2020 年高三【地市联考】精选模拟卷 08

数学（文）

（本试卷满分 150 分，考试用时 120 分钟）

第 I 卷（选择题）

一、单选题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.（2020·宁夏贺兰县景博中学高三（文））若 $z=\frac{2}{1-i}+2i$，则 $|z|=$（　　）

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．10　　D．$\sqrt{10}$

【答案】D

【解析】

【分析】先化简 $z=\frac{2}{1-i}+2i=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+2i=1+i+2i=1+3i$，再代入模的公式求解.

【详解】因为 $z=\frac{2}{1-i}+2i=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+2i=1+i+2i=1+3i$，所以 $|z|=\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}$.故选：D

【点睛】本题主要考查复数的运算和复数的模，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

2.（2020·湖北高三（文））已知集合 $M=\{x|-1<x<2\}$，$N=\{x|x(x+3)\leq 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．[－3，2）　　B．（－3，2）　　C．（－1，0]　　D．（－1，0）

【答案】C

【解析】

【分析】先化简 $N=\{x|x(x+3)\leq 0\}=\{x|-3\leq x\leq 0\}$，再根据 $M=\{x|-1<x<2\}$，求两集合的交集.

【详解】因为 $N=\{x|x(x+3)\leq 0\}=\{x|-3\leq x\leq 0\}$，又因为 $M=\{x|-1<x<2\}$，所以 $M\cap N=\{x|-1<x\leq 0\}$.

【点睛】本题主要考查集合的基本运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

3.（2020·山西高三月考（文））已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-2, x>0\\ x-2, x\leq 0\end{cases}$，若 $f(a)+f(1)=0$，则实数 a 的值等于（　　）

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

【答案】C

【解析】

【分析】按$a>0,a\le 0$分类讨论.

【详解】$f(a)+f(1)=0\therefore f(a)=-f(1)=0$，当$a>0$时，$2a-2=0$，$\therefore a=1$，当$a\le 0$时，$a-2=0$，$\therefore a=2$（舍弃）.故选：C.

【点睛】本题考查分段函数，分段函数求函数值时要根据自变量的取值范围的不同选用不同的表达式.

4.（2020·赣州市赣县第三中学高三月考（文））我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题，大概意思如下：在下雨时，用一个圆台形的天池盆接雨水，天池盆盆口直径为 2 尺 8 寸，盆底直径为 1 尺 2 寸，盆深 1 尺 8 寸.若盆中积水深 9 寸，则平均降雨量是（注：①平均降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积；②1 尺等于 10 寸；③台体的体积$V=\frac{1}{3}\left(s_{上}+s_{下}+\sqrt{s_{上}s_{下}}\right)h$）（　　）

A．3 寸　　B．4 寸　　C．5 寸　　D．6 寸

【答案】A

【解析】

【分析】作出圆台的轴截面,根据已知条件,利用圆台体积公式可求得盆中积水体积,再求出盆口面积,根据平均降水量的定义可求得结果.

【详解】作出圆台的轴截面如图所示:由题意知,$BF=14$寸,$OC=6$寸,$OF=18$寸,$OG=9$寸,

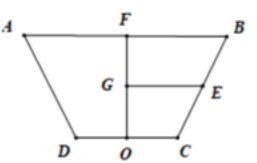
即G是OF的中点,$\therefore GE$为梯形$OCBF$的中位线,

$\therefore GE=\frac{14+6}{2}=10$寸,即积水的上底面半径为10寸,

$\therefore$盆中积水的体积为$\frac{1}{3}\pi\times(100+36+10\times 6)\times 9=588\pi$（立方寸）,

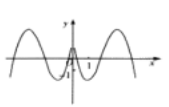
又盆口的面积为$14^2\pi=196\pi$（平方寸）,

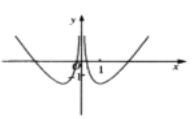
$\therefore$平均降雨量是$\frac{588\pi}{196\pi}=3$寸,即平均降雨量是3寸,故选:A

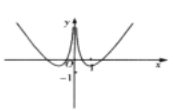


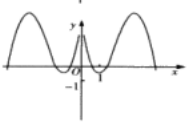
【点睛】本题考查圆台体积的有关计算,关键是能够根据轴截面得到所求圆台的上下底面半径和高,考查运算能力.

