专题 13　两招破解平面向量难题

一.【学习目标】

1．会用向量方法解决某些简单的平面几何问题.

2．会用向量方法解决简单的力学问题与其他一些实际问题方法总结

二.【平面向量解题方法规律】

1.用向量解决平面几何问题的步骤

(1)建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；

(2)通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；

(3)把运算结果“翻译”成几何关系.

2.应用向量解决问题的关键是要构造合适的向量，观察条件和结构，选择使用向量的某些性质解决相应的问题，如用数量积解决垂直、夹角问题，用三角形法则、模长公式解决平面几何线段长度问题，用向量共线解决三点共线问题等，总之，要应用向量，如果题设条件中有向量，则可以联想性质直接使用，如果没有向量，则更需要有向量工具的应用意识，强化知识的联系，善于构造向量解决问题.

3.几点注意事项

(1)在处理三点共线问题时，转化为两个向量共线解决，需说明两个向量有公共点，两直线不能平行，只能重合.

(2)在解决夹角问题时，应注意向量的方向，向量的夹角与所求角可能相等，也可能互补.

(3)证明垂直问题一般要经过向量的运算得到数量积 $a\cdot b=0$，尽量用坐标运算.

三.【平面向量题型分析】

（一）平面向量基本定理的应用

例 1．设D为ΔABC所在平面内一点，若$\vec{AD}=2\vec{BD}$，$\vec{CD}=\lambda\vec{CA}+\mu\vec{CB}$，则$\frac{\mu}{\lambda}=$（　　）

A．-2　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

【答案】A

【解析】由$\vec{AD}=2\vec{BD}$，根据向量运算的“三角形法则”可得$\vec{CD}=-\vec{CA}+2\vec{CB}$，结合$\vec{CD}=\lambda\vec{CA}+\mu\vec{CB}$，求得$\lambda,\mu$的值，从而可得结果.

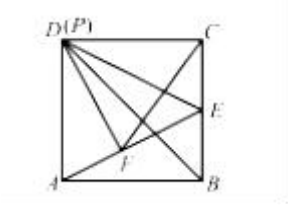
【详解】$\because \vec{AD}=2\vec{BD}\Rightarrow\vec{AC}+\vec{CD}=2(\vec{BC}+\vec{CD})$,

$\therefore \vec{CD}=\vec{AC}-2\vec{BC}=-\vec{CA}+2\vec{CB}$

$=\lambda\vec{CA}+\mu\vec{CB}$,

$\therefore \lambda=-1,\mu=2,\frac{\mu}{\lambda}=-2$，故选 A.

【详解】依题$\vec{AE}\cdot\vec{EP}=|\vec{AE}||\vec{EP}|\cos\langle\vec{AE},\vec{EP}\rangle$，由图易知向量$\vec{AE},\vec{EP}$所成角为钝角，所以$\cos\langle\vec{AE},\vec{EP}\rangle<0$，所以当$\vec{AE}\cdot\vec{EP}$最小时，即为向量$\vec{EP}$在向量$\vec{AE}$方向上的投影最小，数形结合易知点 P 在点 D 时，$\vec{AE}\cdot\vec{EP}$最小（如图所示），



在三角形 ADE 中，由等面积可知$\frac{1}{2}|AE|\times|PF|=\frac{1}{2}|AD|\times|AB|\Rightarrow\sqrt{5}|PF|=4\Rightarrow|PF|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，所以

$|AF|=\sqrt{4-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，从而$|FE|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.所以

$\vec{FC}=\vec{FE}+\vec{EC}=\frac{3}{5}\vec{AE}+\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{3}{5}(\vec{AB}+\vec{BE})+\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{3}{5}\vec{AB}+\frac{3}{10}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{3}{5}\vec{AB}+\frac{4}{5}\vec{AD}$.故选 D.

【点睛】本题考查了平面向量数量积的定义及运算，向量的线性运算，考查了数形结合的思想，考查了计算能力，属于中档题.

（二）向量中的最值问题

例 2．设A,B是半径为 2 的圆O上的两个动点，点C为AO中点，则$\vec{CO}\cdot\vec{CB}$的取值范围是（　　）

A．$[-1,3]$　　B．$[1,3]$　　C．$[-3,-1]$　　D．$[-3,1]$

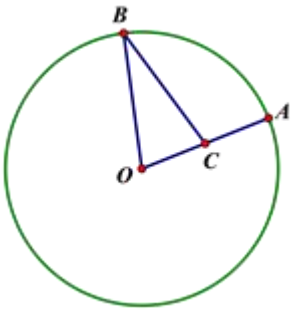
【答案】A

【分析】将$\vec{CO},\vec{CB}$两个向量，都转化为$\vec{OA},\vec{OB}$两个方向上，然后利用数量积的公式和三角函数的值域，求得题目所求数量积的取值范围.

