2020春·华一高·高二数学期中试题解析

——学而思·冯俊豪杰，甘沐煜，刘作明

一、选择题

1. B（甲乙相邻：$A_3^3 \cdot A_2^2 = 12$，甲乙相邻且甲在最左边：$A_2^2 = 2$，则所求：$12-2=10$种）

2. A（残差平方和越大，R^2越小，拟和效果越差）

3. D（OM与弦垂直，$k_{OM}=\frac{1}{2}$，则弦的方程：$2x+y-5=0$）

4. D（$P(X<6-m)=P(X>m)=0.3$，则$P(X\geq 6-m)=1-0.3=0.7$）

5. A（可知：$f'(x)=2f'(1)+\frac{1}{x}$，则$f'(1)=2f'(1)+1 \Rightarrow f'(1)=-1$，则$f(1)=2f'(1)-1=-3$）

6. B（设实根为x_0，则$x_0^2+(k+2i)x_0+1+ki=0 \Rightarrow (2x_0+k)i+x_0^2+kx_0+1=0$

$\Rightarrow 2x_0+k=0$且$x_0^2+kx_0+1=0$，解得：$k^2=4$）

7. D（$V=V_{圆柱}+V_{四棱锥}=\pi\cdot 1^2\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=2\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}$）

8. C（可知：$E(\xi_1)=10p$，$E(\xi_2)=10q$，$D(\xi_1)=10p(1-p)$，$D(\xi_2)=10q(1-q)$

若$E(\xi_1)>E(\xi_2) \Rightarrow 10p>10q \Rightarrow p>q$

若$D(\xi_1)<D(\xi_2) \Rightarrow 10p(1-p)<10q(1-q) \Rightarrow (p-q)(1-p-q)<0$

又$p+q\geq 2\sqrt{pq}>1$ $\therefore p-q>0 \Rightarrow p>q$，则$E(\xi_1)>E(\xi_2) \nRightarrow D(\xi_1)<D(\xi_2)$）

9. B（①当MN不过原点时，设MN中点$P(x_0,y_0)$，由点差法结论：$k_{OP}\cdot k_{MN}=2$，则$k_{OP}=-2$

则$\frac{y_0}{4x_0^2}=\frac{4}{y_0}=-2$ $\therefore y_0=-2$ $\therefore P(1,-2)$代入$x-y+m=0 \Rightarrow m=-3$.

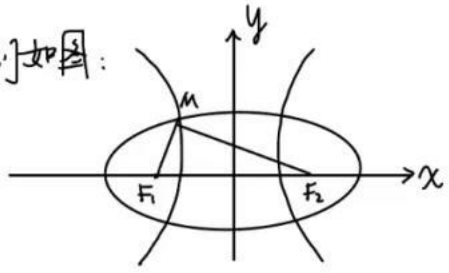
②当MN过原点时，$MN: y=-x$，对称直线$y=x$，则$m=0$. 综上：$m=-3$或0）

10. C（先排甲乙，再排其他三人：①甲乙工作相同：$C_3^1\cdot A_3^3=18$

②甲乙工作不同：分为丙丁或有1人与甲、乙工作相同，即$A_3^3(C_3^1A_2^2+C_3^1\cdot A_2^2\cdot A_2^2)=108$

则总方案：$108+18=126$种）

11. B（设焦距为$2c$，椭圆长轴$2a_1$，双曲线实轴$2a_2$，则如图：



$|MF_1|+|MF_2|=2a_1$，$|MF_2|-|MF_1|=2a_2$

$\therefore |MF_1|=a_1-a_2$，$|MF_2|=a_1+a_2$

在$\triangle MF_1F_2$中，$\cos 60^\circ=\frac{(a_1-a_2)^2+(a_1+a_2)^2-4c^2}{2(a_1-a_2)(a_1+a_2)}=\frac{1}{2}$

即$a_1^2+3a_2^2=4c^2 \Rightarrow \frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4\geq\frac{2\sqrt{3}}{e_1e_2}$ $\therefore e_1\cdot e_2\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

取等时，$e_2=\sqrt{3}e_1$即可）

学而思培优 | 武汉分校

12. (与知识无关，认真听学校网课，了解学校老师上课顺序，即可做对)

二. 填空题

13. $\frac{4}{7}$ (条件概率问题: $P=\frac{C_2^1 \cdot C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$)

14. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ (可知: $|PA|=|PB|$, 则 $|PA|+|PC|=|PB|+|PC|=|BC|=4>|AC|=2$
则点P是以(0, ±1)为焦点, 长轴为4的椭圆)

15. -210 (x^3的系数: $C_{10}^1 \cdot C_9^1 \cdot (-1)+C_{10}^3 \cdot (-1)^3=-210$)

16. 第一空: -1 ($f'(x)=\frac{1}{x+1}+2a\cos 2x$, 则 $f'(0)=1+2a=1 \quad \therefore a=-1$)

第二空: $y=x$ ($a=0$时, $f(x)=\ln(x+1)$, $g(x)=\ln x+1$. 则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $g'(x)=\frac{1}{x}$
设与$f(x)$切点为(x_1, y_1), 与$g(x)$切点为(x_2, y_2), 切线为$y=kx+b$
则 $\frac{1}{x_1+1}=\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1+1=x_2$, 又 $kx_1+b=\ln(x_1+1)$, $kx_2+b=\ln x_2+1$
作差得: $k=1 \quad \therefore x_1=0, x_2=1 \quad \therefore$ 切线方程为: $y=x$)

三. 解答题

17. 解: 可知: $M=\{1-i, 1+i, 2-i, 2+2ai, 3-ai\}$
若 $z=\bar{z}$, 则 z 为实数 $\therefore -1+1-1+2a-a=0 \quad \therefore a=1$

(1) $a=1$时, $\frac{3a-i}{1+ai}+i^3=\frac{3-i}{1+i}-i=1-2i-i=1-3i$
则 $\left|\frac{3a-i}{1+ai}+i^3\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

(2) 可知: $M=\{1-i, 1+i, 2-i, 2(1+i), 3-i\}$
任选两个元素: $C_5^2=10$, $xy \in R$的有: $1-i$与$1+i$, $1-i$与$2(1+i)$ 2种.
则 $P=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

18. 解：(1) 中位数 $m=\frac{79+81}{2}=80$

列联表如下：

	超过 m	不超过 m	总计
第一种生产方式	15	5	20
第二种生产方式	5	15	20
总计	20	20	40

(2) 可知：$K^2=\frac{(15\times15-5\times5)^2\cdot40}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$

∴有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

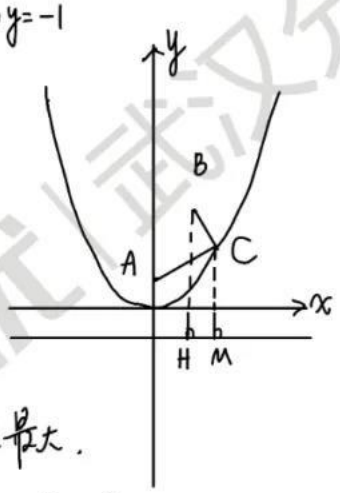
19. 解：(1) 可知：$|AB|=\sqrt{2}$，A为$x^2=4y$的焦点，准线为$y=-1$

过点C作$CM\perp y=-1$于点M，则$|CM|=|CA|$

∴$|AC|+|BC|=|CM|+|BC|\geq|BH|=3$

∴$C_{\triangle ABC}\geq3+\sqrt{2}$

即$\triangle ABC$周长最小为$3+\sqrt{2}$



(2) 设$C(x_0,\frac{1}{4}x_0^2)$，直线AB：$y=x+1$

则过点C的切线与AB平行时，$\triangle ABC$面积最大.

则$y'=\frac{1}{2}x$ ∴$\frac{1}{2}x_0=1$ ∴$x_0=2$ ∴$C(2,1)$

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}}=1$ ∴$\triangle ABC$面积最大值为1.

20. 解：可知：$2^n=256$ ∴$n=8$，令$x=1$时，$(1+a)^8=256$ ∴$a=1$或-3

(1) 第$r+1$项：$T_{r+1}=C_8^r\cdot(\sqrt{x})^{8-r}\cdot(\frac{a}{\sqrt[4]{x}})^r=C_8^r\cdot a^r\cdot x^{4-\frac{3}{4}r}$

则$r\in\mathbb{Z}$，$0\leq r\leq8$，$4-\frac{3}{4}r\in\mathbb{Z}$ ∴$r=0,4,8$

∴展开式中有理项个数为3个.