5.（2020·山西高三月考（文））函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|-1$的大致图象为（　　）

A.


B.


C.


D.


【答案】C

【解析】

【分析】由$f(-x)=f(x)$得到$f(x)$为偶函数，所以当$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x-1$，求导讨论其单调性，分析其极值就可以得到答案.

【详解】因为$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-\ln|-x|-1=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，则当$x>0$时，

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x-1$.此时$f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$，当$x>1$时，$f'(x)>0$　　当$0<x<1$时，$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.在$x>0$上，当$x=1$时函数$f(x)$有最小值

$f(1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}>-1$.由$f(x)$为偶函数，根据选项的图像C符合.故选：C

【点睛】本题考查根据函数表达式选择其图像的问题，这类问题主要是分析其定义域、值域、奇偶性、对称性、单调性和一些特殊点即可.属于中档题.

6.（2020鄂尔多斯市第一中学高三（文））图1是某学习小组学生数学考试成绩的茎叶图，1号到16号的同学的成绩依次为A_1，A_2，…，A_{16}，图2是统计茎叶图中成绩在一定范围内的学生情况的程序框图，那么该程序框图输出的结果是（　　）

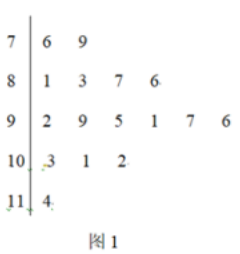


图1

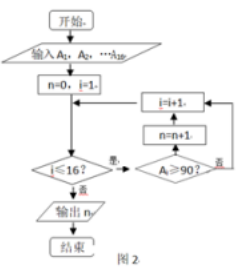


图2

A．10　　B．6　　C．7　　D．16

【答案】A

【解析】

【分析】先弄清楚程序框图中是统计成绩不低于90分的学生人数，然后从茎叶图中将不低于90分的个数数出来，即为输出的结果.

【详解】$A_1=76$，$i=1$，$i\le 16$成立，$A_1\ge 90$不成立，$i=1+1=2$；$A_2=79$，$i=2$，$i\le 16$成立，$A_2\ge 90$

不成立，$i=1+1=2$；$\llcorner\llcorner\llcorner$ $A_7=92$，$i=7$，$i\le16$成立，$A_7\ge90$成立，$n=0+1=1$，$i=7+1=8$；$\llcorner\llcorner\llcorner$ 依此类推，上述程序框图是统计成绩不低于90分的学生人数，从茎叶图中可知，不低于90分的学生数为10，故选A．

【点睛】本题考查茎叶图与程序框图的综合应用，理解程序框图的意义，是解本题的关键，考查理解能力，属于中等题．

7．（2020·海南高三）将函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个长度单位后得函数$g(x)$的图象，则函数$g(x)$的图象的一条对称轴方程为（　　）

A．$x=\frac{\pi}{4}$　　B．$x=\frac{3\pi}{4}$　　C．$x=-\frac{7\pi}{2}$　　D．$x=-\frac{5\pi}{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】由三角函数的平移变换原则可得$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos2x$,进而求解对称轴即可.

【详解】由题意,$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos2x$,令$2x=k\pi(k\in Z)$,则$g(x)$的对称轴方程为$x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$,当$k=-7$时,可得对称轴方程为$x=-\frac{7\pi}{2}$,故选:C

【点睛】本题考查三角函数图象的平移变换,考查余弦型函数的对称性.