【解析】依题意$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{CO}^2-\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=1+1\times2\cos\theta$，

其中θ是$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$两个向量的夹角，范围是$[0,\pi]$，

故$\cos\theta\in[-1,1]$，所以$1+1\times2\cos\theta=1+2\cos\theta\in[-1,3]$，故选 A.



练习 1．已知$\vec{e_1},\vec{e_2}$是平面内两个相互垂直的单位向量，若向量$\vec{b}$满足$|\vec{b}|=2,\vec{b}\cdot\vec{e_1}=1,\vec{b}\cdot\vec{e_2}=1$，则对于任意$x,y\in R,\left|\vec{b}-\left(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\right)\right|$的最小值为_____.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\left|\vec{b}-\left(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\right)\right|^2=\vec{b}^2+x^2y^2\left(\vec{e_1}\right)^2+y^2\left(\vec{e_2}\right)^2-2xb\vec{e_1}-2yb\vec{e_2}+2xy\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$

$=4+x^2+y^2-2x-2y=(x-1)^2+(y-1)^2+2\geq 2$

当且仅当$x=1$，　$y=1$时，$\left|\vec{b}-\left(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\right)\right|^2$取得最小值 2

此时，$\left|\vec{b}-\left(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\right)\right|$取得最小值$\sqrt{2}$

练习 2．在边长为 1 的正△ABC 中，$\vec{BD}=x\vec{BA}$，$\vec{CE}=y\vec{CA}$，$x>0$，$y>0$ 且 $x+y=1$，则$\vec{CD}\cdot\vec{BE}$的最大值为（　　）

A．$-\frac{5}{8}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{3}{8}$　　D．$-\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】$\vec{CD}\cdot\vec{BE}=(\vec{CB}+\vec{BD})\cdot(\vec{BC}+\vec{CE})$，$=(\vec{CB}+x\vec{BA})\cdot(\vec{BC}+y\vec{CA})=-1+\frac{x+y+xy}{2}$，由此能求出当$x=y=\frac{1}{2}$时，$\vec{CD}\cdot\vec{BE}$的最大值为$-\frac{3}{8}$.

练习 1．在ΔABC中，过中线AD的中点E任作一直线分别交边AB、AC于M、N两点,设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}\left(x,y\neq 0\right)$,则$4x+y$的最小值是_____.

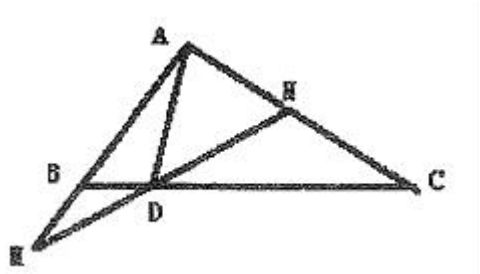
【答案】$\frac{9}{4}$

【解析】$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{4y}\overrightarrow{AN}$，∵$M,E,N$共线，∴$\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}=1$.

$4x+y=(4x+y)(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y})=\frac{5}{4}+\frac{x}{y}+\frac{y}{4x}\geq\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{4x}}=\frac{9}{4}$，当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{y}{4x}$时等号成立，故最小值为$\frac{9}{4}$.

【名师点睛】本题首先考查向量的线性运算，实质就是求出x,y满足的等量关系，题中唯一的关系就是M,N,E三点共线，由此联想平面向量的一个定理：$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$是平面的一个基底，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则$A,B,C$三点共线$\Leftrightarrow x+y=1$．这样只要由平面向量的线性运算把$\overrightarrow{AE}$用$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$表示出来就可得$x,y$的等量关系．然后只要应用“1”的代换结合基本不等式可求得最值．

练习 2．如图，在ΔABC中，D是线段BC上的一点，且$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BD}$，过点$D$的直线分别交直线$AB,AC$于点$M,N$，若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$，则$\lambda+3\mu$的最小值是_____.



【答案】3

【解析】∵ $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BD}$，因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=4(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，即 $\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AD}$，又因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$，所以 $\frac{1}{4u}\overrightarrow{AN}+\frac{3}{4\lambda}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$，因为 B,D,C 三点共线，所以 $\frac{1}{4u}+\frac{3}{4\lambda}=1$，利用均值不等式求得 $\lambda u\geq\frac{3}{4}$，而 $\lambda+3\mu\geq2\sqrt{3\lambda u}\geq2\sqrt{3\times\frac{3}{4}}=3$，故 $\lambda+3\mu$ 的最小值是 3.

