南京市、盐城市2019届高三年级第二次模拟考试

数学

2019.03

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分，不需写出解答过程，请把答案写在答题卡的指定位置上。

1. 已知集合 $A=\{x|1<x<3\},B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$ __________.

【答案】$\{x|1<x<4\}$

【解析】画数轴可得。

【点评】考察集合并集，属于简单题。

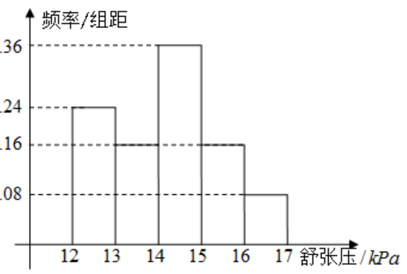
2. 若复数 z 满足 $\dfrac{z}{a+2i}=i$（i 为虚数单位），且实部和虚部相等，则实数 a 的值为 __________.

【答案】-2

【解析】$z=i\left(a+2i\right)=ai-2,a=-2$

【点评】复数，简单题

3. 某药厂选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为 $[12,13),[13,14),[14,15),[15,16),[16,17]$，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，……，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图.已知第一组与第二组共有 20 人，则第三组中人数为 __________.



【答案】18

【解析】$1\times\left(0.24+0.16\right)=0.4$，总人数：$20\div0.4=50$（人），第三组：$50\times0.36=18$

【点评】考察频率分布直方图，属于简单题。

4. 右图是某算法的伪代码，输出的结果 S 的值为 __________.

```
i ← 1
S ← 1
While  i < 6
  i ← i + 2
  S ← i + S
End  While
Print  S
```

【答案】16

【解析】$\begin{array}{l} i=1,s=1 \\ i=3,s=4 \\ i=5,s=9 \\ i=7,s=16 \end{array}$

【点评】考察算法流程图，属于简单题。

5. 现有 5 件相同的产品，其中 3 件合格，2 件不合格，从中随机抽检 2 件，则一件合格，另一件不合格的概率为 __________.

【答案】$\dfrac{3}{5}$

【解析】$P=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3\times 2}{10}=\dfrac{3}{5}$

【点评】考察排列组合与概率，属于简单题。

6. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=10$，前 12 项的和$S_{12}=90$，则a_{18}的值为 __________.

【答案】-4

【解析】$S_{12}=(a_4+a_9)\times 6\Rightarrow a_9=5\Rightarrow d=-1\Rightarrow a_{18}=-4$

【点评】考察等差数列，属于简单题。

7. 在平面直角坐标系xOy中，已知点A是抛物线$y^2=4x$与双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一个交点，若抛物线的焦点为$F$,且$FA=5$,则双曲线的渐近线方程为 ____________.

【答案】$y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$

【解析】做A到准线的垂线段AH，易得$AH=AF=5$，可求得A点坐标$(4,4)$或$(4,-4)$，将坐标代入双曲线方程可求得b^2及渐近线方程。

【点评】考察抛物线性质与双曲线的渐近线，属于简单题

8. 若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图像经过点 $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$，且相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$，则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 ___________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，求得 $\omega=2$，再代入点 $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ 的坐标，求得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，得解。

【点评】考察三角函数平移变换，属于基础题型。

9. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长都相等，高为 $\sqrt{2}$，则该正四棱锥的表面积为 ______.

【答案】$4\sqrt{3}+4$

【解析】设棱长为 l，高为 h，正四棱锥中，$\frac{l}{h}=\sqrt{2}$，所以 $l=2$，

则 $S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}+4=4\sqrt{3}+4$

【点评】考察正四棱锥棱长与高的关系，及表面积公式，属于基础题

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-5x$，则不等式 $f(x-1)>f(x)$ 的解集为 ___________

【答案】$(-2,3)$

【解析】由题意，得 $f(x)$ 在 $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ 上单调减，在 $(-5,0)$ 上关于 $x=-\frac{5}{2}$ 对称，在 $(0,5)$ 上关于 $x=\frac{5}{2}$ 对称，所以 $-3<x-1<2$，则 $-2<x<3$

【点评】考察函数的奇偶性，单调性，需要结合图像进行求解

11.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-1,0)$，$B(5,0)$.若圆 $M:(x-4)^2+(y-m)^2=4$ 上存在唯一点 P，使得直线 PA，PB 在 y 轴上的截距之积为 5，则实数 m 的值为______▲______.