8．（2020·湖南长郡中学高三月考（文））在△ABC中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overline{EB}=$

A．$\frac{3}{4}\overline{AB}-\frac{1}{4}\overline{AC}$　　B．$\frac{1}{4}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AC}$

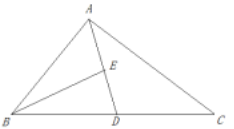
C．$\frac{3}{4}\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AC}$　　D．$\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{AC}$

【答案】A

【解析】

分析：首先将图画出来，接着应用三角形中线向量的特征，求得$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BA}+\frac{1}{2}\overline{BC}$，之后应用向量的加法运算法则------三角形法则，得到$\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$，之后将其合并，得到$\overline{BE}=\frac{3}{4}\overline{BA}+\frac{1}{4}\overline{AC}$，下一步应用相反向量，求得$\overline{EB}=\frac{3}{4}\overline{AB}-\frac{1}{4}\overline{AC}$，从而求得结果.

详解：根据向量的运算法则，可得



$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 A.

点睛：该题考查的是有关平面向量基本定理的有关问题，涉及到的知识点有三角形的中线向量、向量加法的三角形法则、共线向量的表示以及相反向量的问题，在解题的过程中，需要认真对待每一步运算.

9.（2020·海南高三）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_2=16,a_1=64a_4$，数列$\left\{\sqrt{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_6$等于（　　）

A．$\frac{63}{4}$　　B．$\frac{63}{16}$　　C．$\frac{63}{8}$　　D．$\frac{63}{32}$

【答案】A

【解析】

【分析】由$a_2=16,a_1=64a_4$，可得等比数列$\{a_n\}$的首项a_1和公比q，进而可求得数列$\left\{\sqrt{a_n}\right\}$的首项和公比，然后套用等比数列的求和公式，即可得到本题答案.

【详解】设数列$\{a_n\}$的公比为q，由题知，$1=64q^3$，解得$q=\frac{1}{4},a_1=\frac{a_2}{q}=64,\sqrt{a_1}=8,\sqrt{q}=\frac{1}{2}$，所以数列$\left\{\sqrt{a_n}\right\}$是以 8 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，所以$S_6=\frac{8\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{4}$. 故选：A.

【点睛】本题主要考查等比数列的通项公式与求和公式的综合应用，考查计算能力，属于基础题.

10.（2020·湖南浏阳一中高三月考（文））若$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$(\sin A-\sin B)^2=\sin^2 C-\sin A\sin B$，则角$C$为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】将已知关系化简并整理得到 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\cdot\sin B$，由正弦定理角化边得 $a^2+b^2-c^2=ab$，再由角 C 的余弦定理，求得角 C 的余弦值，可得角 C 的大小.

【详解】因为 $(\sin A-\sin B)^2=\sin^2 C-\sin A\sin B$ 整理得 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\cdot\sin B$，由正弦定理得 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以角 C 的余弦定理为 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，所以角 C 为 $\dfrac{\pi}{3}$，故选：B

【点睛】本题考查由正弦定理与余弦定理解三角形，属于中档题.

11.（2020·安徽六安一中高三月考（文））已知 F_1,F_2 是双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 是双曲线 E 右支上一点，M 是线段 F_1P 的中点，O 是坐标原点，若 $\triangle OF_1M$ 周长为 $c+3a$（c 为双曲线的半焦距），$\angle F_1MO=\dfrac{\pi}{3}$，则双曲线 E 的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm 2x$　　B．$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　C．$y=\pm\sqrt{2}x$　　D．$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

【答案】C

【解析】

【分析】从 $\triangle OF_1M$ 周长为 $c+3a$，M 是线段 F_1P 的中点入手，结合双曲线的定义，将已知条件转为焦点三角形中 $|PF_1|,|PF_2|$ 与 a 关系，求出 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，用余弦定理求出 a,c 关系，即可求解.

【详解】连接 PF_2，因为 M 是线段 F_1P 的中点，由三角形中位线定理知 $|OM|=\dfrac{1}{2}|PF_2|$，$OM//PF_2$，由双曲线定义知 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，因为 $\triangle OF_1M$ 周长为 $|OF_1|+|OM|+|F_1M|=c+\dfrac{1}{2}|PF_1|+\dfrac{1}{2}|PF_2|=c+3a$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=6a$，解得 $|PF_1|=4a,|PF_2|=2a$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，即 $(2c)^2=(4a)^2+(2a)^2-2\times 4a\times 2a\cos\dfrac{\pi}{3}$，整理得，$c^2=3a^2$，所以 $b^2=c^2-a^2=2a^2$，所以双曲线 E 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.故选:C.

