专题 14　概率问题易错点

一．【学习目标】

1．了解互斥事件，相互独立事件和条件概率的意义及其运算公式．

2．理解独立重复试验的模型，会计算事件在 n 次独立重复试验中发生 k 次的概率．

二．【知识要点】

1．互斥事件与对立事件

(1)互斥事件：若 A∩B 为不可能事件(A∩B＝∅)，则称事件 A 与事件 B 互斥，其含义是：事件 A 与事件 B 在任何一次试验中不会同时发生．

(2)对立事件：若 A∩B 为不可能事件，而 A∪B 为必然事件，那么事件 A 与事件 B 互为对立事件，其含义是：事件 A 与事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生．

概率的几个基本性质

(1)概率的取值范围：_____　．

(2)互斥事件的概率加法公式：

①P(A∪B)＝ _____　＝　_____　(A，B 互斥)．

②P(A1∪A2∪…∪An)＝_____或 P(A1＋A2＋…＋An)＝　_____　．(A1，A2，…，An 互斥)．

③对立事件的概率：　＝　_____　．

3．条件概率及其性质

(1)对于任何两个事件 A 和 B，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率，用符号 P(B|A)来表示，其公式为　_____　．

(2)条件概率具有的性质：

①　_____　；

②如果 B 和 C 是两个互斥事件，

则　_____

4．相互独立事件

(1)对于事件 A，B，若 A 的发生与 B 的发生互不影响，则称　_____　．

(2)若 A 与 B 相互独立，则 P(B|A)＝　_____　，

P(AB)＝　_____　．

(3)若 A 与 B 相互独立，则 A 与　_____　，_____　与 B，_____　与　_____　也都相互独

立．

5．独立重复试验与二项分布

(1)两个相互独立事件 A，B 同时发生的概率为 P(A·B)＝P(A)·P(B)，此公式可推广到 n 个相互独立事件，则 P(A1·A2·…·An)＝P(A1)·P(A2)·…·P(An)．

∴随机事件 A 的概率是频率的稳定值，频率是概率的近似值．∴①正确．

∵基本事件的特点是任意两个基本事件是互斥的，∴一次试验中，不同的基本事件不可能同时发生．∴②正确．

∵必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，随机事件的概率大于 0，小于 1，∴任意事件 A 发生的概率 P（A）满足 0≤P（A）≤1，∴③错误．

若事件 A 的概率趋近于 0，则事件 A 是小概率事件，∴④错误

∴说法正确的有两个，

故选：C．

（二）事件的关系与运算

例 2．抛掷一枚质地均匀的骰子，向上的一面出现任意一个点数的概率都是$\frac{1}{6}$，记事件 A 为“向上的点数是奇数”，事件 B 为“向上的点数不超过 3”，则概率 P(A∪B)＝（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

【答案】C

【解析】根据 P（A∪B）=P（A）+P（B）-P（AB），由此能求出结果．

【详解】∵抛掷一枚质地均匀的骰子，向上的一面出现任意一种点数的概率都是$\frac{1}{6}$，

记事件 A 为“向上的点数是奇数”，事件 B 为“向上的点数不超过 3”，

∴$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$．

故选：C．

练习 1．对空中飞行的飞机连续射击两次，每次发射一枚炮弹，设 A＝{两次都击中飞机}，B＝{两次都没击中飞机}，C＝{恰有一弹击中飞机}，D＝{至少有一弹击中飞机}，下列关系不正确的是(　　)

A．$A\subseteq D$　　B．$B\cap D=\varnothing$

C．$A\cup C=D$　　D．$A\cup C=B\cup D$

【答案】D

【解析】事件 C“恰有一弹击中飞机”包含两种情况：一种是第一枚击中第二枚没中，第二种是第一枚没中第二枚击中。

事件 D“至少有一弹击中”包含两种情况：一种是恰有一弹击中，一种是两弹都击中。

对于选项 A，事件 A 包含在事件 D 中，故 A 正确。

对于选项 B，由于事件 B,D 不能同时发生，故 $B\cap D=\varnothing$正确。

对于选项 C，由题意知正确。

对于选项 D，由于 $A\cup C=D=${至少有一弹击中飞机}，不是必然事件；而 $B\cup D$ 为必然事件，所以 $A\cup C\neq B\cup D$.故 D 不正确。

选 D。

练习 2．下列说法正确的有(　　)

①概率是频率的稳定值，频率是概率的近似值.

