2016年四川成都成都市实验外国语学校初三自主招生数学试卷(详解)

一、选择题

（每小题4分，共40分）

1. 下面给出式子：$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-\frac{1}{\cos 45^{\circ}}+\sqrt[3]{-8}$，它的计算结果是（ ）.

A. $3-2\sqrt{2}$　　B. 1　　C. 5　　D. 0

【答案】B

【解析】原式$=\sqrt{2}-1+4-\sqrt{2}-2=1$.

2. 使得函数$y=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{|x|}}+\frac{11}{\sqrt{3-x}}$有意义的$x$的取值范围是（ ）.

A. $-1\leqslant x<3$且$x\neq 0$　　B. $0<x<3$　　C. $-1\leqslant x\leqslant 3$且$x\neq 0$　　D. $-1<x<3$且$x\neq 0$

【答案】A

【解析】要使函数有意义，需满足：

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\|x|\neq 0\\3-x>0\end{cases},$$

解得：$-1\leqslant x<3$且$x\neq 0$.

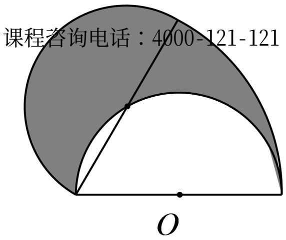
3. 任一函数$y=f(x)$的图象与直线$x=a$的交点个数可能有（ ）个.

A. 1　　B. 0或1　　C. 0　　D. 不能确定

【答案】A

【解析】由函数的定义知，对于任意x取值，y有唯一值与之对应.

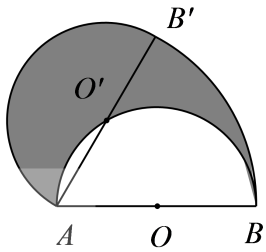
4. 如图，直径为6的半圆，绕其直径的一点逆时针旋转60°，则图中阴影部分的面积是（ ）.



A. 12π　　B. 6π　　C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 18π

【答案】B

【解析】如图可得，阴影部分面积：



$$S=S_{扇B'AB}+S_{半圆O'}-S_{半圆O},$$
$$=\frac{60\pi\times6^2}{360}+\frac{1}{2}\pi\times3^2-\frac{1}{2}\times3^2,$$
$$=6\pi.$$

5. 方程$x^2-4|x|-21=0$的所有实数根的乘积为（ ）.

A. 441　　B. 0　　C. -441　　D. -49

【答案】D

【解析】当$x>0$时，原方程整理为$x^2-4x-21=0$，

解得：$x_1=7$，$x_2=-3$（舍），

当$x<0$时，原方程整理为$x^2+4x-21=0$，

解得：$x_3=7$，$x_4=3$（舍），

$\therefore$原方程的解为$x=7$或$x=-7$，

$7\times(-7)=-49$，

即为方程所有实根的乘积.

6. 对于任意两个正整数m，n，定义某种运算（用#表示），当m，n都是正偶数或正奇数时，$m\#n=m+n$，当m，n中一个为正奇数，另一个为正偶数时，$m\#n=mn$，则在上述定义下，则满足$m\#n=12$的不同数对(m,n)共有（ ）个.