【点睛】本题考查双曲线的简单几何性质，考查三角形中位线定理、双曲线定义以及余弦定理的应用，属于中档题.

12.（2020·福建高三月考（理））在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$AB\perp AC,AB=6,AC=8$，D 是

线段 AC 上一点，且 $AD=3DC$.三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 表面上，过点 D 作球 O 的截面，若所得截面圆的面积的最大值与最小值之差为 16π，则球 O 的表面积为（　　）

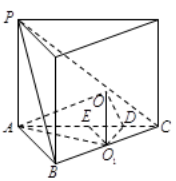
A．72π　　B．86π　　C．112π　　D．128π

【答案】C

【解析】

【分析】将三棱锥 $P-ABC$ 补成直三棱柱，根据球的性质，确定球心位置，要使过点 D 作球 O 的截面圆的面积最小，只需截面与 OD 垂直，当截面过球心时，截面面积最大，即可求解.

【详解】将三棱锥 $P-ABC$ 补成直三棱柱，且三棱锥和该直三棱柱的外接球都是球 O，记三角形 ABC 的中心为 O_1，设球的半径为 R，$PA=2x$，则球心 O 到平面 ABC 的距离为 x，即 $OO_1=x$，连接 O_1A，则 $O_1A=5$，$\therefore R^2=x^2+25$.在 $\triangle ABC$ 中，取 AC 的中点为 E，连接 O_1D，O_1E，则 $O_1E=\frac{1}{2}AB=3$，$DE=\frac{1}{4}AC=2$，所以 $O_1D=\sqrt{13}$.在 $Rt\triangle OO_1D$ 中，$OD=\sqrt{x^2+13}$，由题意得到当截面与直线 OD 垂直时，截面面积最小，设此时截面圆的半径为 r，则 $r^2=R^2-OD^2=x^2+25-\left(x^2+13\right)=12$，所以最小截面圆的面积为 12π，当截面过球心时，截面面积最大为 πR^2，所以 $\pi R^2-12\pi=16\pi$，$R^2=28$，球的表面积为 $4\pi R^2=112\pi$.故选:C.



【点睛】本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系，球体与截面等基础知识，确定球心是解题的关键，属于中档题.

第 II 卷（非选择题）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在题中的横线上。

13．（2020·山西高三月考（文））已知函数 $f(x)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$，则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为_____.

【答案】1

【解析】$\because f'(x)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x+\cos x$，$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$，解得 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$，

故 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，故答案为1.

14．(2020·河南高三（文）) 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}-a_n=2$，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列.若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_n 的最小值为_____.

【答案】 -20

【解析】

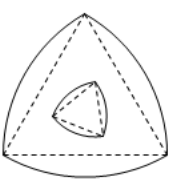
【分析】利用等比中项性质可得等差数列的首项，进而求得 S_n，再利用二次函数的性质，可得当 $n=4$ 或 5 时，S_n 取到最小值.

【详解】根据题意，可知 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=2$，由 a_1,a_3,a_4 成等比数列，可得 $a_3^2=a_1a_4$，

$\therefore(a_1+4)^2=a_1(a_1+6)$，解得 $a_1=-8$ $\therefore S_n=-8n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-9n=(n-\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4}$.根据单调性，可知当 $n=4$ 或 5 时，S_n 取到最小值，最小值为 -20.故选：D.

【点睛】本题考查等差数列通项公式、等比中项性质、等差数列前 n 项和的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意当 $n=4$ 或 5 时同时取到最值.

15．(2020·福建高三月考（文）) 勒洛三角形是具有类似圆的“定宽性”的曲线，它是由德国机械工程专家、机构运动学家勒洛首先发现，其作法是：以等边三角形每个顶点为圆心，以边长为半径，在另两个顶点间作一段弧，三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形.如图中的两个勒洛三角形，它们所对应的等边三角形的边长比为 $1:3$，若从大的勒洛三角形中随机取一点，则此点取自小勒洛三角形内的概率为_____.