②一次试验中不同的基本事件不可能同时发生.

③任意事件 A 发生的概率 $P(A)$总满足 $0<P(A)<1$.

④若事件 A 的概率为 0，则事件 A 是不可能事件.

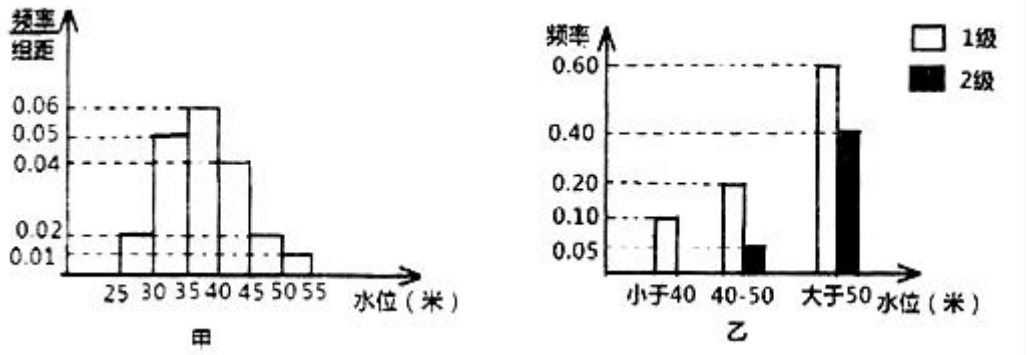
A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【答案】C

【解析】不可能事件的概率为 0，但概率为 0 的事件不一定是不可能事件，如几何概型中“单点”的长度、面积、体积都是 0，但不是不可能事件，所以④不对；不同的基本事件是彼此互斥的，在同一次试验中不可能同时发生，故②正确；任意事件 A 发生的概率 $P(A)$满足 $0\leq P(A)\leq 1$，因为③错误；由概率和频率的关系知①正确．所以选 C.

（三）互斥事件解题策略

例 3.依据黄河济南段 8 月份的水文观测点的历史统计数据所绘制的频率分布直方图如图(甲)所示：依据济南的地质构造，得到水位与灾害等级的频率分布条形图如图(乙)所示.



(I)以此频率作为概率，试估计黄河济南段在 8 月份发生 I 级灾害的概率；

(Ⅱ)黄河济南段某企业，在 3 月份，若没受 1、2 级灾害影响，利润为 500 万元；若受 1 级灾害影响，则亏损 100 万元；若受 2 级灾害影响则亏损 1000 万元.

现此企业有如下三种应对方案：

方案	防控等级	费用（单位：万元）
方案一	无措施	0
方案二	防控 1 级灾害	40
方案三	防控 1,2 级灾害	100

试问，如仅从利润考虑，该企业应选择这三种方案中的哪种方案?说明理由.

【答案】 (I)$0.155(II)E(X_2)>E(X_3)>E(X_1)$，因此企业应选方案二.

【解析】（I）依据甲图，记黄河 8 月份“水位小于 40 米”为事件A_1，“水位在 40 米至 50 米之间”为事件A_2，“水位大于 50 米”为事件A_3，分别求出它们发生的概率，记该地 8 月份“水位小于 40 米且发生 1 级灾害”为事件B_1，“水位在 40 米至 50 米之间且发生 1 级灾害”为事件B_2，“水位大于 50 米且发生 1 级灾害”为事件B_3，分别求出它们发生的概率，再利用$P(B)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)=P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_3)$求解.（II）以企业利润为随机变量，分别计算出三种方案的利润，再选择.

选项 B 中，“至少 1 个白球”包括“1 个白球 2 个红球”、“2 个白球和 1 个红球”、“3 个白球”三种情况；“至少 1 个红球”包括“1 个红球 2 个白球”、“2 个红球和 1 个白球”、“3 个红球”三种情况．所以这两个事件不互斥，所以 B 不正确．

选项 C 中，“至少 2 个白球”包括“2 个白球 1 个红球”、“3 个白球”两种情况；“至多 1 个白球”包括“1 个白球和 2 个红球”、“3 个红球”两种情况，所以这两个事件为对立事件，故 C 不正确．

选项 D 中，“恰好 1 个白球”和“恰好 2 个红球”为同一事件，所以 D 不正确．

故选 A.