【答案】$\pm\sqrt{21}$ 或 $\pm\sqrt{3}$

【解析】设点 $P(x_0,y_0)$，则 $PA:y=\frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，在 y 轴截距为 $\frac{y_0}{x_0+1}$，同理得 PB 在 y 轴截距为 $-\frac{5y_0}{x_0-5}$，由截距之积为 5，得 $(x_0-2)^2+y_0^2=9$，由题意 P 的轨迹应与圆 M 恰有一个交点，若 A、B 不在圆 M 上，所以圆心距等于半径之和或差，$\sqrt{2^2+m^2}=5$，解得 $m=\pm\sqrt{21}$；

或 $\sqrt{2^2+m^2}=1$，无解；若若 A、B 在圆 M 上，解得 $m=\pm\sqrt{3}$，经检验成立。

【点评】考察隐形圆，圆与圆之间的位置关系，难度中等

12.已知 AD 是直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的高，点 P 在 DA 的延长线上，且满足 $(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\bullet\overrightarrow{AD}=4\sqrt{2}$.若 $AD=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}$ 的值为____▲____.

【答案】2

【解析】取 BC 中点为 E，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AD}=2\sqrt{2}$，所以 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=2$，

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB})(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{AD}^2=2$$

【点评】考察向量的平行四边形法则，数量积的投影法，直角三角形斜边上的高与斜边两部分乘积的关系

13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+3|, x\le 0\\ x^3-12x+3, x>0\end{cases}$.设 $g(x)=kx+1$，且函数 $y=f(x)-g(x)$ 的图像经过四个象限，则实数 k 的取值范围为____▲____.

【答案】 $k\in\left(-9,\dfrac{1}{3}\right)$

【考点】函数的图像，数形结合思想，切线问题。

【解析】可根据函数解析式画出函数图像，$f(x)=x^3-12x+3$，$x>0$，$f'(x)=3x^2-12$，可知 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 单调递减，$(2,+\infty)$ 单调递增，且 $f(2)<0$，$g(x)=kx+1$ 恒过 $(0,1)$，若要使 $y=f(x)-g(x)$ 经过四个象限，由图可知只需 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 分别有交点即可；

$k>0$ 时，在 $(-\infty,0)$ 区间内，需满足 $k\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$；

$k<0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内，只需求过定点 $(0,1)$ 在函数图像的切线即可，经计算可知此时 $k\in(-9,0)$；

$k=0$ 符合题意；

综上可知，$k\in\left(-9,\dfrac{1}{3}\right)$

14.在 ΔABC 中，若 $\sin C=2\cos A\cos B$，则 $\cos^2 A+\cos^2 B$ 的最大值为____▲____.

【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

【解析】

$\sin C=2\cos A\cos B$， $\sin(A+B)=2\cos A\cos B$

$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\cos A\cos B$

$\tan A+\tan B=2$

$$\cos^2 A+\cos^2 B=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 B+\cos^2 B}=\frac{1}{\tan^2 A+1}+\frac{1}{\tan^2 B+1}$$

$$=\frac{\tan^2 A+\tan^2 B+2}{(\tan A\tan B)^2+\tan^2 A+\tan^2 B+1}=\frac{(\tan A+\tan B)^2-2\tan A\tan B+2}{(\tan A\tan B)^2+(\tan A+\tan B)^2-2\tan A\tan B+1}$$

$$=\frac{6-2\tan A\tan B}{(\tan A\tan B)^2-2\tan A\tan B+5}$$

分母 $(\tan A\tan B)^2-2\tan A\tan B+5>0$， 令 $6-2\tan A\tan B=t(t>0)$

$\cos^2 A+\cos^2 B=\dfrac{4t}{t^2-8t+32}=\dfrac{4}{t+\dfrac{32}{t}-8}\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$（当且仅当“$t=4\sqrt{2}$”时取等）

【点评】本题属于综合题，涉及知识点较多，包括三角恒等式，同角三角函数关系，基本不等式，常见的 1 的转化，配方法和换元法等，较难。

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题卡的指定区域内.