A. 7　　B. 16　　C. 15　　D. 9

【答案】C

【解析】当m，n同为正偶数或正奇数时，$m+n=12$，

又$1+11=12$，$2+10=12$，$3+9=12$，$4+8=12$，$5+7=12$．$6+6=12$，

$\therefore (m,n)$有$5\times 2+1=11$个，

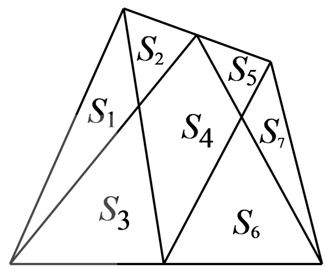
当m，n一个为正奇数，一个为正偶数时，$mn=12$，

又$1\times 12=12$，$3\times 4=12$，

$\therefore (m,n)$有$2\times 2=4$个，

综上所述，符合题意的(m,n)一共有$11+4=15$个．

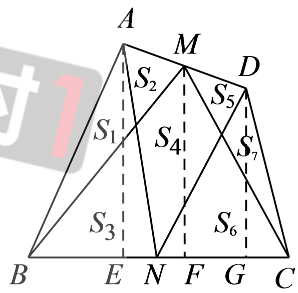
7. 如图，在四边形$ABCD$中，M、N是AD、BC的中点，AN、DN、BM、CM划分四边形所成的7个区域的面积分别为S_1，S_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7，那么恒成立的关系是（ ）．



A. $S_2+S_6=S_4$ B. $S_1+S_7=S_4$ C. $S_2+S_3=S_4$ D. $S_1+S_6=S_4$

【答案】B

【解析】如图，分别过点A、M、D作$AE\perp BC$于点E，



$MF\perp BC$于点F，$DG\perp BC$于点G，

则有$AE//MF//DG$，

$\therefore$四边形$AEGD$为直角梯形，

又M为AD中点，

$\therefore MF$为梯形$AEGD$的中位线，

$\therefore 2MF=AE+DG$，

又$S_{\triangle ABN}=\dfrac{1}{2}BN\times AE$，$S_{\triangle DNC}=\dfrac{1}{2}NC\times DG$，

N为BC中点，

$\therefore S_{\triangle ABN}+S_{DNC}=\dfrac{1}{2}BN\times(AE+DG)=\dfrac{1}{2}BN\times 2MF=BN\times MF$，

又$S_{\triangle BMC}=\dfrac{1}{2}BC\times MF=\dfrac{1}{2}\times 2BN\times MF=BN\times MF$，

$\therefore S_{\triangle ABN}+S_{\triangle DNC}=S_{\triangle BMC}$，

$\therefore S_1+S_3+S_7+S_6=S_3+S_4+S_6$，

即$S_1+S_7=S_4$，

$\therefore$恒成立的关系式为$S_1+S_7=S_4$．

8. 已知m，n是方程$(x^2+x)^2+(x^2+x)-2=0$的二不等实根，则$m^4n-n^3+5=$（ ）．

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

【答案】C

【解析】令 $t=x^2+x$，则原方程等价于 $t^2+t-2=0$，

解得 $t_1=-2$，$t_2=1$，

当 $x^2+x=-2$时，即 $x^2+x+2=0$，

$\Delta=1^2-4\times2<0$.

∴此时，方程无解，

当 $x^2+x=1$时，即 $x^2+x-1=0$，

$\Delta=1^2-4\times1\times(-1)>0$，

∴方程有两个不等实根，

∴ m，n即为方程 $x^2+x-1=0$的两根，

则由韦达定理可得 $m+n=-1$，$mn=-1$，

且 $m^2+m-1=0$，$n^2+n-1=0$，

∴ $m^2=1-m$，$n^2=1-n$，

那么，$m^4n-n^3+5=n\left[(1-m)^2-(1-n)\right]+5$

$=n(1+m^2-2m-1+n)+5$

$=n(1-3m+n)+5$

$=n-3mn+n^2+5$

$=n-3mn+1-n+5$

$=1+3+5=9$.

9. 某班试用电子投票系统选举班干部，全班 k名同学都有选举权和被选举权，他们的编号分别为 1，2，3，$\cdots$，k，规定：同意按"1"，不同意（含弃权）按"0"．令 a_{ij}表示第 i号同学同意第 j号同学当选，"0"表示第 i号同学不同意第 j号同学当选，其中 $i=1$，2，3，$\cdots$，k，$j=1$，2，3，$\cdots$，k，则同时同意第 1，2号同学当选的人数的表达式为（ ）．

A. $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{k1}a_{k2}$　　B. $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{kk}$　　C. $a_{11}\cdot a_{21}\cdot a_{31}\cdots a_{k1}+a_{22}\cdot a_{32}\cdot a_{31}\cdots a_{k2}$　　D. 以上均不对