【点睛】解答本题的关键是分清互斥事件和对立事件的关系，由定义可得互斥事件不一定对立，而对立事件一定为互斥事件．解答类似问题时很容易出现错误，解题时首先要弄清所有的试验结果，然后再根据所求进行求解、判断.

练习 3．学校足球赛决赛计划在周三、周四、周五三天中的某一天进行，如果这一天下雨则推迟至后一天，如果这三天都下雨则推迟至下一周，已知这三天下雨的概率均为$\frac{1}{2}$，则这周能进行决赛的概率为

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

【答案】D

【解析】本周能进行决赛意味着能在周三或周四或周五进行，分别求概率，求和即可得解.

【详解】设在这周能进行决赛为事件A，恰好在周三、周四、周五进行决赛分别为事件A_3，A_4，A_5，则$A=A_3\cup A_4\cup A_5$，

又事件A_3，A_4，A_5两两互斥，

则有$P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$，

故选 D.

（四）.对立事件解题方法

例 4.在最强大脑的舞台上，为了与国际 X 战队 PK，假设某季 Dr.魏要从三名擅长速算的选手 A_1,A_2,A_3，三名擅长数独的选手 B_1,B_2,B_3，两名擅长魔方的选手 C_1,C_2 中各选一名组成中国战队.假定两名魔方选手中更擅长盲拧的选手 C_1 已确定入选，而擅长速算与数独的选手入选的可能性相等.

(Ⅰ)求 A_1 被选中的概率；

(Ⅱ)求 A_1,B_1 不全被选中的概率.

【答案】（Ⅰ）$\frac{1}{3}$（Ⅱ）$\frac{8}{9}$

【解析】 (Ⅰ)利用古典概型概率公式求出 A_1 被选中的概率；

(Ⅱ)利用对立事件概率公式求出求 A_1,B_1 不全被选中的概率.

详解：(Ⅰ)从擅长速算、数独的 6 名选手中各选出 1 名与魔方选手 C_1 组成中国战队的一切可能的结果组成集合

$\Omega=\{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_3, C_1), (A_2, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_3, C_1), (A_3, B_1, C_1), (A_3, B_2, C_1), (A_3, B_3, C_1)\}$，

由 9 个基本事件组成.

由题知每一个基本事件被抽取的机会均等，用 M 表示"A_1 被选中"，则

$M=\{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_1)\}$，

因而 $P(M)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(Ⅱ)用 N 表示"A_1、B_1 不全被选中"这一事件，则其对立事件 $\overline{N}$ 表示"A_1、B_1 全被选中"，

由于 $\overline{N}=\{(A_1, B_1, C_1)\}$，

$\therefore P(\overline{N})=\frac{1}{9}$，

从而 $P(N)=1-P(\overline{N})=\frac{8}{9}$

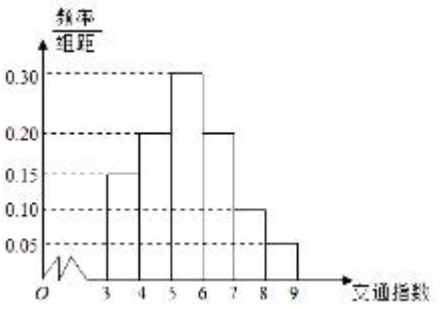
点睛：古典概型中基本事件数的探求方法

(1)列举法.

(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.对于基本事件有"有序"与"无序"区别的题目，常采用树状图法.

(五).古典概型解题步骤

例 5. 交通拥堵指数是综合反映道路网畅通或拥堵的概念，记交通拥堵指数为T，早高峰时段$3 \le T \le 9$，$T \in [3,5)$基本畅通；$T \in [5,6)$轻度拥堵；$T \in [6,7)$中度拥堵；$T \in [7,9]$严重拥堵，从某市交通指挥中心随机选取了二环以内40个交通路段，依据交通指数数据绘制直方图如图所示.