15.（本小题满分 14 分）

设向量 $\vec{a}=(\cos\alpha,\lambda\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 $\lambda>0$，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直.

（1）求实数 λ 的值；

（2）若 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\dfrac{4}{5}$，且 $\tan\beta=2$，求 $\tan\alpha$ 的值.

【解析】解：（1）

$\because(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$

$\therefore(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\vec{a}^2-\vec{b}^2=0,$

$\therefore\cos^2\alpha+\lambda^2\sin^2\alpha-(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=0,$

$\cos^2\alpha+\lambda^2\sin^2\alpha-1=0,$

$\lambda^2\sin^2\alpha+(\cos^2\alpha-1)=0,$

$\lambda^2\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=0,$

$(\lambda^2-1)\sin^2\alpha=0,$

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\therefore\sin\alpha\ne0,\therefore\lambda^2-1=0,$

$\therefore\lambda=\pm1,$

$\because\lambda>0,\therefore\lambda=1$

(2) $\lambda=1$ 时，$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$

$\because 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-\frac{3}{4}$

$\therefore \tan\alpha=\tan(\alpha-\beta+\beta)=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{-\frac{3}{4}+2}{1-(-\frac{3}{4})+2}=\frac{1}{2}$

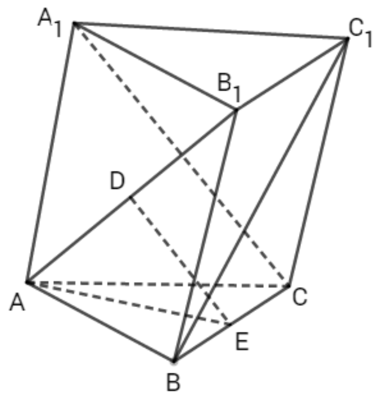
【点评】(1)考察向量垂直的坐标运算，（2）考察向量数量积的坐标公式、三角恒等变换、同角三角函数关系。属于简单题。

16.（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱中 $ABC-A_1B_1C_1$，$AB=AC$，$A_1C\perp BC_1$，$AB_1\perp BC_1$，D，E 分别是 AB_1 和 BC 的中点.

求证：（1）DE // 平面 ACC_1A_1；

（2）$AE\perp$ 平面 BCC_1B_1.



【解析】证明：（1）连接 A_1B，

由于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 为平行四边形，

$\therefore A_1B$ 与 AB_1 互相平分

又 $\because D$ 是 AB_1 的中点

$\therefore A_1B$ 经过点 D，且点 D 是 A_1B 的中点.

$\because$ 点 E 是 BC 的中点

$\therefore DE$ 是三角形 A_1BC 的中位线

$\therefore DE /\!/ A_1C$

$\because DE /\!/ A_1C$，$DE \not\subset$ 平面 ACC_1A_1，$A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1

$\therefore DE /\!/$ 平面 ACC_1A_1

（2）$\because AB = AC, E$ 是 BC 中点

$\therefore AE \perp BC$

$\because DE /\!/ A_1C$，$A_1C \perp BC_1$

$\therefore DE \perp BC_1$

$\because DE \perp BC_1$，$AB_1 \perp BC_1$，$DE \cap AB_1 = D$，$DE \subset$ 平面 AEB_1，$AB_1 \subset$ 平面 AEB_1

