

全称量词与存在量词

【学习目标】

1. 理解全称量词、存在量词和全称命题、特称命题的概念；
2. 能准确地使用全称量词和存在量词符号 “ \forall ” “ \exists ” 来表述相关的教学内容；
3. 掌握判断全称命题和特称命题的真假的基本原则和方法；
4. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定 .

【要点梳理】

要点一、全称量词与全称命题

全称量词

全称量词：在指定范围内，表示整体或者全部的含义的量词称为全称量词 .

常见全称量词：“所有的”、“任意一个”、“每一个”、“一切”、“任给”等 . 通常用符号 “ \forall ” 表示，读作 “对任意” .

全称命题

全称命题：含有全称量词的命题，叫做全称命题 .

一般形式：“对 M 中任意一个 x ，有 $p(x)$ 成立” .

记作： $\forall x \in M, p(x)$ (其中 M 为给定的集合， $p(x)$ 是关于 x 的语句) .

要点诠释：有些全称命题在文字叙述上可能会省略了全称量词，例如：(1) “末位是 0 的整数，可以被 5 整除”；(2) “线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等”；(3) “负数的平方是正数”；都是全称命题 .

要点二、存在量词与特称命题

存在量词

定义：表示个别或一部分的含义的量词称为存在量词 .

常见存在量词：“有一个”，“存在一个”，“至少有一个”，“有的”，“有些”等 . 通常用符号 “ \exists ” 表示，读作 “存在” .

特称命题

特称命题：含有存在量词的命题，叫做特称命题。

一般形式：“存在 M 中一个元素 x_0 ，有 $p(x_0)$ 成立”，

记作： $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ （其中 M 为给定的集合， $p(x)$ 是关于 x 的语句）。

要点诠释：

(1) 一个特称命题中也可以包含多个变量，例如：存在 $\alpha \in R, \beta \in R$ 使 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ 。

(2) 有些特称命题也可能省略了存在量词。

(3) 同一个全称命题或特称命题，可以有不同的表述

要点三、含有量词的命题的否定

对含有一个量词的全称命题的否定

全称命题 $P: \forall x \in M, p(x)$

P 的否定 $\neg P: \exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$;

从一般形式来看，全称命题“对 M 中任意一个 x ，有 $p(x)$ 成立”，它的否定并不是简单地对结论部分 $p(x)$ 进行否定，还需对全称量词进行否定，

使之成为存在量词，也即“任意 $x \in M, p(x)$ ”的否定为“ $\exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$ ”。

对含有一个量词的特称命题的否定

特称命题 $P: \exists x_0 \in M, p(x_0)$

P 的否定 $\neg P: \forall x \in M, \neg p(x)$;

从一般形式来看，特称命题 “ $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ”，它的否定并不是简单地
对结论部分 $p(x_0)$ 进行否定，还需对存在量词进行否定，使之成为全称量词，
也即 “ $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ” 的否定为 “ $\forall x \in M, \neg p(x)$ ”。

要点诠释：

- (1) 全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题；
- (2) 命题的否定与命题的否命题是不同的。
- (3) 正面词：等于、大于、小于、是、都
是、至少一个、至多一个、小于等于
否定词：不等于、不大于、不小于、不是、不都是、一个也没有、至少
两个、大于等于。

要点四、全称命题和特称命题的真假判断

① 要判定全称命题 “ $\forall x \in M, p(x)$ ” 是真命题，必须对集合 M 中的每一个元素 x ，证明 $p(x)$ 成立；要判定全称命题 “ $\forall x \in M, p(x)$ ” 是假命题，只需在集合 M 中找到一个元素 x_0 ，使得 $p(x_0)$ 不成立，即举一反例即可。

② 要判定特称命题 “ $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ” 是真命题，只需在集合 M 中找到一个元素 x_0 ，使得 $p(x_0)$ 成立即可；要判定特称命题 “ $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ” 是假命题，必须证明在集合 M 中，使 $p(x)$ 成立得元素不存在。