（1）据此直方图估算早高峰时段交通拥堵指数的中位数和平均数；

（2）现从样本路段里的严重拥堵的路段中随机抽取两个路段进行综合整治，求选中路段中恰有一个路段的交通指数$T\in[8,9]$的概率.

【答案】（1）中位数5.5，平均数5.55；（2）$\frac{8}{15}$.

【解析】 (1)频率直方图中，根据直方图左右两边面积相等处横坐标能估算早高峰时段交通拥堵指数的中位数；每个矩形的中点横坐标与该矩形的纵坐标、组距相乘后求和可得平均值；(2)由题知严重拥堵中交通指数$T\in[7,8)$的有 4 个，记为a,b,c,d，交通指数$T\in[8,9)$的有 2 个,记为A,B，从样本路段里的严重拥堵的路段中随机抽取两个路段进行综合整治，利用列举法能求出恰有一个路段的交通指数$T\in[8,9)$的概率.

【详解】(1)∵频率直方图中，$T\in[5,6)$对应的小矩形最高，

∴据此直方图能估算早高峰时段交通拥堵指数的中位数$\frac{5+6}{2}=5.5$；

由频率直方图能估计早高峰时段交通拥堵指数的平均数为

$0.15\times3.5+0.2\times4.5+0.3\times5.5+0.2\times6.5+0.1\times7.5+0.05\times8.5=5.55$.

(2)由题知严重拥堵中交通指数$T\in[7,8)$的有 4 个，记为a,b,c,d，

交通指数$T\in[8,9)$的有 2 个,记为A,B，

从样本路段里的严重拥堵的路段中随机抽取两个路段进行综合整治，

基本事件总数有 15 个，分别为：

$(a,b),(a,c),(a,d),(a,A),(a,B),(b,c),(b,d),(b,A),(b,B)$，

$(c,d),(c,A),(c,B),(d,A),(d,B),(A,B)$，

选中路段中选中路段中恰有一个路段的交通指数$T\in[8,9)$包含的基本事件有 8 个，

分别为：$(a,A),(a,B),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(d,A),(d,B)$，

∴恰有一个路段的交通指数$T\in[8,9)$的概率$P=\frac{8}{15}$.

【点睛】本题主要考查频率分布直方图以及古典概型概率公式的应用，属于中档题. 直方图的主要性质有：（1）直方图中各矩形的面积之和为1；（2）组距与直方图纵坐标的乘积为该组数据的频率；（3）每个矩形的中点横坐标与该矩形的纵坐标、组距相乘后求和可得平均值；（4）直方图左右两边面积相等处横坐标表示中位数.

练习 1．如下的茎叶图表示甲乙两人在 5 次测评中的成绩，已知甲的中位数是 90，则从乙的 5 次测评成绩中随机抽取一次成绩，其分数高于甲的平均成绩的概率为

甲			乙		
	9	8	8	3	3	7
2	1	x	9	2	9	

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{2}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【解析】根据甲的中位数知$x=0$，计算甲的平均数，找到乙中大于甲平均数的个数，根据古典概型求解.

【详解】因为甲的中位数是 90，所以$x=0$，

由茎叶图知甲的平均数为 90，乙中共有分数 5 个，大于 90 的分数共有 2 个，

所以$P=\frac{2}{5}$，故选 B.

练习 2．齐王有上等,中等,下等马各一匹；田忌也有上等,中等,下等马各一匹.田忌的上等马优于齐王的中等马,劣于齐王的上等马；田忌的中等马优于齐王的下等马,劣于齐王的中等马；田忌的下等马劣于齐王的下等马.现从双方的马匹中随机各选一匹进行一场比赛,若有优势的马一定获胜,则齐王的马获胜的概率为（　）

A. $\frac{4}{9}$　B. $\frac{5}{9}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{7}{9}$

【答案】C

【解析】现从双方的马匹中随机各选一匹进行一场比赛 ,利用列举法求出基本事件有 9 种，齐王的马获胜包含的基本事件有 6 种，利用古典概型概率公式可求出齐王的马获胜的概率.