考点： 1、向量的概念及几何表示；2、向量数乘运算及几何意义；3、向量数量积的含义及几何意义.

方法点睛：由向量减法法则可知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，代入已知条件 $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BD}$ 得到 $\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AD}$，再把已知条件 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$ 代入得到 $\frac{1}{4u}\overrightarrow{AN}+\frac{3}{4\lambda}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$，根据 B,D,C 三点共线得 $\frac{1}{4u}+\frac{3}{4\lambda}=1$，利用均值不等式得到 $\lambda u\geq\frac{3}{4}$，而

$\lambda+3\mu\geq 2\sqrt{3\lambda u}\geq 2\sqrt{3\times\frac{3}{4}}=3$，从而求得$\lambda+3\mu$的最小值是$3$.

练习 3．在四面体$OABC$中，点M，N分别为OA，BC的中点，若$\vec{OG}=\frac{1}{3}\vec{OA}+x\vec{OB}+y\vec{OC}$，且$G$，$M$，$N$三点共线，则$x+y=$

A．$-\frac{1}{3}$　B．$\frac{1}{3}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$-\frac{2}{3}$

【答案】B

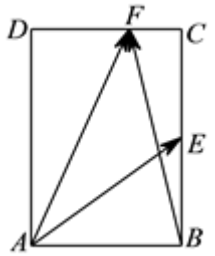
【解析】由已知可得$\overrightarrow{OG}=\lambda\overrightarrow{ON}+(1-\lambda)\overrightarrow{OM}=\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$，又$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，对应项系数相等，得到结果.

【详解】若G，M，N三点共线，则存在实数λ使得$\overrightarrow{OG}=\lambda\overrightarrow{ON}+(1-\lambda)\overrightarrow{OM}=\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$成立，所以$\frac{1-\lambda}{2}=\frac{1}{3}$，可得$\lambda=\frac{1}{3}$，所以$x=y=\frac{1}{6}$，可得$x+y=\frac{1}{3}$.

故选：B

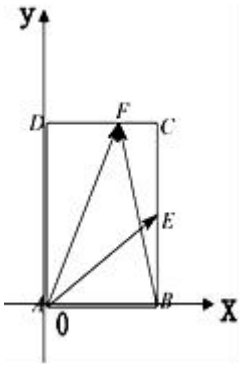
（七）坐标法解决向量问题

例 7. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=3\sqrt{2}$，点E为BC的中点，如果$DF=2FC$，那么$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}$的值是_____.



【答案】9

【解析】建立如图所示的直角坐标系，

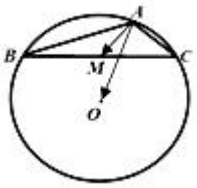


则 $A(0,0),B(3,0),E\left(3,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),F\left(2,3\sqrt{2}\right)$，

∴ $\overrightarrow{AF}=\left(2,3\sqrt{2}\right),\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，

∴ $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=9$.

练习 2．如图，O为△ABC的外心，$AB=4,AC=2,\angle BAC$为钝角，M是边BC的中点，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}$的值（　　）



A．4　　B．6　　C．7　　D．5

【答案】D

【解析】∵M 是 BC 边的中点，∴ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，∵O 是△ABC 的外接圆的圆心，

∴ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AO}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle BAO=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=6$．同理可得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=4$．

∴ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\times(6+4)=5$.

练习 3．O是平面上的一定点，A,B,C是平面上不共线的三点，动点P满足$\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\cdot cosB}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\cdot cosC}\right)$，$\lambda\in(0,\infty)$，则动点$P$的轨迹一定经过$\Delta ABC$的（　）

A．重心　　B．垂心　　C．外心　　D．内心

【答案】B

【解析】解出$\vec{AP}$，计算$\vec{AP}\cdot\vec{BC}$并化简可得出结论．

【详解】$\vec{AP}=\vec{OP}-\vec{OA}=\lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\cdot cosB}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\cdot cosC}\right)$，

∴ $\vec{AP}.\vec{BC}=\lambda\left(\frac{\vec{AB}.\vec{BC}}{|\vec{AB}|\cdot cosB}+\frac{\vec{AC}.\vec{BC}}{|\vec{AC}|\cdot cosC}\right)=\lambda\left(-|\vec{BC}|+|\vec{BC}|\right)=0$，

∴$\vec{AP}\perp\vec{BC}$，即点 P 在 BC 边的高上，即点 P 的轨迹经过△ABC 的垂心．

故选：B.