【答案】A

【解析】由题意得：第 1号同学被选举结果为：a_{11}，a_{21}，a_{31}，$\cdots$，a_{k1}，

第 2号同学被选举结果为：a_{12}，a_{22}，a_{32}，$\cdots$，a_{k2}，

若第 1号，第 2号同时被第 i号同学选举：$a_{i1}a_{i2}=1\times1=1$，可表示 1人，

若第1号，第2号只有1人被第i号同学选举：$a_{i1}a_{i2}=1\times 0=0$，或

$a_{i1}a_{i2}=0\times 1=0$，可表示0人，

若第1号，第2号都没有被第i号同学选举：$a_{i1}a_{i2}=0\times 0=0$，可表示0人，

$\therefore$同时同意第1、2号同学当选的总人数为$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{k1}a_{k2}$.

10. 关于x的方程$(x^2-2)^2-2\left|x^2-2\right|+k=0$，给出下列四个结论：

①存在实数k，使得方程恰有2个不同实数根；

②存在实数k，使得方程恰有3个不同实数根；

③存在实数k，使得方程恰有5个不同实数根；

④存在实数k，使得方程恰有8个不同实数根；

其中正确的结论有（ ）个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】原方程可化为：$(x^2-2)^2-2(x^2-2)+k=0$（$x\geqslant\sqrt{2}$或$x\leqslant-\sqrt{2}$）$\cdots$（1），

$(x^2-2)^2+2(x^2-2)+k=0$（$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）$\cdots$（2），

当$k=-3$时，方程（1）的解为$\pm\sqrt{5}$，方程（2）无解，

原方程恰有2个不同的实根，结论①正确.

当$k=1$时，方程（1）的解为$\pm\sqrt{3}$，方程（2）的解为±1，

原方程恰有4个不同的实根.

当$k=0$时，方程（1）的解为±2，$\pm\sqrt{2}$，方程（2）的解为$x=0$，

原方程恰有5个不同的实根，结论③正确.

当$k=\dfrac{3}{4}$时，方程（1）的解为$\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，方程（2）的解为$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

原方程恰有8个不同的实根，结论④正确.

二、填空题

（每小题4分，共40分）

11. 方程$xy-x-y-4=0$的所有正整数解是______.

【答案】$\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$或$\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$

【解析】原方程可整理为：$(x-1)(y-1)=5$，

$\because x$，y为正整数，

$\therefore 1 \leqslant x \leqslant 5$，$1 \leqslant y \leqslant 5$，

又 $5 = 1 \times 5$，

$\therefore \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$，

或 $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$．

12. 关于 x的函数 $y=(x-a)(x-b)(a<b)$，m，n程是方程 $(x-a)(x-b)-1=0$的二根 $(m<n)$，则 m、n、a、b的大小关系为 ______ ．

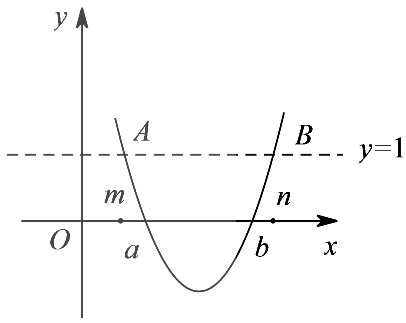
【答案】 $m<a<b<n$

【解析】由 $y=(x-a)(x-b)(a<b)$可知，二次函数开口向上，且与 x轴有两个交点 $(a,0)$，$(b,0)$，

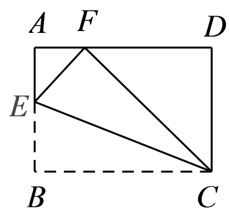
如图所示，抛物线与直线 $y=1$的交点 A、B横坐标即为方程 $(x-a)(x-b)-1=0$的两根，

又 $m<n$，

则由题意可得：$m<a<b<n$．



13. 如图，将矩形 $ABCD$沿 CE（点 E在边 AB上）折叠，使点 B落在 AD边上的点 F处，若 $3AE=2BE$，则 $\tan\angle ECF=$ ______ ．