【详解】设齐王上等、中等、下等马分别为A,B,C，田忌上等、中等、下等马分别为a,b,c，

现从双方的马匹中随机各选一匹进行一场比赛,

（六）.几何概型题型

例 6．甲、乙两名同学决定在今年的寒假每天上午 9：00—10：00 在图书馆见面，一起做寒假作业，他们每次到图书馆的时间都是随机的。若甲先到图书馆而乙在 10 分钟后还没到，则甲离开图书馆；若乙先到图书馆而甲在 15 分钟后还没到，则乙离开图书馆。求他们两人在开始的第一天就可以见面的概率。

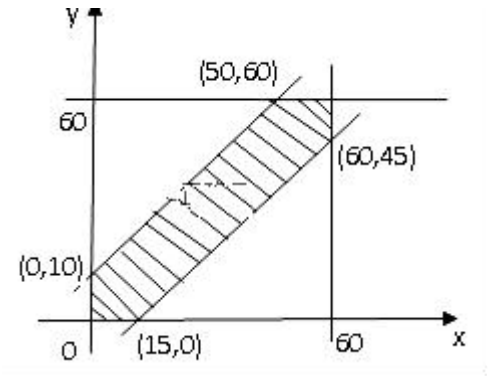
【答案】$\frac{107}{288}$

【解析】设甲、乙到达的时间为x和y，将问题转化为时间差问题，运用几何概率求出结果

【详解】以x和y分别表示甲和乙到达图书馆的时间，

则两人见面的条件是：一是甲先到：$0 \le y-x \le 10$，

二是乙先到：$0 \le x-y \le 15$，建立直角坐标系如图所示：



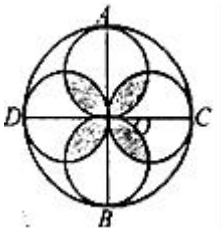
则(x,y)的所有可能结果是边长为 60 的正方形，$s=60\times60=3600$，

而可能见面的时间用图中的阴影部分表示，

$s_{阴}=3600-\frac{1}{2}\times45\times45-\frac{1}{2}\times50\times50=\frac{2675}{2}$，

于是他们见面的概率为：$P=\frac{2675}{2\times3600}=\frac{107}{288}$.

练习 1．如图在圆O中，AB，CD是圆O互相垂直的两条直径，现分别以OA，OB，OC，OD为直径作四个圆，在圆O内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是（　　）

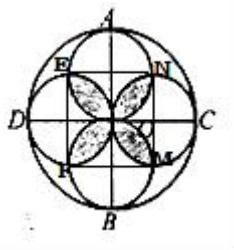


A．$\frac{1}{\pi}$　　B．$\frac{1}{2\pi}$　　C．$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$　　D．$\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$

【答案】C

【解析】连接小圆的各个交点，形成一个正方形，由半圆形与正方形的关系可求得阴影部分占总面积的比值。

【详解】如下图所示，连接相邻两个小圆的交点，得四边形 EFMN，易知四边形 EFMN 为正方形



设圆 O 的半径为 r，则正方形 EFMN 的边长也为 r

所以正方形的 EFMN 的面积为 r^2

阴影部分的面积为 $r^2-2\left[r^2-\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi r^2}{2}-r^2$

所以阴影部分占总面积的比值为 $\frac{\frac{\pi r^2}{2}-r^2}{\pi r^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$

即在圆 O 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是 $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$

所以选 C

练习 2．从区间 $(0,5)$ 中任取一个值 a，则函数 $f(x)=\begin{cases}a^{x+3},x\le -1\\(3-a)x-a+7,x>-1\end{cases}$ 是增函数的概率为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】由函数为增函数得到 a 的取值范围，然后利用几何概型的概率公式计算直接得到答案.

【详解】∵函数 $f(x)=\begin{cases}a^{x+3},x\le -1\\(3-a)x-a+7,x>-1\end{cases}$ 为递增函数，

$\therefore\begin{cases}3-a>0\\a>1\\a^{-1+3}\le -(3-a)-a+7\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a<3\\a>1\\-2\le a\le 2\end{cases}$

解得 $1<a\le 2$,

又 a 从区间 $(0,5)$ 中任取一个值,由概率公式可得 $p=\frac{2-1}{5-0}=\frac{1}{5}$

故选：A.