【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】设图中的小的勒洛三角形所对应的等边三角形的边长为 a，分别求出大小勒洛三角形面积，其比值为所求.

【详解】设图中的小的勒洛三角形所对应的等边三角形的边长为 a，则小勒洛三角形的面积为

$S_1=3\times\frac{\pi a^2}{6}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{(\pi-\sqrt{3})a^2}{2}$，因为大小两个勒洛三角形，它们所对应的等边三角形的边长比为$1:3$，

所以大勒洛三角形的面积为$S_2=\frac{(\pi-\sqrt{3})(3a)^2}{2}=\frac{9(\pi-\sqrt{3})a^2}{2}$，若从大的勒洛三角形中随机取一点，

则此点取自小勒洛三角形内的概率为$P=\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{9}$.故答案为:$\frac{1}{9}$.

【点睛】本题主要考查概率与几何概型、平面几何等基础知识，考查阅读能力与应用意识和创新能力，属于中档题.

16.（2020·安徽六安一中高三月考（文））已知过抛物线$G:y^2=4x$的焦点F的直线l交抛物线自下到上于A、B，C是抛物线G准线上一点，若$\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AF}$，则以$AF$为直径的圆的方程为_____.

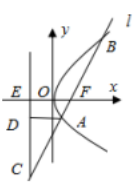
【答案】$(x-\frac{2}{3})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】过A作抛物线准线的垂线，垂足为D，结合抛物线定义得出$|AD|=|AF|$，再由$\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AF}$，得出$|AC|=2|AF|$，从而得出$\triangle EFC\backsim\triangle DAC$，根据相似三角形的性质得出$|FA|=|DA|=\frac{4}{3}$，结合抛物线方程得出点A的坐标，再由$A,F$的坐标得出圆心坐标，即可得出以$AF$为直径圆的方程.

【详解】过A作抛物线准线的垂线，垂足为D，设准线交x轴于点E，由抛物线定义知，$|AD|=|AF|$

因为$\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AF}$，所以点$C$在直线$l$上，且$|AC|=2|AF|$，显然$\triangle EFC\backsim\triangle DAC$，所以$\frac{EF}{DA}=\frac{FC}{AC}$，即$\frac{2}{DA}=\frac{3}{2}$，所以$|FA|=|DA|=\frac{4}{3}$，即$1+x_A=\frac{4}{3}$，所以$x_A=\frac{1}{3}$，所以$y_A=-\sqrt{4x_A}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$FA$的中点即圆心坐标为$(\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$，所以以$AF$为直径圆的方程为$(x-\frac{2}{3})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{9}$.



【点睛】本题主要考查了求直线与抛物线的交点坐标以及由圆心和半径求圆的方程，属于中档题.

三、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.第17-21题为必做题,每个考生都必须作答.第22/23题为选考题，考生根据要求作答.

（一） 必考题：共 60 分

17.（本小题满分 12 分）（2020·宜宾市叙州区第二中学校高三期末（文））某校高三共有 1000 位学生，为了分析某次的数学考试成绩，采取随机抽样的方法抽取了 50 位高三学生的成绩进行统计分析，得到如图所示频数分布表：

分组	$[50,70)$	$[70,90)$	$[90,110)$	$[110,130)$	$[130,150]$
频数	3	11	18	12	6

（1）根据频数分布表计算成绩在$[90,110)$的频率并计算这组数据的平均值$\overline{x}$（同组的数据用该组区间的中点值代替）；

（2）用分层抽样的方法从成绩在$[90,110)$和$[110,130)$的学生中共抽取 5 人，从这 5 人中任取 2 人，求成绩在$[90,110)$和$[110,130)$中各有 1 人的概率.

【答案】（1）0.36　　102.8　　（2）$P(A)=\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】（1）根据频率分布表知成绩在$[90,100)$内的人数，即可求解其概率，再根据平均数的计算公式，即可求解平均数；

（2）根据分层抽样得应在$[90,110)$和$[110,130)$中分别抽取 3 人和 2 人，利用列举法求得基本事件的总数和所求事件包含基本事件的个数，利用古典概型的概率计算公式，即可求解.