$\therefore BC_1 \perp$ 平面 AEB_1

$\because AE \subset$ 平面 AEB_1

$\therefore AE \perp BC_1$

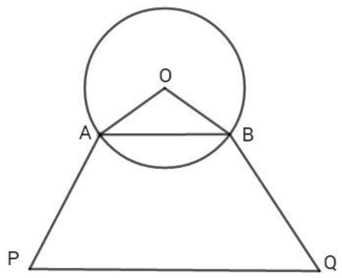
$\because AE \perp BC_1$，$AE \perp BC$，$BC \cap BC_1 = B$，$BC, BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore AE \perp$ 平面 BCC_1B_1

【点评】本题主要考查立体几何中直线与平面平行，直线与平面垂直的知识点. 第一题利用中位线证明线线平行得到线面平行即可. 第二题关键在于通过线面垂直得到线线垂直，再证明线面垂直。对于学生空间立体几何想象能力要求较高.

17.（本小题满分 14 分）

某公园有一块以O为圆心半径为20米的圆形区域，为丰富市民的业余生活，现提出如下设计方案：如图，在圆形区域内搭建露天舞台，舞台为扇形OAB区域，其中两个端点A，B分别在圆周上；观众席为梯形$ABQP$内且在圆O外的区域，其中$AP=AB=BQ$，$\angle PAB=\angle QBA=120°$，且$AB$，$PQ$在点$O$的同侧，为保证视听效果，要求观众席内每一个观众到舞台O处的距离都不超过60米，设$\angle OAB=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，问：对于任意$\alpha$，上述设计方案是否均能符合要求？



【解析】

过O向AB,PQ作垂线，垂足分别为D,F，过A向PQ作垂线，垂足为E

$\angle OAB=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$OA=20$，所以$OD=20\sin\alpha, AD=20\cos\alpha, AB=40\cos\alpha$

所以$AP=AB=40\cos\alpha$，因为$\angle BAP=120^{\circ}$，所以$\angle PAE=30^{\circ}$

在$RT\triangle PAE$中，$AP=40\cos\alpha,\angle PAE=30^{\circ}$，所以$PE=20\cos\alpha$，$AE=DF=20\sqrt{3}\cos\alpha$

所以$OF=OD+DF=20\sin\alpha+20\sqrt{3}\cos\alpha$，$PF=PE+EF=40\cos\alpha$

所以$PO^2=PF^2+OF^2=(40\cos\alpha)^2+\left(20\sin\alpha+20\sqrt{3}\cos\alpha\right)^2\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$

$$=1600\cos^2\alpha+400\sin^2\alpha+800\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+1200\cos^2\alpha$$

$$=400\left(7\cdot\frac{\cos2\alpha+1}{2}+\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin2\alpha\right)=400\left(4+3\cos2\alpha+\sqrt{3}\sin2\alpha\right)$$

$$=1600+800\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$$

当$\alpha=\frac{\pi}{12}$，PO^2有最大值为$1600+800\sqrt{3}$，因为$1600+800\sqrt{3}<3600$，所以$PO<60$恒成立

答：对于任意α，上述方案均是符合要求。

【点评】本题主要考察圆的垂径定理以及等腰梯形的几何性质，运用三角和差化简以及二倍角进行求最值，难度适中。

18.（本小题满分 16 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且椭圆 C 短轴的一个顶点到一个焦点的距离等于 $\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设经过点 $P(1,2)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A , B 两点，点 $Q(m,0)$.

①若对于任意直线 l 总存在点 Q，使得 $QA=QB$，求实数 m 的取值范围；

②设点 F 为椭圆 C 的左焦点，若点 Q 为 ΔFAB 的外心，求实数 m 的值。

【解析】 (1)∵离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C 短轴的一个顶点到一个焦点的距离等于 $\sqrt{2}$ ，

∴ $b^2+c^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$，即 $a=\sqrt{2}$，

∴ $c=1$，$b^2=a^2-c^2=1$.

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）①设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点为 $E(x_0,y_0)$，

∵直线 l 经过点 $P(2,0)$，

∴设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 可得 $(1+2k^2)x^2-8k^2+8k^2-2=0$，

∵**直线** l 与椭圆 C 有两个交点，可得 $\Delta=\left(8k^2\right)^2-4\left(1+2k^2\right)\left(8k^2-2\right)=-16k^2+8>0$，

∴ $0\le k^2<\frac{1}{2}$.