练习 4. 已知点 O 是锐角△ABC 的外心，a，b，c 分别为内角 A、B、C 的对边，A=$\frac{\pi}{4}$，且$\frac{cosB}{sinC}\vec{AB}+\frac{cosB}{sinB}\vec{AC}=\lambda\vec{OA}$，则λ的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】由题意画出图形，设ΔABC的外接圆半径为R，根据三角形外心的性质可得：$OD\perp AB$，$OE\perp AC$，由向量的线性运算和向量数量积的运算，求出$\vec{AB}\cdot\vec{OA}$和$\vec{AC}\cdot\vec{OA}$，在已知的等式两边同时与$\vec{OA}$进行数量积运算，代入后由正弦定理化简，由两角和的正弦公式和三角形内角和定理求出λ的值.

【点睛】本题主要考查了利用线性规划求解最优解及目标函数的最大值，解题的关键是正确作出不等式组所表示的平面区域，并能判断出取得最大值时的最优解的位置．利用线性规划求最值的步骤：(1)在平面直角坐标系内作出可行域．(2)考虑目标函数的几何意义，将目标函数进行变形．常见的类型有截距型（$ax+by$型）、斜率型（$\frac{y+b}{x+a}$型）和距离型（$(x+a)^2+(y+b)^2$型）．(3)确定最优解：根据目标函数的类型，并结合可行域确定最优解．(4)求最值：将最优解代入目标函数即可求出最大值或最小值。

练习 1．若曲线$f(x)=\frac{1}{aln(x+1)}(e-1<x<e^2-1)$和$g(x)=-x^3+x^2(x<0)$上分别存在点$A,B$,使得$\Delta AOB$是以原点$O$为直角顶点的直角三角形，AB 交 y 轴于 C,且$\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{CB}$,则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $(2e-1,4e^2-2)$　　B. $(4e-2,2e^2-1)$　　C. $(4e-2,2e^2)$　　D. $(2e-1,2e^2-1)$

【答案】B

【解析】由题意设出A，B的坐标，代入函数解析式，利用$\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{CB}$把$B$的坐标用$A$的坐标表示，由$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$可得关于$A$的横坐标的方程，分离参数$a$后构造函数$h(x)=\frac{4x+2}{ln(x+2)}$，利用导数求其在$(e-1<x<e^2-1)$上的单调性，得到函数的值域得答案.

【详解】设$A(x_1,y_1)$，$y_1=f(x_1)=\frac{1}{aln(x_1+1)}$，$B(x_2,y_2)$，$y_2=g(x_2)=-x_2^3+x_2^2(x<0)$，又$\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{CB}$，则$\frac{x_2}{2}=-x_1$，$x_2=-2x_1$，$\therefore y_2=8x_1^3+4x_1^2$.

$\vec{OA}=(x_1,y_1)$，$\vec{OB}=(x_2,y_2)$，

由题意，$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，即$x_1(-2x_1)+\frac{1}{aln(x_1+1)}\cdot(8{x_1}^3+4{x_1}^2)=0$，

∴$2{x_1}^2[-1+\frac{4x_1+2}{aln(x_1+1)}]=0$，

∵$e-1<x_1<e^2-1$，∴$\frac{4x_1+2}{aln(x_1+1)}-1=0$，

则$a=\frac{4x_1+2}{ln(x_1+1)}$.

设 $h(x)=\frac{4x+2}{ln(x+1)}$，则 $h'(x)=\frac{4ln(x+1)-\frac{4x+2}{x+1}}{ln^2(x+1)}=\frac{4ln(x+1)+\frac{2}{x+1}-4}{ln^2(x+1)}$，

令$u(x)=4ln(x+1)+\frac{2}{x+1}-4$,则 $u'(x)=\frac{4}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{4x+2}{(x+1)^2}>0$ 在 $e-1<x<e^2-1$ 恒成立，

所以$u(x)$单增，所以$u(x)>u(e^{-1})=\frac{2}{e}>0$，∴$h'(x)>0$，

即函数 $h(x)=\frac{x+1}{ln(x+1)}$在$(e-1<x<e^2-1)$上为增函数，

则$\frac{4e-4+2}{ln(e-1+1)}<a<\frac{4e^2-4+2}{ln(e^2-1+1)}$,

即 $4e-2<a<2e^2-1$.