练习 3．已知甲乙两辆车去同一货场装货物，货场每次只能给一辆车装货物，所以若两辆车同时到达，则需要有一车等待.已知甲、乙两车装货物需要的时间都为 20 分钟，倘若甲、乙两车都在某 1 小时内到达该货场，则至少有一辆车需要等待装货物的概率是（　　）

A．$\frac{5}{9}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】设现在时间是 0，甲乙到场的时间分别是 x y，那么就会有 $0\le x\le 60$，$0\le y\le 60$，$|x-y|$ 如果小于 20，

就是等待事件，否则不用等待了．由此能求出至少有一辆车需要等待装货物的概率．

【详解】分别设3双手套为：a_1a_2、b_1b_2、c_1c_2，a_1、b_1、c_1分别代表左手手套，a_2、b_2、c_2分别代表右手手套；

从箱子里的3双不同的手套中，随机拿出2只，所有的基本事件是：

$n=6\times6=36$，共有36个基本事件；

事件A包含：$(a_1,\ b_2)$、$(b_2,\ a_1)$、$(a_1,\ c_2)$、$(c_2,\ a_1)$、$(a_2,\ b_1)$、$(b_1,\ a_2)$、

$(a_2,\ c_1)$、$(c_1,\ a_2)$、$(b_1,\ c_2)$、$(c_2,\ b_1)$、$(b_2,\ c_1)$、$(c_1,\ b_2)$一共12个基本事件，

故事件A的概率为$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$，故选 B。

练习 2．已知某运动员每次投篮命中的概率是 40%．现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率：先由计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数，指定 1，2，3，4 表示命中，5,6,7,8,9,0 表示不命中；再以每三个随机数为一组，代表三次投篮的结果．经随机模拟产生了如下 10 组随机数：907 966 191 925 271 431 932 458 569 683．

据此估计，该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{10}$　　D．$\frac{9}{10}$

【答案】C

【解析】由题意知模拟三次投篮的结果，经随机模拟产生了 10 组随机数，在 10 组随机数中表示三次投篮恰有两次命中的有可以通过列举得到共 3 组随机数，根据概率公式，得到结果．

【详解】

由题意知模拟三次投篮的结果，经随机模拟产生了 10 组随机数，在 10 组随机数中表示三次投篮恰有两次命中的有：191、932、271、共 3 组随机数，

故所求概率为：$\frac{3}{10}$

故答案为：C.

（八）条件概率

例 8.为了研究学生的数学核心素养与抽象能力(指标 x)、推理能力(指标 y)、建模能力(指标 z 的相关性，将它们各自量化为 1、2、3 三个等级，再用综合指标 w=x+y+x 的值评定学生的数学核心素养，若$3\le w\le4$，则数学核心素养为一级；若则数学核心素养为二级：若$5\le w\le6$,则数学核心素养为三级，为了了解某校学生的数学核心素养，调查人员随机访问了某校 10 名学生，得到如下数据：

学生编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
(x,y,z)	(2,2,3)	(3,2,3)	(3,3,3)	(1,2,2)	(2,3,2)	(2,3,3)	(2,2,2)	(2,3,3)	(2,1,1)	(2,2,2)

(1)在这 10 名学生中任取两人，求这两人的建棋能力指标相同条件下综合指标值也相同的概率；

(2)在这 10 名学生中任取三人，其中数学核心素养等级足一级的学生人数记为 X,求随机变量 X 的分布列及其数学期望。

【答案】（1）$\frac{1}{4}$；（2）见解析

【解析】（1）由表格结合条件概率公式即可得到结果；

（2）X 的所有可能取值为 0,1，2，3，求出相应的概率值，带入期望公式得到结果.

【详解】

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
x	2	3	3	1	2	2	2	2	2	2
y	2	2	3	2	3	3	2	3	1	2
z	3	3	3	2	2	3	2	3	1	2
w	7	8	9	5	7	8	6	8	4	6

（1）由题可知:建模能力一级的学生是A_9；建模能力二级的学生是A_4,A_5,A_7,A_{10}；建模能力三级的学生是A_1,A_2,A_3,A_6,A_8.

