22 、空间向量的概念：

(1)在 空间，具有大小和方向的量称为空间向量.

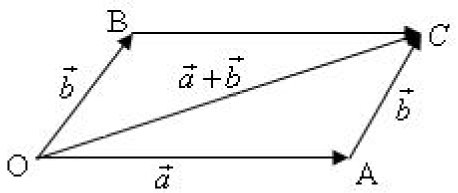
(2)向量可用一条有向线段来表示．有向线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向表示向量的方向.

(3)向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的模（或长度），记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

(4)模（或长度）为 0 的向量称为零向量；模为 1 的向量称为单位向量.

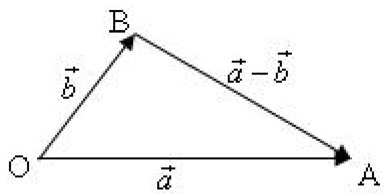
(5)与向量 $\vec{a}$ 长度相等且方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$.

(6)方向相同且模相等的向量称为相等向量.



23 、空间向量的加法和减法：

(1)求两个向量和的运算称为向量的加法，它遵循平行四边形法则．即：在空间以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形 OACB，则以 O 起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，这种求向量和的方法，称为向量加法的平行四边形法则.



(2)求两个向量差的运算称为向量的减法，它遵循三角形法则．即：在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$.

24 、实数 λ 与空间向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，称为向量的数乘运算．当 $\lambda>0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 为零向量，记为 $\vec{0}$． $\lambda\vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍．

25 、设 λ， μ 为实数， $\vec{a}$， $\vec{b}$ 是空间任意两个向量，则数乘运算满足分配律及结合律．

分配律： $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ；结合律： $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{a}$ ．

26 、如果表示空间的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量称为共线向量或平行向量，并规定零向量与任何向量都共线．

27 、向量共线的充要条件：对于空间任意两个向量 $\vec{a}$， $\vec{b}\left(\vec{b}\neq 0\right)$， $\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$．

28 、平行于同一个平面的向量称为共面向量．

29 、向量共面定理：空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在有序实数对 x， y，使 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$；或对空间任一定点 O，有 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$；或若四点 P， A， B， C 共面，则 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}\left(x+y+z=1\right)$．

30 、已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$， $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，则 $\angle\mathrm{AOB}$ 称为向量 $\vec{a}$， $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$．两个向量夹角的取值范围是： $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in\left[0,\pi\right]$．

31 、对于两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，若 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，则向量 $\vec{a}$， $\vec{b}$ 互相垂直，记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$．

32、已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 称为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$．即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$．零向量与任何向量的数量积为 0．

33、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的长度 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的方向上的投影 $|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 的乘积．

34、若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，$\vec{e}$ 为单位向量，则有 (1) $\vec{e}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{e}\rangle$；

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；$(3)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\vec{a}||\vec{b}|(\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{同向})\\-|\vec{a}||\vec{b}|(\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{反向})\end{cases}$，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$；

(4) $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$；$(5)$ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$．

35、向量数乘积的运算律：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；$(2)$ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$．

36、若 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是空间三个两两垂直的向量，则对空间任一向量 $\vec{p}$，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，称 $x\vec{i}$，$y\vec{j}$，$z\vec{k}$ 为向量 $\vec{p}$ 在 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 上的分量．

37、空间向量基本定理：若三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共面，则对空间任一向量 $\vec{p}$，存在实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$．

38、若三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共面，则所有空间向量组成的集合是 $\{\vec{p}\,|\,\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c},x,y,z\in R\}$．这个集合可看作是由向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 生成的，$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 称为空间的一个基底，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 称为基向量．空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底．

39、设 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 为有公共起点 O 的三个两两垂直的单位向量（称它们为单位正交基底），以 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 的公共起点 O 为原点，分别以 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$．则对于空间任意一个向量 $\vec{p}$，一定可以把它平移，使它的起点与原点 O 重合，得到向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$．存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\vec{p}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$．把 x，y，z 称作向量 $\vec{p}$ 在单位正交基底 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 下的坐标，记作 $\vec{p}=(x,y,z)$．此时，向量 $\vec{p}$ 的坐标是点 P 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 (x,y,z)．

40、设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则 (1) $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$．

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$．

(3) $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$．

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$．

(5) 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为非零向量，则 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$．

(6) 若 $\vec{b}\neq\vec{0}$，则 $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2,z_1=\lambda z_2$．

(7) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$．

(8) $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$．

(9) $A(x_1,y_1,z_1)$，$B=(x_2,y_2,z_2)$，则

$d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$．

41、在空间中，取一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P 的位置可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示．向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量．

42、空间中任意一条直线 l 的位置可以由 l 上一个定点 A 以及一个定方向确定．点 A 是直线 l 上一点，向量 $\vec{a}$ 表示直线 l 的方向向量，则对于直线 l 上的任意一点 P，有 $\overrightarrow{AP}=t\vec{a}$，这样点 A 和向量 $\vec{a}$ 不仅可以确定直线 l 的位置，还可以具体表示出直线 l 上的任意一点．

43、空间中平面 α 的位置可以由 α 内的两条相交直线来确定．设这两条相交直线相交于点 O，它们的方向向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$．P 为平面 α 上任意一点，存在有序实数对 (x,y)，使得 $\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$，这样点 O 与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 就确定了平面 α 的位置．

44、直线 l 垂直 α，取直线 l 的方向向量 $\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 称为平面 α 的法向量．

45、若空间不重合两条直线 a，b 的方向向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则

$a//b\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow$

$\vec{a}=\lambda\vec{b}\left(\lambda\in R\right)$，$a\perp b\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．

46、若直线 a 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$，且 $a\not\subset\alpha$，则

$a//\alpha\Leftrightarrow\vec{a}//\alpha$

$\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$a\perp\alpha\Leftrightarrow\vec{a}\perp\alpha\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{n}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{n}$．

47、若空间不重合的两个平面 α，β 的法向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则

$\alpha//\beta\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow$

$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．