要证 a^3 + b^3 ＞ a^2b+ab^2 成立，

只需证 (a+b)(a^2-ab+ b^2) ＞ ab(a+b) 成立，

即需证 a^2-ab+ b^2 ＞ ab 成立。 （ ∵ a+b ＞ 0)

只需证 a^2-2ab+ b^2 ＞ 0 成立，

即需证 $(a-b)^2$ ＞ 0 成立。

而由已知条件可知， a≠b ，有 a-b≠0 ，所以 $(a-b)^2$ ＞ 0 显然成立，由此命题得证。

证明二：（ 综合法 ）

∵ a≠b ， ∴ a-b≠0 ， ∴ $(a-b)^2$ ＞ 0 ，即 a^2-2ab+ b^2 ＞ 0

亦即 a^2-ab+ b^2 ＞ ab

由题设条件知， a+b ＞ 0 ， ∴ (a+b)(a^2-ab+ b^2) ＞ (a+b)ab

即 a^3 + b^3 ＞ a^2b+ab^2，由此命题得证。

【变式 2 】 ΔABC 的三个内角 A,B,C 成等差数列，求证： $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$

【答案】要证原式成立，只要证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，

即只要证 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$

即只要证 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=1$；

而 $A+C=2B$，所以 $B=60^0$，

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-ac$

所以 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc}=1$.

【 直接证明与间接证明 401471 例题 2 】

【变式 3 】已知 $a>b>0$，求证：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$

要证 $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$

只需证 $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2}<\frac{(a-b)^2}{8b}$，

$\because a>b>0$， $\therefore$ 只需证 $\frac{a-b}{2\sqrt{2a}}<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}<\frac{a-b}{2\sqrt{2b}}$，即 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

欲证 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1$，只需证 $\sqrt{a}+\sqrt{b}<2\sqrt{a}$，即 $\sqrt{b}<\sqrt{a}$ 显然成立。

欲证 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}>1$，只需证 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>2\sqrt{b}$，即 $\sqrt{b}<\sqrt{a}$ 显然成立。

$\therefore \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$ 成立，且以上各步都可逆，故原不等式成立。

类型三、反证法证明相关问题

例 6 ． 证明 $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ 不可能成等差数列.

【思路点拨】证明含有 “ 不 ”“ 没有 ”“ 无 ” 等否定性词语的命题，应考虑反证法。

【解析】（一）：假设 $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ 成等差数列，即 $\sqrt{3}+\sqrt{7}=2\sqrt{5}$，下面用分析法证明。

要证 $\sqrt{3}+\sqrt{7}\neq 2\sqrt{5}$，

只需证 $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\neq(2\sqrt{5})^2$，

即证 $2\sqrt{21}\neq 10$，即证 $\sqrt{21}\neq 5$，

即证 $21\neq 25$，而该式显然成立，

故 $\sqrt{3}+\sqrt{7}\neq 2\sqrt{5}$，这与假设相矛盾，

所以假设不成立，从而 $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ 不成等差数列.

（二）：假设 $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ 成等差数列，即 $\sqrt{3}+\sqrt{7}=2\sqrt{5}$，下面用综合法证明.

$\because 21\neq 25$， $\therefore \sqrt{21}\neq 5$， $\therefore 2\sqrt{21}\neq 10$，

即 $3+2\sqrt{21}+7\neq 20$，

即 $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\neq (2\sqrt{5})$，

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{7}\neq 2\sqrt{5}$，这与假设相矛盾，

故假设不成立，从而 $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ 不成等差数列.

【总结升华】

结论中含有 “ 不是 ”“ 不可能 ”“ 不存在 ” 等词语的命题，此类问题的反面比较具体，适宜应用反证法.

举一反三：

【变式 1 】 已知 a 、 b 、 c 成等差数列且公差 $d\neq 0$，求证：$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$ 不可能成等差数列

【答案】 ∵ a 、 b 、 c 成等差数列，$\therefore 2b=a+c$

假设 $\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$ 成等差数列，则 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\Rightarrow(a+c)^2=4ac\Rightarrow(a-c)^2=0$，

$\therefore a=c$ 从而 $d=0$ 与 $d\neq0$ 矛盾，$\therefore\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$ 不可能成等差数列

【变式 2 】

设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，S_n 为它的前 n 项和.

（ 1 ）求证：数列 $\{S_n\}$ 不是等比数列.

（ 2 ）数列 $\{S_n\}$ 是等差数列吗？为什么？

【答案】

假设 $\{S_n\}$ 是等比数列，则 $S_2^2=S_1S_3$，

即 $a_1^2(1+q)^2=a_1\cdot a_1(1+q+q^2)$.

∵ $a_1\neq0$，∴ $(1+q)^2=1+q+q^2$.

即 $q=0$，与等比数列中公比 $q\neq0$ 矛盾.

故 $\{S_n\}$ 不是等比数列.

（ 2 ）解： ① 当 $q=1$ 时， $S_n=na_1$， $n\in N^*$，数列 $\{S_n\}$ 是等差数列.

② 当 $q\neq1$ 时， $\{S_n\}$ 不是等差数列，下面用反证法证明：

假设数列 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 S_1， S_2， S_3 成等差数列，即 $2S_2=S_1+S_3$，

∴ $2a_1(1+q)=a_1+a_1(1+q+q^2)$.

