

## 变化率与导数

### 【学习目标】

- (1) 理解平均变化率的概念；
- (2) 了解瞬时速度、瞬时变化率的概念；
- (3) 理解导数的概念，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵；
- (4) 会求函数在某点的导数或瞬时变化率；

### 【要点梳理】

#### 要点一、平均变化率问题

##### 1. 变化率

事物的变化率是相关的两个量的“增量的比值”。如气球的平均膨胀率是半径的增量与体积增量的比值；

##### 2. 平均变化率

一般地，函数  $f(x)$  在区间  $[x_1, x_2]$  上的平均变化率为：

要点诠释：

① 本质：如果函数的自变量的“增量”为  $\Delta x$ ，且  $\Delta x > 0$ ，相应的函数值的“增量”为  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ ，则函数  $f(x)$  从  $x_1$  到  $x_2$  的平均

变化率为

② 函数的平均变化率可正可负，平均变化率近似地刻画了曲线在某一区间上的变化趋势。

即递增或递减幅度的大小。

对于不同的实际问题，平均变化率富于不同的实际意义。如位移运动中，位移  $S$  (m) 从  $t_1$  秒到  $t_2$  秒的平均变化率即为  $t_1$  秒到  $t_2$  秒这段时间的平均速度。

高台跳水运动中 平均速度只能粗略地描述物体在某段时间内的运动状态，要想更精确地刻画物体运动，就要研究某个时刻的速度即瞬时速度。

##### 3. 如何求函数的平均变化率

深圳小学家长群:254317299

深圳初中家长群:90482695

深圳高中家长群:175743089

更多资料详见: <http://sz.jiajiaoban.com/>

咨询电话: 4000-121-121

求函数的平均变化率通常用“两步”法：

① 作差：求出  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$  和  $\Delta x = x_2 - x_1$

② 作商：对所求得的差作商，即

要点诠释：

1.  $\Delta x$  是  $x$  的一个“增量”，可用  $x_1 + \Delta x$  代替  $x$ ，同样  $\Delta y$  是  $y$  的一个“增量”，可用  $f(x_1 + \Delta x)$  代替  $f(x)$ 。
2.  $\Delta x$  是一个整体符号，而不是  $|\Delta x|$  与  $x$  相乘。
3. 求函数平均变化率时注意  $\Delta x, \Delta y$ ，两者都可正、可负，但  $|\Delta x|$  的值不能为零， $\Delta y$  的值可以为零。若函数  $y = f(x)$  为常函数，则  $\Delta y = 0$ 。

要点二、导数的概念

定义：函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处瞬时变化率是  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，

我们称它为函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处的导数，记作  $y'|_{x=x_0}$  即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

要点诠释：

① 增量  $\Delta x$  可以是正数，也可以是负，但是不可以等于 0。  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  的意义：

与 0 之间距离要多近有多近，即  $\Delta x$  可以小于给定的任意小的正数。

② 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时， $\Delta y$  在变化中都趋于 0，但它们的比值却趋于一个确定的常数。

即存在一个常数与  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  无限接近。

③ 导数的本质就是函数的平均变化率在某点处的极限，即瞬时变化率。如瞬时速度即是位移在这一时刻的瞬间变化率。

要点三、求导数的方法：

求导数值的一般步骤：

- 1 求函数的增量： $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ；
- 2 求平均变化率： $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ；
- 3 求极限，得导数： $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

也可称为三步法求导数。