【答案】 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】由翻折可得 $\triangle BEC \cong \triangle FEC$，

又 $3AE=2BE$，

$\therefore$在矩形 $ABCD$中，可设 $AE=2x$，$BE=3x$，$BC=y$，

则 $CD=AB=5x$，$EF=EB=3x$，$CF=BC=y$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$中，$AF=\sqrt{5}x$，

易证 $\triangle AEF \backsim \triangle DFC$，

$\therefore \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{CD}{CF}$，即 $\dfrac{\sqrt{5}x}{3x}=\dfrac{5x}{y}$，

$\therefore y=3\sqrt{5}x$，

$\tan\angle ECF=\dfrac{3x}{y}=\dfrac{3x}{3\sqrt{5}x}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

14. 设 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$b=2-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{\sqrt{5}-2}$，则 a，b，c的大小关系为 ______ .

【答案】 $c>a>b$

【解析】方法一：由题意可得：$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}>1$，

$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}>1$，

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\sqrt{3}+\sqrt{2}-2-\sqrt{3}=\sqrt{2}-2<0$，

$\therefore \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，

$\therefore a>b$，

又 $a^2=5-2\sqrt{6}$，$c^2=\sqrt{5}-2$，

$\therefore \dfrac{1}{a^2}=5+2\sqrt{6}$，$\dfrac{1}{c^2}=\sqrt{5}+2$，

$\therefore \dfrac{1}{a^2}>\dfrac{1}{c^2}$，

$\therefore a^2<c^2$，

$\therefore a<c$，

$\therefore c>a>b$.

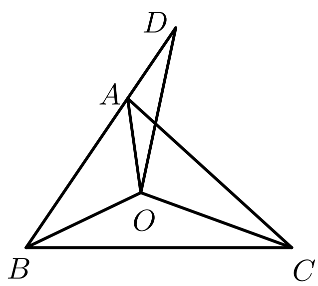
方法二：$a=\sqrt{3}-\sqrt{2}\approx 1.732-1.414=0.318$，

$b=2-\sqrt{3}\approx 2-1.732=0.268$，

$c=\sqrt{2.236-2}=\sqrt{0.236}>0.4$.

$\therefore c<a<b$.

15. 如图，已知 $\triangle ABC$的三个内角的平分线交于点 O，延长 BA到点 D，使 $AD=AO$，连接 DO，使 $BD=BC$，$\angle ABC=54^\circ$，则 $\angle BCA$的度数为 ______ .



【答案】 42°

【解析】$\because \triangle ABC$三个内角的平分线交于点 O，

$\therefore \angle ABO=\angle CBO$，$\angle BAO=\angle CAO$，$\angle BCO=\angle ACO$，

$\because AD=AO$，

$\therefore \angle D=\angle AOD$，

$\therefore \angle BAO=2\angle D$，

设 $\angle D=\alpha$，

则 $\angle BAO=2\alpha$， $\angle BAC=4\alpha$，

在 $\triangle DBO$与 $\triangle CBO$中，

$$\begin{cases} BD=BC \\ \angle DBO=\angle CBO \\ BO=BO \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBO\cong\triangle CBO$，

$\therefore \angle BCO=\angle D=\alpha$，

$\therefore \angle BCA=2\alpha$，

$\therefore 54+4\alpha+2\alpha=180^\circ$，

$\therefore \alpha=21^\circ$，

$\therefore \angle BCA=42^\circ$，

故答案为： 42°．

16. 关于 x的不等式组 $\begin{cases} 4(x-1)>3x-2 \\ x-1<\dfrac{6x+a}{7} \end{cases}$ 有且只有三个整数解，则 a的取值范围为 ______ ．

【答案】 $1\leqslant a<2$

【解析】不等式组两不等式的解集分别为： $x>2$， $x<7-a$，

又不等式组有且只有三个整数解，

$\therefore 2<x<7-a$且 $5<7-a\leqslant 6$，

解得： $1\leqslant a<2$.