练习 2．吸烟有害健康，远离烟草，珍惜生命。据统计一小时内吸烟 5 支诱发脑血管病的概率为 0.02，一小时内吸烟 10 支诱发脑血管病的概率为 0.16.已知某公司职员在某一小时内吸烟 5 支未诱发脑血管病，则他在这一小时内还能继吸烟 5 支不诱发脑血管病的概率为（　　）

A．$\frac{6}{7}$　　B．$\frac{21}{25}$　　C．$\frac{49}{50}$　　D．不确定

【答案】A

【解析】直接利用条件概率公式计算出该事件的概率.

【详解】记事件 A：某公司职员一小时内吸烟 5 支未诱发脑血管病，

记事件 B：某公司职员一小时内吸烟 10 支未诱发脑血管病，

则事件 $B|A$：某公司职员在某一小时内吸烟 5 支未诱发脑血管病，在这一小时内还能继吸烟 5 支不诱发脑血管病，

则 $B\subset A$，$AB=A\cap B=B$，

$P(A)=1-0.02=0.98$，$P(B)=1-0.16=0.84$，

因此，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.84}{0.98}=\frac{6}{7}$，

故选：A.

【点睛】本题考查的是条件概率.条件概率一般有两种求解方法：(1)定义法：先求 $P(A)$和 $P(AB)$，再由 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$,求 $P(B|A)$．(2)基本事件法：借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数 $n(A)$，再求事件 AB 所包含的基本事件数 $n(AB)$，得 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$.

练习 3．甲、乙二人争夺一场围棋比赛的冠军。若比赛为“三局两胜”制，甲在每局比赛中获胜的概率均为$\frac{2}{3}$，且各局比赛结果相互独立。则在甲获得冠军的情况下，比赛进行了3局的概率为（　　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{20}{27}$　　D．$\frac{8}{27}$

【答案】B

【解析】先计算出甲获得冠军的概率，然后计算比赛3局甲获得冠军的概率，再用条件概率的计算公式，计算得题目所求“在甲获得冠军的情况下，比赛进行了3局的概率”.

【详解】三局比赛甲“胜、负、胜”的概率为$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$；三局比赛甲“负、胜、胜”的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$；两局比赛甲“胜、胜”的概率为$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.根据条件概率计算公式，“在甲获得冠军的情况下，比赛进行了3局的概率”为$\frac{\frac{4}{27}+\frac{4}{27}}{\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{9}}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.故选 B.

（九）独立事件

例 9.甲、乙二人进行一次围棋比赛，每局胜者得 1 分，负者得 0 分，约定一方比另一方多 3 分或满 9 局时比赛结束，并规定：只有一方比另一方多三分才算赢，其它情况算平局，假设在每局比赛中，甲获胜的概率为$\frac{1}{2}$，乙获胜的概率为$\frac{1}{2}$，各局比赛结果相互独立，已知前 3 局中，甲胜 2 局，乙胜 1 局.

（1） 求甲获得这次比赛胜利的概率；

（2）设X表示从第 4 局开始到比赛结束所进行的局数，求X得分布列及数学期望.

【答案】（1）$P=\frac{29}{64}$；（2）见解析

【解析】（1）利用互斥事件的概率和公式及相互独立事件同时发生的概率乘法运算求出甲获得这次比赛胜利的概率；

（2）求出随机变量可取得值；利用互斥事件的概率和公式及相互独立事件同时发生的概率乘法公式求出随机变量取每一个值的概率；列出分布列；利用随机变量的期望公式求出随机变量的期望

【详解】（1）设甲获得这次比赛胜利为事件 A：

$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{29}{64}$；

（2）X 可能取值为：2,4,6

$P(x=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(x=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$，

$P(x=6)=1-P(x=2)-P(x=4)=\frac{9}{16}$，

X的分布列为

X	2	4	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

$E(X)=\frac{37}{8}$

【点睛】求解离散型随机变量的数学期望的一般步骤为：

第一步是“判断取值”，即判断随机变量的所有可能取值，以及取每个值所表示的意义；

第二步是:“探求概率”，即利用排列组合、枚举法、概率公式（常见的有古典概型公式、几何概型公式、互斥事件的概率和公式、独立事件的概率积公式，以及对立事件的概率公式等），求出随机变量取每个值时的概率；

（十）独立重复试验

例 10.某单位为绿化环境，移栽了甲、乙两种大树各2株．设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{2}$，且各株大树是否成活互不影响．求移栽的4株大树中：

（1）两种大树各成活1株的概率；

（2）成活的株数ξ的分布列．

【答案】(1)$\frac{2}{9}$；(2)见解析

【解析】（1）甲两株中活一株符合独立重复试验，概率为 $C_2^1\frac{21}{33}$，同理可算乙两株中活一株的概率，两值相乘即可.