【详解】（1）根据频率分布表知成绩在$[90,100)$内的概率为$\frac{18}{50}=0.36$，

$\overline{x}=0.06\times60+0.22\times80+0.36\times100+0.24\times120+0.12\times140=102.8$.

（2）根据分层抽样得应在$[90,110)$和$[110,130)$中分别抽取 3 人和 2 人，将$[90,110)$中的 3 人编号为 1，2，3，将$[110,130)$中的 2 人编号为a，b，则此事件中的所有基本事件为$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,a)$，$(1,b)$，$(2,3)$，$(2,a)$，$(2,b)$，$(3,a)$，$(3,b)$，(a,b)，共 10 个，记成绩在$[90,110)$和$[110,130)$中各有 1 人为事件A，事件A包含的基本事件有 6 个，则$P(A)=\frac{3}{5}$.

【点睛】本题主要考查了频率分布表的应用，以及古典概型及其概率的计算问题，其中解答中熟记频率分布表中的频率与平均数的计算公式，以及准确利用列举法求得基本事件的总数是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

18.（本小题满分 12 分）（2020·海南高三）在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\sin A+2\sin B\cos(\pi-C)=0$.

（1）判断 ΔABC 的形状；

（2）若 $\cos A=\frac{7}{9}$，ΔABC 的周长为 16，求 ΔABC 外接圆的面积.

【答案】（1）等腰三角形；（2）$\frac{81\pi}{8}$

【解析】

【分析】（1）结合诱导公式及和差公式化简，即可得到本题答案；

（2）由 $b=c,\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}=\frac{7}{9}$，得 $3a=2b$，结合 ΔABC 的周长为 16，可求得 a,b,c，又由 $\cos A=\frac{7}{9}$，求得 $\sin A$，然后根据 $2R=\frac{a}{\sin A}$，即可得到本题答案.

【详解】

（1）因为 $\sin A+2\sin B\cos(\pi-C)=0$，所以 $\sin(B+C)-2\sin B\cos C=0$，

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin B\cos C=0$，

所以 $\cos B\sin C-\sin B\cos C=0$，即 $\sin(C-B)=0$，又因为 B,C 为 ΔABC 的内角，

所以 $B=C$，即 ΔABC 为等腰三角形；

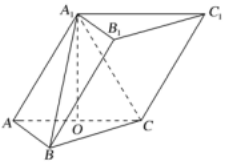
（2）由（1）知，$b=c,\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}=\frac{7}{9}$，解得 $3a=2b$，

又因为 $a+b+c=16$，解得 $a=4,b=c=6$，因为 $\cos A=\frac{7}{9},A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，

设 ΔABC 外接圆的半径为 R，所以 $2R=\frac{4}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$，解得 $R=\frac{9}{2\sqrt{2}}$，故 ΔABC 外接圆的面积为 $\frac{81\pi}{8}$.

【点睛】本题主要考查利用诱导公式及和差公式恒等变形判断三角形的形状，以及利用余弦定理解三角形.

19.（本小题满分 12 分）（2020·宁夏大学附属中学高三月考（文））在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $AA_1C_1C\perp$ 底面 ABC，$AA_1=A_1C=AC=AB=BC=2$，且点 O 为 AC 中点.



(1)证明：$A_1O\perp$平面ABC；

(2)求三棱锥C_1-ABC的体积.

【答案】（1）证明见解析；（2）1.

【解析】

试题分析：（1）利用等腰三角形的性质可得$A_1O\perp AC$，利用面面垂直的性质可得$A_1O\perp$平面ABC，根据线面垂直的性质可得结论；(2)先证明$A_1C_1\|$平面ABC，可得C_1到平面ABC的距离等于A_1到平面ABC的距离，利用等积变换及棱锥的体积公式可得$V_{C_1-ABC}=V_{A-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1O=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

试题解析：（1）$\because AA_1=A_1C$，且O为AC的中点.$\therefore A_1O\perp AC$.