∴ $0\le m<\frac{1}{2}$.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，

$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$， $y_0=k\left(x_0-2\right)=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$，

∴线段 AB 中点 E 的坐标为 $\left(\dfrac{4k^2}{1+2k^2},\dfrac{-2k}{1+2k^2}\right)$，

当 $k\neq 0$ 时，

线段 AB 的中垂线方程为 $y+\dfrac{2k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}\right)$，

令 $y=0$，则可得 $x=\dfrac{2k^2}{1+2k^2}$，

$\because QA=QB,Q\left(m,0\right)$，

$\therefore m=\dfrac{2k^2}{1+2k^2}=1-\dfrac{1}{1+2k^2}$，且 $0<k^2<\dfrac{1}{2}$

故 m 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

当 $k=0$ 时，Q 点坐标为 $\left(0,0\right)$，即 $m=0$

综上可得：m 的范围为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$

② 由①令 $x_1=\dfrac{4k^2+\sqrt{2-4k^2}}{1+2k^2}$，$\therefore y_1=\dfrac{k\sqrt{2-4k^2}-2k}{1+2k^2}$，

又 $Q\left(\dfrac{2k^2}{1+2k^2},0\right)$，

$\because Q$ 为△ FAB 的外心，

$\therefore QA=QF$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}-\frac{4k^2+\sqrt{2-4k^2}}{1+2k^2}\right)^2+\left(\frac{k\sqrt{2-4k^2}-2k}{1+2k^2}\right)^2}=\frac{2k^2}{1+2k^2}+1,$$

整理，得 $16k^4+6k^2-1=0$，

解得 $k^2=\dfrac{1}{8}$ 或 $k^2=-\dfrac{1}{2}$（舍）

此时 $m=\dfrac{2k^2}{1+2k^2}=\dfrac{1}{5}$.

【点评】本题考查直线与椭圆的综合性质，本题难度适中，计算量较大。第（1）问很简单，利用离心率和短轴的一个顶点到一个焦点的距离直接求出；第（2）①中，点 Q 为 AB 的中垂线与 x 轴的交点，先求出 AB 的中垂线的方程，进而求出点 Q 的坐标，根据判别式大于 0，解出 m 的取值范围；② Q 为△ FAB 的外心， $QA=QF$ ，可解出.

19.（本小题满分 16 分）

已知 $f(x)=\ln x-\dfrac{2x-2}{x-1+2a},a>0$.

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 在图像 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若对任意 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若 $f(x)$ 存在极大值和极小值，且极大值小于极小值，求 a 的取值范围.

【解析】

（1） $a=2$， $f(x)=\ln x-\dfrac{2x-2}{x-1+4}=\ln x-\dfrac{2x-2}{x+3}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+3)-(2x-2)}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{(x+3)^2}$， $f'(1)=1-\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$

又 $f(1)=0-0=0$，则函数 $f(x)$ 图像在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-0=\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 。

（2）由题知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x-1+2a)-(2x-2)}{(x-1+2a)^2}$，化简得 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2+4a^2-4a}{x(x-1+2a)^2}$，

又因为 $f(1)=0$，要使 $f(x)\geq 0$ 恒成立，即使得 $f(x)\geq f(1)$。

①若 $4a^2-4a\geq 0$，即 $a\leq 0$ 或 $a\geq 1$ 时， $f'(x)\geq 0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 恒成立，则有 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 为增函数，则有 $f(x)\geq f(1)$，又因为 $a>0$，则得 $a\geq 1$。

②若 $4a^2-4a<0$，即 $0<a<1$，则存在 $x_0>1$，使得 $f'(x_0)=0$，在区间 $[1,x_0)$ 中 $f'(x)<0$，则有 $f(x)$ 在区间 $[1,x_0)$ 为减函数， $f(x_0)<f(1)=0$，不符合题意。

综上可得 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$。

（3） $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+(2a-1)^2}{x(x-1+2a)^2}\quad (x\neq 2a-1)$