17. 已知 $p=2x+1$， $q=-2x+2$，规定 $y=\begin{cases} 1+p-q, p\geqslant q \\ 1-p+q, p<q \end{cases}$，则 y的最小值为 ______ ．

【答案】 1

【解析】当 $p\geqslant q$时， $x\geqslant\dfrac{1}{4}$， $y=1+2x+1+2x-2=4x$，

$\because 4>0$， y随 x增大而增大，

$\therefore$有最小值 $y_{x=\frac{1}{4}}=4\times\dfrac{1}{4}=1$.

当 $p>q$时， $x<\dfrac{1}{4}$， $y=1-2x-1-2x+2=-4x+2$，

$\because -4<0$， y随 x增大而减小，

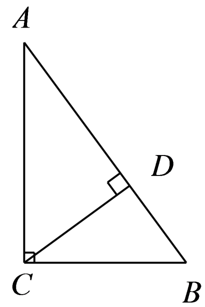
$\therefore y<-4\times\dfrac{1}{4}+2=1$，

$\therefore y$的最小值为 1.

18. 直角$\triangle ABC$斜边上的高为CD，若$AC=3$，$BC=4$，则$\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle BCD$的内切圆周长之和为 ______ .

【答案】 $\frac{24}{5}\pi$

【解析】如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC=3$，$BC=4$，



则$AB=5$，$CD=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，$AD=\frac{9}{5}$，$BD=\frac{16}{5}$，

记$\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle BCD$的内切圆半径分别为r_1，r_2，r_3，

则：$\frac{1}{2}\times(3+4+5)\times r_1=\frac{1}{2}\times3\times4$，解得$r_1=1$，

$C_1=2\pi r_1=2\pi$，

$\frac{1}{2}\times\left(3+\frac{12}{5}+\frac{9}{5}\right)\times r_2=\frac{1}{2}\times\frac{9}{5}\times\frac{12}{5}$，解得$r_2=\frac{3}{5}$，$C_2=2\pi r_2=\frac{6}{5}\pi$，

$\frac{1}{2}\times\left(4+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}\right)\times r_3=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}$，解得$r_3=\frac{4}{5}$，$C_3=2\pi r_3=\frac{8}{5}\pi$，

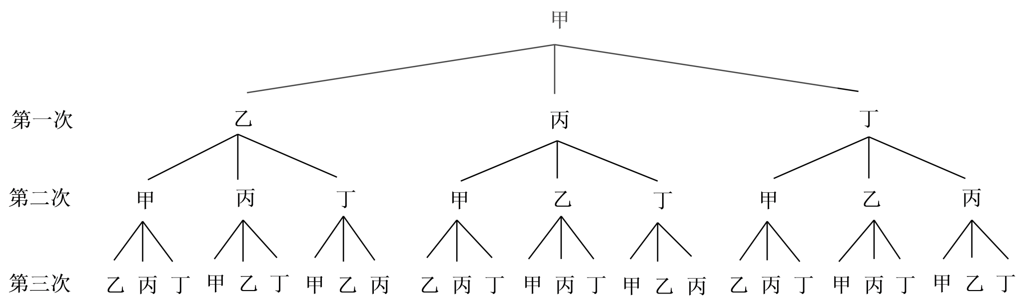
$\therefore C=C_1+C_2+C_3=2\pi+\frac{6}{5}\pi+\frac{8}{5}\pi=\frac{24}{5}\pi$，

$\therefore$三个三角形内切圆周长之和为$\frac{24}{5}\pi$.

19. 设甲、乙、丙、丁四人传一球，球可以从一人手中传给其余三人中的任一人，球最开始从甲手中传给其余三人中的一人手中，是第一次传球完毕，以此类推，则第三次传球完毕，球在甲手中的概率是 ______ .

【答案】 $\frac{2}{9}$

【解析】



第三次传球完毕，共有$3\times9=27$种结果，球在甲手中有6种，

$\therefore$球在甲手中的概率$P=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

20. 若关于x的方程$\frac{x+1}{x+2}=\frac{a+2}{x+a}$有且只有一个实数解，则实数$a$的值是 ______ .