又$\because$平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$，且$A_1O\subset$平面AA_1C_1C，

$\therefore A_1O\perp$平面ABC.$\because BC\subset$平面ABC，$\therefore A_1O\perp BC$.

（2）$\because A_1C_1\|AC$，$A_1C_1\not\subset$平面ABC，$AC\subset$平面ABC，$\therefore A_1C_1\|$平面ABC.

即C_1到平面ABC的距离等于A_1到平面ABC的距离.

由（1）知$A_1O\perp$平面ABC且$A_1O=\sqrt{AA_1^2-AO^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore$三棱锥C_1-ABC的体积$V_{C_1-ABC}=V_{A-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1O=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

20.（本小题满分 12 分）（2020·赣州市赣县第三中学高三月考（文））已知函数$f(x)=-x^3+x^2+b$，$g(x)=a\ln x$.

（1）若$f(x)$在$x\in\left[-\frac{1}{2},1\right)$上的最大值为$\frac{3}{8}$，求实数$b$的值；

（2）若对任意$x\in[1,e]$，都有$g(x)\geq-x^2+(a+2)x$恒成立，求实数a的取值范围.

【答案】（1）$b=0$.（2）$a\le -1$

【解析】试题分析：(1) 求出函数$f(x)$的导函数，解出函数的单调区间，通过研究函数的极值和边界值得到函数的最大值，求出实数b的值；

(2)把$g(x)\ge -x^2+(a+2)x$ 整理，分离出参数a,得到$a\le \dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}$，把右边构造一个函数$t(x)$ ，求出$t(x)$的最小值，问题可解.

试题解析：（1）由$f(x)=-x^3+x^2+b$，得$f'(x)=-3x^2+2x=-x(3x-2)$，

令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\dfrac{2}{3}$.函数$f'(x)$，$f(x)$在$\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$上的变化情况如下表：

x	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},1\right)$
$f'(x)$		−	0	+	0	−
$f(x)$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

$\because f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}+b$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}+b$，$\therefore f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

即最大值为$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}+b=\dfrac{3}{8}$，$b=0$.

（2）由$g(x)\ge -x^2+(a+2)x$，得$(x-\ln x)a\le x^2-2x$.

$\because x\in[1,e]$，$\ln x\le 1\le x$，且等号不能同时取得，$\therefore \ln x<x$，即$x-\ln x>0$.

$\therefore a\le \dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}$恒成立，即$a\le \left(\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}\right)_{min}$.令$t(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}$，$x\in[1,e]$，

则$t'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$.当$x\in[1,e]$时，$x-1\ge 0$，$\ln x\le 1$，$x+2-2\ln x>0$，从而$t'(x)\ge 0$.

$\therefore t(x)$在区间$[1,e]$上为增函数，$\therefore t(x)_{min}=t(1)=-1$，$a\le -1$.

21.（本小题满分 12 分）（2020·湖南长沙一中高三月考（文））已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率

为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，与x轴交于点A_1，A_2，过x轴上一点Q引x轴的垂线，交椭圆C于点P_1，P_2，当Q与椭圆右焦点重合时，$|P_1P_2|=1$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设直线A_1P_1与直线A_2P_2交于点P，是否存在定点M和N，使$||PM|-|PN||$为定值.若存在，求M、N点的坐标；若不存在，说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$（2）存在，M为$(-\sqrt{5},0)$，$N(\sqrt{5},0)$.

【解析】

【分析】

（1）P_1P_2是椭圆的通径，由此已知条件可表示为a,b,c的两个等式，结合$a^2=b^2+c^2$可求得a,b，得椭圆方程；

（2）设P点坐标为(x_P,y_P)，$P_1(x_0,y_0)$，$P_2(x_0,-y_0)$，不妨设$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$．P在直线A_1P_1可得x_P,y_P,x_0,y_0的关系，同理由P在直线A_2P_2又得一关系式，消去x_0,y_0可得P点轨迹方程，轨迹是双曲线，由双曲线定义可作答.