∴实数 a 的取值范围是$(4e-2,2e^2-1)$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了向量加减法的运算、数量积的运算，综合运用了正弦定理，余弦定理，三角形面积公式，考查了转化思想和计算能力，属于中档题.

（十）向量的几何意义

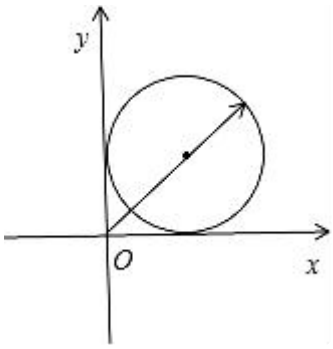
例 10．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是单位向量，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．若向量$\vec{c}$满足$|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=1$，则$|\vec{c}|$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}-1$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$\sqrt{2}+2$

【答案】C

【解析】通过建立直角坐标系，利用向量的坐标运算和圆的方程及数形结合即可得出.

【详解】



$\because|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\therefore$可设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,1)$，$\vec{c}=(x,y)$.

$\therefore\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=(x-1,y-1)$.

$\because|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=1$，

$\therefore\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=1$，即$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

$\therefore|\vec{c}|$的最大值$=\sqrt{1^2+1^2}+1=\sqrt{2}+1$.

故选：C.

练习 1．$Rt\Delta ABC$的斜边AB等于 4，点P在以C为圆心，1 为半径的圆上，则$\vec{PA}\cdot\vec{PB}$的取值范围是（　）

A．$\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$　　B．$\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$　　C．$[-3,5]$　　D．$[1-2\sqrt{3},1+2\sqrt{3}]$

【答案】C

【解析】结合三角形及圆的特征可得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1-(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{PC}$，进而利用数量积运算可得最值，从而得解.

【详解】$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{PC}^2-(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

注意$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\overrightarrow{PC}^2=1$，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=4$.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{PC}$

所以当$\overrightarrow{PC}$与$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$同向时取最大值 5，反向时取小值-3.

故选 C.

练习 2．已知在平面四边形$ABCD$中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120^\circ$，$AD=1$，$AB=2$，点E为边CD上的动点，则$\vec{AE}\cdot\vec{BE}$的最小值为

A. $\frac{21}{16}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{25}{16}$

【答案】C

【解析】以D为原点，以DA所在的直线为x轴，以DC所在的直线为y轴，求出A，B，C的坐标，根据向量的数量积和二次函数的性质即可求出.

【详解】如图所示，以D为原点，以DA所在的直线为x轴，以DC所在的直线为y轴，

过点B作$BN \perp x$轴，过点B作$BM \perp y$轴，

$\because AB \perp BC$，$AD \perp CD$，$\angle BAD = 120^\circ$，$AD = 1$，$AB = 2$，

$\therefore AN = ABcos60^\circ = 1$，$BN = ABsin60^\circ = \sqrt{3}$，

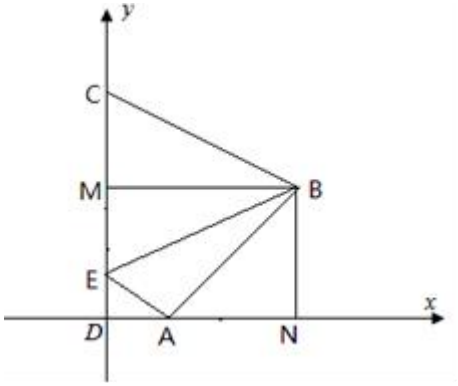
$\therefore DN = 1 + 1 = 2$，$\therefore BM = 2$，$\therefore CM = MBtan30^\circ = \sqrt{3}$，

$\therefore DC = DM + MC = 2\sqrt{3}$，$\therefore A(1,0)$，$B(2\sqrt{3})$，$C(0,2\sqrt{3})$，

设$E(0,m)$，$\therefore \vec{AE} = (-1,m)$，$\vec{BE} = (-2,m-\sqrt{3})$，$0 \le m \le 2\sqrt{3}$，

$\therefore \vec{AE} \cdot \vec{BE} = 2 + m^2 - \sqrt{3}m = \left(m - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$，

当$m = \frac{\sqrt{3}}{2}$时，取得最小值为$\frac{5}{4}$，故选 C.



【点睛】本题主要考查了向量在几何中的应用，考查了运算能力和数形结合的能力，向量的坐标表示，二次函数最值的求法，向量数量积的坐标表示，建立适当的坐标系将几何知识代数化是解题的关键，也是常用手段，属于中档题.