∵ $a_1\neq0$， ∴ $2+2q=1+1+q+q^2$，得 $q=q^2$.

∵ $q\neq1$， ∴ $q=0$，这与等比数列中公比 $q\neq0$ 矛盾.

从而当 $q\neq1$ 时， $\{S_n\}$ 不是等差数列.

综上 ①② 可知，当 $q=1$ 时，数列 $\{S_n\}$ 是等差数列；当 $q\neq1$ 时，数列 $\{S_n\}$ 不是等差数列.

例 7. 若 a、b、c 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$a=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$. 求证：a、b、c 中 至少有一个大于 0.

【思路点拨】 “ 至多 ” 或 “ 至少 ” 语句的证明宜用反证法。

【解析】 设 a、b、c 都不大于 0 ，则 $a\le 0$、$b\le 0$、$c\le 0$，

所以 $a+b+c\le 0$.

而 $a+b+c=(x^2-2y+\frac{\pi}{2})+(y^2-2z+\frac{\pi}{3})+(z^2-2x+\frac{\pi}{6})$

$=(x^2-2x)+(y^2-2y)+(z^2-2z)+\pi$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$，

所以 $a+b+c>0$，这与 $a+b+c\le 0$ 矛盾，

故 a、b、c 中至少有一个大于 0.

【总结升华】从正面证明，需要分成多种情形进行分类讨论，而从反面进行证明，只要研究一种或很少的几种情形的问题多用反证法 . 比如这类带有 “ 至少有一个 ” 等字样的数学问题 .

举一反三：

【变式】

已知 $a,b,c\in R,a+b+c=0,abc=1$，求证：a,b,c 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$.

【答案】

假设 a,b,c 都小于或等于 $\frac{3}{2}$，

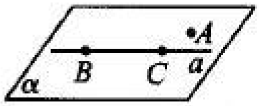
因为 $abc=1$，所以 a,b,c 三者同为正或一正两负，

又因为 $a+b+c=0$，所以 a,b,c 三者中有两负一正，

不妨设 $a>0,b<0,c<0$，则 $b+c=-a,bc=\frac{1}{a}$

由均值不等式得 $-(b+c)\geq 2\sqrt{bc}$，即 $a\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}}$，

解得 $a\geq\sqrt[3]{4}\geq\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$，与假设矛盾，所以 a,b,c 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$.



例 8 ． 已知：直线 a 以及 A $\notin$a ．

求证：经过直线 a 和点 A 有且只有一个平面.

【解析】

（ 1 ） “ 存在性 ” ，在直线 a 上任取两点 B 、 C ，如图.

∵ A $\notin$a ， B ∈ a ， C ∈ a ， ∴ A 、 B 、 C 三点不在同一直线上.

∴ 过 A 、 B 、 C 三点有且只有一个平面 α

∵ B ∈ α， C ∈ α， ∴ a $\subset\alpha$，即过直线 a 和点 A 有一个平面 α.

（ 2 ） “ 唯一性 ” ，假设过直线 a 和点 A 还有一个平面 β ．

∵ A $\notin$a ， B ∈ a ， C ∈ a ， ∴ B ∈ β， C ∈ β.

∴ 过不共线的三点 A 、 B 、 C 有两个平面 α、 β，这与公理矛盾.

∴ 假设不成立，即过直线 a 和点 A 不可能还有另一个平面 β，而只能有一个平面 α。

【总结升华】 这里证明 “ 唯一性 ” 时用了反证法.对于 “ 唯一性 ” 问题往往使用反证法进行证明，要注意与 “ 同一法 ” 的区别与联系.

举一反三：

【变式】 求证：两条相交直线有且只有一个交点.

【答案】假设结论不成立，即有两种可能：

（ 1 ）若直线 a 、 b 无交点，那么 a ∥ b ，与已知矛盾；

（ 2 ）若直线 a 、 b 不止有一个交点，则至少有两个交点 A 和 B ，这样同时经过点 A 、 B 就有两条直线，这与 “ 经过两点有且只有一条直线 ” 相矛盾．

综上所述，两条相交直线有且只有一个交点．

【 直接证明与间接证明 401471 例题 6 】

【变式 2 】证明：函数 $f(x)=\sin x$ 的最小正周期为 2π．

【答案】对任意实数 x，由于 x 与 $x+2\pi$ 的终边重合，根据正弦函数的定义

可知 $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$，

所以 2π 是函数 $f(x)=\sin x$ 的周期．

下面证明 2π 是最小的正数周期．假设存在实数 T，满足 $0<T<2\pi$，

且 $f(x+T)=f(x)$ 对任意实数 x 都成立，则

当 $x=0$ 时，有 $f(0+T)=\sin(0+T)=\sin T=f(0)=\sin 0=0$，

因为 $0<T<2\pi$，所以 $T=\pi$．

又当 $T=\pi$ 时，因为 $f(\frac{\pi}{6}+T)=f(\frac{7\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，而

$f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $f(\frac{\pi}{6}+\pi)\neq f(\frac{\pi}{6})$，从而 $T=\pi$ 不是周期，

与假设矛盾．从而不存在比 2π 小的实数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，

从而 2π 是最小正周期．