【答案】 $-\frac{17}{4}$

【解析】将分式方程转化为整式方程：$(x+1)(x+a)=(x+2)(a+2)$，

整理可得：$x^2-x-(a+4)=0$，

又方程有且只有一个实数解，

$\therefore \Delta=(-1)^2+4\times(a+4)=0$，

解得：$a=-\dfrac{17}{4}$．

三、解答题

（21题10分，22-26题每题12分，共70分）

21. 解方程组：$\begin{cases}3(x+y+z)-5\sqrt{x+y+z+5}+3=0\\x:y:z=3:4:5\end{cases}$．

【答案】$x=1$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$．

【解析】令 $\sqrt{x+y+z+5}=t$，则 $3t^2-5t-12=0$，

解得 $t_1=3$，$t_2=-\dfrac{4}{3}$（舍），

$\therefore x+y+z=4$，

又 $x:y:z=3:4:5$，

$\therefore \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=\dfrac{x+y+z}{12}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore x=1$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$．

22. 化简：$\dfrac{2}{x^2+3x+2}+\dfrac{2}{x^2+5x+6}+\dfrac{2}{x^2+7x+12}$，并求当 $x=\sqrt{3}-1$该分式的值．

【答案】$\sqrt{3}-1$．

【解析】原式$=\dfrac{2}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{2}{(x+3)(x+4)}$

$$=2\left[\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\frac{6}{(x+1)(x+4)},$$

将 $x=\sqrt{3}-1$代入，原式$=\sqrt{3}-1$．

23. 现有 A、 B两家旅行社开展组团去某地二日游的旅游项目，两家旅行杜报价均为每人 600元，且提供的服务完全相同， A旅行社承诺，每人都按 8.5折收费； B旅行社承诺，若人数不超过 20人，每人都按 9折收费，超过 20人，则超出部分每人按 7.5折收费．

（1）假设你已联络 35人参加两日游，请你通过计算，选择其中的一家组团旅游．

（2）假设组团参加A、B两家旅行社两日游的人数均为x（人），请分别写出A、B两家旅行社收取组团两日游的总用y（元）与x（人）之间的函数关系式．

（3）判断组团人数达到多少人时，两家旅行社实际收费相同？

【答案】（1）选B旅行社．

（2）当$0 \leqslant x \leqslant 20$时，$y = 1050x$，

当$x > 20$时，$y = 960x + 1800$．

（3）组团人数为30时，两家旅行社收费相同．

【解析】（1）A旅行社所需费用：$600 \times 35 \times 0.85 = 17850$（元），

B旅行社所需费用：$600 \times 0.9 \times 20 + 600 \times 0.75 \times 15 = 17550$（元），

$\because 17850 > 17550$，

$\therefore$选B旅行社．

（2）$y_A = 600 \times 0.85x = 510x$，

当$0 \leqslant x \leqslant 20$时，$y_B = 600 \times 0.9x = 540x$，

当$x > 20$时，$y_B = 600 \times 0.9 \times 20 + 600 \times 0.75 \times (x - 20) = 450x + 1800$，

$\therefore y_B = \begin{cases} 540x(0 \leqslant x \leqslant 20) \\ 450x + 1800(x > 20) \end{cases}$，

总费用$y = y_A + y_B$，

当$0 \leqslant x \leqslant 20$时，$y = 1050x$，

当$x > 20$时，$y = 960x + 1800$．

（3）令$y_A = y_B$，则：

当$0 \leqslant x \leqslant 20$时，$y_A < y_B$，

当$x > 20$时，$510x = 450x + 1800$，解得：$x = 30$，

$\therefore$组团人数为30时，两家旅行社收费相同．

24. 已知关于x的二次函数$y = (1 - m)x^2 + 2mx - m - 2$的图象与$x$轴有公共点．

（1）求m的取值范围．

（2）若x_1，x_2是函数图象与x轴两个不同交点的横坐标，且满足：

$(m - 1)x^2 + m(2x_1 + 1) + 2 = 4x_1x_2$．

① 求m的值．

② 当$m + 1 \leqslant x \leqslant m + 3$时，写出函数$y = (1 - m)x^2 + 2mx - m - 2$的最大值与最小值．