设 $g(x)=x^2-2x+(2a-1)^2$

因为函数在$(0,+\infty)$有两个极值点，

所以$\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ g(0)>0 \end{cases}$ 解得$0<a<\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}<a<1$

设极大值点为x_1，极小值点为x_2， $0<x_1<x_2$

则$x_1+x_2=2, x_1x_2=(2a-1)^2$，所以$x_1,x_2\neq 2a-1$且$x_1,x_2\in(0,2)$

因为$f(x_1)<f(x_2)$

所以$\ln x_1-\ln x_2<\frac{x_1-x_2}{2a-1}$

即$\ln x_1-\frac{x_1}{2a-1}<\ln x_2-\frac{x_2}{2a-1}$

设函数$h(x)=\ln x-\frac{x}{2a-1}$，所以函数在$(0,2)$上单调递增

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2a-1}\geq 0$，解得$a<\frac{1}{2}$

综上，a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

【点评】本题第 1 小问考查导数的几何性质，属于基础题；后两问考查极值、最值以及函数的单调性问题，计算量较大，计算需细心，难度与往年持平。

20.（本小题满分 16 分）

已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，且对任意$n\in N^*$，都有$(a_1a_2......a_n)^2=a_1^{n+1}a_{n+1}^{n-1}$.

（1）若a_1，$2a_2$，$3a_3$成等差数列，求$\frac{a_2}{a_1}$的值；

（2）①求证：数列$\{a_n\}$为等比数列；

②若对任意$n\in N^*$，都有$a_1+a_2+...+a_n\leq 2^n-1$，求数列$\{a_n\}$的公比$q$的取值范围.

【解析】

$(1)n=2,3$时，可得$a_2^2=a_1a_3$，设$a_2=a_1q$，则$a_3=a_1q^2$又$a_1+3a_3=4a_2$

$3q^2-4q+1=0$，解知得$q=1$或$\frac{1}{3}$

(2)①$(a_1a_2\Lambda\ a_n)^2=a_1{}^{n+1}a_{n+1}^{n-1}$

$(a_1a_2\Lambda\ a_{n-1})^2=a_1{}^{n}a_n^{n-2}(n\ge 2)$

$\therefore a_n^2=a_1\dfrac{a_{n+1}^{n-1}}{a_n^{n-2}}\Rightarrow a_n^n=a_1a_{n+1}^{n-1}(n\ge 2),a_{n-1}^{n-1}=a_1a_n^{n-2}(n\ge 3)$

$a_1a_n^{2n-2}=a_1(a_{n+1}a_{n-1})^{n-1}(n\ge 3)\Rightarrow a_n^2=a_{n+1}a_{n-1}(n\ge 3)$即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}(n\ge 3)$

又由第一问得$n=2$时也成立,$\therefore \{a_n\}$为等比数列

②$n=1$时,$a_1\le 1$

当$q\le 2$时,$a_n=a_1q^{n-1}\le 2^{n-1},\therefore \sum a_n\le 1+2+2^2+\Lambda\ +2^{n-1}=2^n-1$成立.

当$q>2$时,令$f(n)=a_1+a_2+\Lambda\ +a_n-2^n+1=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}-2^n+1$

令$f(n)>0$,得$\dfrac{a_1}{q-1}(q^n-1)>2^n-1$

$\Theta\ a_1\le 1,q>2\therefore \dfrac{a_1}{q-1}<1,$

$\dfrac{a_1}{q-1}q^n-\dfrac{a_1}{q-1}>2^n-1\Rightarrow \dfrac{a_1}{q-1}q^n-2^n>\dfrac{a_1}{q-1}-1$

当$\dfrac{a_1}{q-1}q^n>2^n$时,即$n>\log_{\frac{q}{2}}\dfrac{q-1}{a_1}$时,$\dfrac{a_1}{q-1}q^n-2^n>0>m-1$

即$f(n)>0$,即$a_1+a_2+\Lambda\ +a_n>2^n-1$.不符题意,舍去.

综上$q\in(0,2]$