（2）ξ的所有可能值为 0，1，2，3，4，分别求其概率，列出分布列，再求期望即可.

【详解】

解：设A_k表示甲种大树成活k株，$k=0,1,2$

B_l表示乙种大树成活l株，$l=0,1,2$

则A_k，B_l独立．由独立重复试验中事件发生的概率公式有

$P(A_k)=C_2^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{2-k}$，$P(B_l)=C_2^l\left(\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{1}{2}\right)^{2-l}$

据此算得$P(A_0)=\frac{1}{9}$，$P(A_1)=\frac{4}{9}$，$P(A_2)=\frac{4}{9}$，$P(B_0)=\frac{1}{4}$，$P(B_1)=\frac{1}{2}$，$P(B_2)=\frac{1}{4}$

(1)所求概率为$P(A_1\cdot B_1)=P(A_1)\cdot P(B_1)=\frac{2}{9}$

(2)ξ的所有可能值为 0，1，2，3，4，且 $P(\xi=0)=P(A_0\cdot B_0)=P(A_0)\cdot P(B_0)=\frac{1}{36}$

$P(\xi=1)=P(A_0\cdot B_1)+P(A_1\cdot B_0)=\frac{1}{6}$,

$P(\xi=2)=P(A_0\cdot B_2)+P(A_1\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_0)=\frac{13}{36}$,

$P(\xi=3)=P(A_1\cdot B_2)+P(A_2\cdot B_1)=\frac{1}{3}$,

$P(\xi=4)=P(A_2\cdot B_2)=\frac{1}{9}$,

综上知ξ有分布列

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

练习 1．某学校对高学生进行体能测试,若每名学生测试达标的概率都是$\frac{2}{3}$ (相互独立),经计算,5 名学生中恰有 k 名学生同时达标的概率是$\frac{80}{243}$,则 k 的值为(　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．3 或 4

【答案】D

【解析】由题意，$C_5^r\cdot(\frac{2}{3})^r(\frac{1}{3})^{5-r}=\frac{80}{243}$，即可得出结论.

【详解】设X表示这 5 名学生中达标的人数,则$P(X=k)=C_5^k\times\left(\frac{2}{3}\right)^k\times\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$,$k=0,1,2,3,4,5$.

由已知,得$P(X=k)=\frac{80}{243}$,即$C_5^k\times\left(\frac{2}{3}\right)^k\times\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}=\frac{80}{243}$,

解得$k=3$或$k=4$

故选：D

练习 2．种植某种树苗，成活率为 0.9，若种植这种树苗 5 棵，则恰好成活 4 棵的概率是[　　]

A．0.33　　B．0.66　　C．0.5　　D．0.45

【答案】A

【解析】5 次试验中恰好发生 4 次的概率为$C_5^4\times0.9^4\times0.1$.

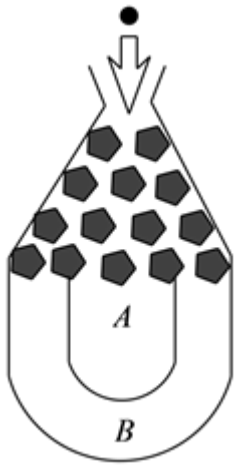
【详解】

由题意概率为$P=C_5^4\times0.9^4\times(1-0.9)=0.32805\approx0.33$,

故选 A.

【点睛】本题考查n次独立重复试验恰好发生k次的概率，属于基础题．n次独立重复试验恰好发生k次的概率为$P=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$.

练习 3．将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的入口处，小球将自由下落，小球在下落的过程中，将3次遇到黑色障碍物，最后落入A袋或B袋中．已知小球每次遇到黑色障碍物时，向左、右两边下落的概率都是$\frac{1}{2}$，则小球落A袋中的概率为（　　）.



A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】由于小球每次遇到黑色障碍物时，有一次向左和两次向右或两次向左和一次向右下落时，小球将落入A袋，所以$P(A)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

故选D.