

充分条件与必要条件

【学习目标】

1. 理解充分条件、必要条件、充要条件的定义；
2. 会求某些简单问题成立的充分条件、必要条件、充要条件；
3. 会应用充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件表达命题之间的关系；
4. 能够利用命题之间的关系判定充要关系或进行充要性的证明。

【要点梳理】

要点一、充分条件与必要条件 充要条件的概念

符号 $p \Rightarrow q$ 与 $p \Leftrightarrow q$ 的含义

“若 p ，则 q ”为真命题，记作： $p \Rightarrow q$ ；

“若 q ，则 p ”为假命题，记作： $p \not\Rightarrow q$ 。

充分条件、必要条件与充要条件

① 若 $p \Rightarrow q$ ，称 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件。

② 如果既有 $p \Rightarrow q$ ，又有 $q \Rightarrow p$ ，就记作 $p \Leftrightarrow q$ ，这时 p 是 q 的充分必要条件，称 p 是 q 的充要条件。

要点诠释：对 $p \Rightarrow q$ 的理解：指当 p 成立时， q 一定成立，即由 p 通过推理可以得到 q 。

① “若 p ，则 q ”为真命题；

② p 是 q 的充分条件；

③ q 是 p 的必要条件

以上三种形式均为 “ $p \Rightarrow q$ ” 这一逻辑关系的表达 .

要点二、充分条件、必要条件与充要条件的判断

从逻辑推理关系看

命题 “ 若 p , 则 q ” , 其条件 p 与结论 q 之间的逻辑关系

- ① 若 $p \Rightarrow q$, 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件, q 是 p 的必要不充分条件;
- ② 若 $p \not\Rightarrow q$, 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件, q 是 p 的充分不必要条件;
- ③ 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 、 q 互为充要条件;
- ④ 若 $p \not\Rightarrow q$, 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件 .

从集合与集合间的关系看

若 $p : x \in A$, $q : x \in B$,

- ① 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件;
- ② 若 A 是 B 的真子集, 则 p 是 q 的充分不必要条件;
- ③ 若 $A=B$, 则 p 、 q 互为充要条件;
- ④ 若 A 不是 B 的子集且 B 不是 A 的子集, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件 .

要点诠释: 充要条件的判断通常有四种结论: 充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件 . 判断方法通常按以下步骤进行:

- ① 确定哪是条件, 哪是结论;
- ② 尝试用条件推结论,
- ③ 再尝试用结论推条件,

④ 最后判断条件是结论的什么条件 .

要点三、充要条件的证明

要证明命题的条件是结论的充要条件,既要证明条件的充分性(即证原命题成立),又要证明条件的必要性(即证原命题的逆命题成立)

要点诠释: 对于命题 “若 P , 则 Q ”

① 如果 P 是 Q 的充分条件, 则原命题 “若 P , 则 Q ” 与其逆否命题

“若 $\neg Q$, 则 $\neg P$ ” 为真命题;

② 如果 P 是 Q 的必要条件, 则其逆命题 “若 Q , 则 P ” 与其否命题

“若 $\neg P$, 则 $\neg Q$ ” 为真命题;

③ 如果 P 是 Q 的充要条件, 则四种命题均为真命题 .