【答案】（1）$m \leqslant 2$且$m \neq 1$．

（2）① $m = -1$．

② 当 $x=\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$，

当 $x=2$时，$y_{\max}=3$．

【解析】（1）由题意得：$\begin{cases}1-m\neq 0\\ \Delta=(2m)^2-4(1-m)\times(-m-2)\geqslant 0\end{cases}$，

解得 $m\leqslant 2$且 $m\neq 1$．

（2）① x_1，x_2是函数图象与x轴两个交点横坐标，

则 x_1，x_2为方程 $(1-m)x^2+2mx-m-2=0$的两个不同实根，

$\therefore x_2=\frac{m+2-2mx_2}{(1-m)}$，

$\therefore 2mx_2-m-2+m(2x_1+1)+2=4x_1x_2$，

即 $2m(x_1+x_2)-4x_1x_2=0$，

又由韦达定理得：$x_1x_2=\frac{m+2}{m-1}$，$x_1+x_2=\frac{2m}{m-1}$，

$\therefore 2m\times\frac{2m}{m-1}-4\times\frac{m-2}{m-1}=0$，

即 $m^2-m-2=0$，

解得 $m_1=2$（舍），$m_2=-1$，

$\therefore m=-1$．

② 由①知 $m=-1$，又 $m+1\leqslant x\leqslant m+3$，

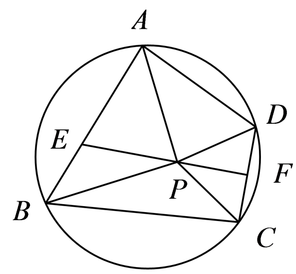
$\therefore 0\leqslant x\leqslant 2$，

$y=(1-m)x^2+2mx-m-2=2x^2-2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，

$\therefore$当 $x=\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$，

当 $x=2$时，$y_{\max}=3$．

25. 如图，已知给定的四边形 $ABCD$是圆的内接四边形，$AB>CD$，点 E、F分别为 AB、CD边上的两个点，P为线段 EF上的点，满足：$\frac{PF}{PE}=\frac{FD}{EB}=\frac{CD}{AB}$，求证：$S_{\triangle PAD}:S_{\triangle PBC}=AD:BC$．



【答案】证明见解析．

【解析】如图过点 P作 $PM\perp BC$于点 M，过点 P作 $PN\perp AD$于点 N，

延长 AD、BC于点 Q，连接 PQ，FQ，EQ，

∵四边形 $ABCD$为圆的内接四边形，

$\therefore \angle A + \angle BCD = 180°$，

$\angle B + \angle ADC = 180°$，

又 $\angle BCD + \angle DCQ = 180°$，

$\angle ADC + \angle CDQ = 180°$，

$\therefore \angle A = \angle DCQ$，$\angle B = \angle CDQ$，

$\therefore \triangle ABQ \backsim \triangle CDQ$，

$\therefore \dfrac{DQ}{BQ} = \dfrac{CQ}{AQ} = \dfrac{CD}{AB}$，

又 $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{FD}{EB} = \dfrac{CD}{AB}$，

$\therefore \dfrac{DQ}{BQ} = \dfrac{FD}{EB}$，$\dfrac{DQ}{BQ} = \dfrac{FD}{EB}$，

又 $\angle FDQ = \angle EBQ$，

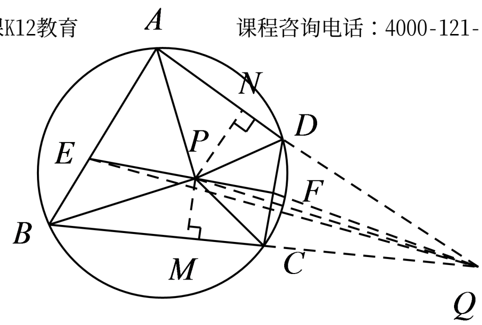
$\therefore \triangle FDQ \backsim \triangle EBQ$，