(2) 1°：当$a=1$时，系数最大项为：$T_5=C_8^4\cdot(\sqrt{x})^4\cdot(\frac{1}{\sqrt[4]{x}})^4=70x$ (二项式系数即为各项系数)

2°：当$a=-3$时，设T_{r+1}为系数最大的项，则r必为偶数

奇数项系数分别为：$C_8^0\cdot(-3)^0=1$，$C_8^2\cdot(-3)^2=252$，$C_8^4\cdot(-3)^4=5670$

$C_8^6\cdot(-3)^6=20412$，$C_8^8\cdot(-3)^8=6561$

则最大项为$T_7=C_8^6\cdot(\sqrt{x})^2\cdot(\frac{-3}{\sqrt[4]{x}})^6=\frac{20412}{\sqrt{x}}$ (也可列不等式组，计算太繁琐)

学而思培优 武汉分校

21. 解：(1) 设原始成绩 X 对应的等级成绩为 93 分.

由题知：$Y_2=90$，$Y_1=75$，$T_2=100$，$T_1=86$

则 $\frac{90-X}{X-75}=\frac{100-93}{93-86}$ 解得 $X=82.5$.

所以等级成绩不低于 93 分所对应的真实成绩不低于 82.5 分

满足该条件的同学有 3 名.

$\therefore P=\frac{C_3^3+C_3^2C_6^1}{C_9^3}=\frac{19}{84}$

(2) 由(1)知 $\xi=0,1,2,3$.

$P(\xi=0)=\frac{C_6^4}{C_9^4}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$

$P(\xi=1)=\frac{C_6^3C_3^1}{C_9^4}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

$P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_3^2}{C_9^4}=\frac{45}{126}=\frac{5}{14}$

$P(\xi=3)=\frac{C_6^1C_3^3}{C_9^4}=\frac{6}{126}=\frac{1}{21}$

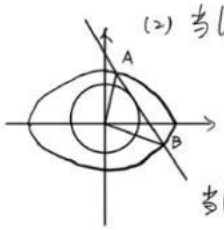
$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$E(\xi)=0\times\frac{0}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$

学而思培优 | 武汉分校

22. 解：(1) 考虑相切圆的上顶点，易知：$r<2$



(2) 当l_{AB}的斜率不存在时，不妨设$l_{AB}: x=r$

代入$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$中，有$A(r, 2\sqrt{1-\frac{r^2}{12}})$，$B(r, -2\sqrt{1-\frac{r^2}{12}})$

由$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$，得：$r=\sqrt{3}$

当l_{AB}的斜率存在时，不妨设$l_{AB}: y=kx+m$　$A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$

$$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow (1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$$

$\Delta=12(12k^2+4-m^2)>0$ ……①

且$x_1+x_2=\frac{-6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{1+3k^2}$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=(1+k^2)\cdot\frac{3m^2-12}{1+3k^2}+km\cdot\frac{-6km}{1+3k^2}+m^2=0$

整理得：$m^2=3k^2+3$

代入①式，得：$\Delta=12(9k^2+1)>0$，故存在直线l，

使$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$，此时$r=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3k^2+3}}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$

综上可知：圆的方程为：$x^2+y^2=3$

由于$\vec{OA}\perp\vec{OB}$，故$|\vec{OA}||\vec{OB}|=|AB|\cdot r$

可见，当$|AB|$为最大值时，$|\vec{OA}||\vec{OB}|$为最大值

下面求解$|AB|$的最大值

当l_{AB}的斜率不存在时，易知$|AB|=2\sqrt{3}$

当l_{AB}的斜率存在时，

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{12(9k^2+1)}}{1+3k^2}=\sqrt{\frac{(1+k^2)(9k^2+1)\cdot 12}{1+3k^2}}$$

令$t=3k^2+1$ $\Longrightarrow$ $2\cdot\sqrt{\frac{3t^2+4t-4}{t^2}}=2\sqrt{-\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t}+3}$

$$=2\cdot\sqrt{-(\frac{2}{t}-1)^2+4}\le 4.$$

"$=$"成立时，$t=2$，即$3k^2+1=2$，$k^2=\frac{1}{3}$

综上可知：$|AB|_{max}=4$

则$|\vec{OA}||\vec{OB}|_{max}=|AB|_{max}\cdot r=4\sqrt{3}$

学而思培优 | 武汉分校