【详解】

（1）由题知：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{2b^2}{a}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，故椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）设P点坐标为(x_P,y_P)，$P_1(x_0,y_0)$，$P_2(x_0,-y_0)$，不妨设$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$.

则P，P_1，A_1三点共线，$\frac{y_P}{x_P+2}=\frac{y_0}{x_0+2}$，①　同理：$\frac{y_P}{x_P-2}=\frac{-y_0}{x_0-2}$，②

①×②得：$\frac{y_P^2}{x_P^2-4}=\frac{-y_0^2}{x_0^2-4}$，又$P_1$在椭圆上，$y_0^2=\frac{1}{4}(4-x_0^2)$，代入整理得：$\frac{x_P^2}{4}-y_P^2=1$.

即P点的轨迹为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，取M、N为该双曲线的左、右焦点.

即$M(-\sqrt{5},0)$，$N(\sqrt{5},0)$．此时$||PM|-|PN||=4$为定值，故M为$(-\sqrt{5},0)$，$N(\sqrt{5},0)$．

【点睛】本题考查求椭圆的标准方程，考查直线与椭圆相交的定值问题．本题解法是求出动点P的轨迹方程，由轨迹方程确定图形为双曲线，由双曲线定义可得结论．

（二）选考题：共 10 分.请考生在 22,23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

（2020·广西高三月考（理））在直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=t\\y=4-2t\end{cases}$（$t$为参数）.以坐标原点为极点，以$x$轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{2}{1+\cos^2\theta}$.

（1）求直线l的普通方程和曲线C的直角坐标方程；

（2）设点P在直线l上，点Q在曲线C上，求$|PQ|$的最小值.

【答案】（1）$y=4-2x$，$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$；（2）$\dfrac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{5}$.

【解析】

【分析】

（1）消参可得直线的普通方程，由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$可求出曲线$C$的直角坐标方程.

（2）设点Q的坐标为$\left(\cos\beta,\sqrt{2}\sin\beta\right)$，利用点到直线的距离公式以及辅助角公式即可求解.

【详解】

（1）直线l的普通方程为$y=4-2x$，曲线C的极坐标方程化为直角坐标方程为$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）曲线的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$，设点$Q$的坐标为$\left(\cos\beta,\sqrt{2}\sin\beta\right)$

$$|PQ|=\frac{\left|2\cos\beta+\sqrt{2}\sin\beta-4\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\sqrt{6}\sin(\beta+\varphi)-4\right|}{\sqrt{5}}\geq\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{5}$$

故$|PQ|$的最小值为$\dfrac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{5}$.

【点睛】本题考查了参数方程、极坐标方程与普通方程的互化，点到直线的距离公式、辅助角公式以及三角函数的性质，属于基础题.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

（2020·福建省福州第一中学高三期末（文））（1）解不等式$|3-2x|>5$；

（2）若$\forall x\in[1,2]$，$x-|x-a|\leq 1$成立，求常数a的取值范围.

【答案】（1）$\{x|x>4$或$x<-1\}$（2）$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）利用绝对值不等式的几何意义即得解；

（2）问题转化为$(a-1)(a-2x+1)\geq 0$，通过讨论a的范围求出不等式的解集，从而求出a的范围.

【详解】（1）由$|3-2x|>5$，得$|2x-3|>5$，所以$2x-3>5$或$2x-3<-5$

解得：$x>4$或$x<-1$，故不等式的解集为：$\{x|x>4$或$x<-1\}$

（2）由已知得：$|x-a|\geq x-1\geq 0\therefore(x-a)^2\geq(x-1)^2$，$\therefore(a-1)(a-2x+1)\geq 0$

当$a=1$时，$(a-1)(a-2x+1)\geq 0$恒成立；

当$a>1$时，$(a-1)(a-2x+1)\geq 0$即$a\geq 2x-1$，从而$a\geq 3$；

当$a<1$时，$(a-1)(a-2x+1)\geq 0$即$a\leq 2x-1$，从而$a\leq 1$；

综上：a的取值范围是：$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

【点睛】本题考查了绝对值不等式的解法及恒成立问题，考查了学生综合分析，转化划归，分类讨论的能力，属于中档题.