$\therefore \angle FQD = \angle EQB$，

又 $\dfrac{DQ}{BQ} = \dfrac{FD}{EB}$，

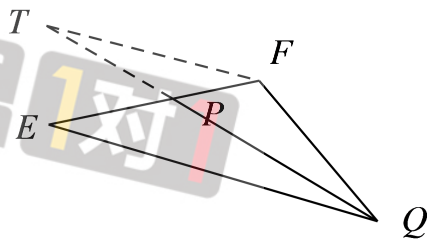
$\therefore \triangle DFQ \backsim \triangle BEQ$，

$\therefore \dfrac{FQ}{EQ} = \dfrac{DF}{BE} = \dfrac{PF}{PE}$，



如图，在 $\triangle EFQ$中，$\dfrac{FQ}{EQ} = \dfrac{PF}{PE}$，

过 F作 $FT//EQ$交 QP延长线于点 T，



$\therefore \triangle TPF \backsim \triangle QPE$，

$\therefore \dfrac{EP}{FP} = \dfrac{EQ}{TF}$，

又 $\dfrac{EP}{FD} = \dfrac{EQ}{FQ}$，

$\therefore \dfrac{EQ}{TF} = \dfrac{EQ}{FQ}$，

$\therefore QF = TF$，

$\therefore \angle EQP = \angle FQP$，

$\therefore \angle EQP + \angle EQB = \angle FQP + \angle FQD$，

即 $\angle BQP = \angle DQP$，

即 PQ平分 $\angle BQA$，

$\therefore PM = PN$，

又 $S_{\triangle PAD} = \dfrac{1}{2} \times PN \times AD$，$S_{\triangle PBC} = \dfrac{1}{2} \times BC \times PM$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PAD}}{S_{\triangle PBC}} = \dfrac{\frac{1}{2}PN \cdot AD}{\frac{1}{2}BC \cdot PM} = \dfrac{AD}{PM}$，

即 $S_{\triangle PAD} : S_{\triangle PBC} = AD : PM$．

26. 若函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$的最小值为 1，其图象与直线 $y_2 = 2x$有且只有一个公共点 $P(1, 2)$．

（1）求该二次函数的表达式．

（2）若新函数 $y=y_1+|x-m|$，求该新函数（x为自变量）的最小值．

【答案】（1）$y_1=x^2+1$．

（2）$m\leqslant-\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=\frac{3}{4}-m$，

$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=m^2+1$，

$m\geqslant\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=\frac{3}{4}+m$．

【解析】（1）点 $P(1,2)$在二次函数图象上，

$\therefore a+b+c=2$①，

又最小值为 1，

$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a}=1$②，

又图象与直线只有一个公共点，

∴联立得：$ax^2+(b-2)x+c=0$，

$\Delta=(b-2)^2-4ac=0$③，

解①②③可得：

$a=1$，$b=0$，$c=1$，

$\therefore y_1=x^2+1$．

（2）$y=y_1+|x-m|=x^2+1+|x-m|$，

当 $x\geqslant m$时，$y=x^2+x+1-m$，

若 $m\leqslant-\frac{1}{2}$，此时 $y_{\min}=\frac{3}{4}-m$，

若 $m>-\frac{1}{2}$，此时 $y_{\min}=m^2+1$．

当 $x\leqslant m$时，$y=x^2+1+m-x$，

若 $m<\frac{1}{2}$，此时 $y_{\min}=m^2+1$，

若 $m\geqslant\frac{1}{2}$时，此时 $y_{\min}=\frac{3}{4}+m$．

综上所述，$m\leqslant-\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=\frac{3}{4}-m$，

$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=m^2+1$，

$m\geqslant\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=\frac{3}{4}+m$．