专题 05　幂指对函数性质活用

一．命题陷阱及易错点分析

指数函数与对数函数是高中数学两个重要的基本函数，初学者往往不能深刻理解指数函数及对数函数的有关概念、图象、性质及应用.关于指数函数与对数函数的试题在命制时，主要有概念类、分类讨论、转化不等价、隐含条件、迷惑性等几类陷阱.其中：

1.概念类陷阱，包括指数的运算性质找不到化简方向、指数函数的底数讨论，指数函数对数函数的定义中对底数的限制及对数对真数的限制；

（1）指数幂的运算.注意几个运算公式的使用.

（2）指数函数底数讨论. $y=a^x$ 当 $0<a<1$ 时函数是减函数，当 $a>1$ 时函数是增函数.

（3）指数函数定义.函数必须严格具备 $y=a^x,a>0,且a\neq1$ 形式的函数是指数函数.

（4）对数的底数和真数,它们都必须大于 0，底数还要不等于 1.

2.隐含条件陷阱，对含有 $a^x,a>0,且a\neq1$ 的式子，隐含着 $a^x>0$.

3. 迷惑性陷阱，含有逻辑联结词.把任意和存在转化为求函数的最值问题或方程的有解问题.

4.分类讨论陷阱，含参数对数函数的定义域值域为全体实数问题.在处理式要对参数进行讨论要做到不重不漏.

5. 等价转化陷阱，指数函数与对数函数互为反函数问题，转化为数形结合问题.

6.定义域为 R 与值域为 R 及特定定义域陷阱

7.幂指对函数中的倒序求和

二.【学习目标】

1．理解对数的概念，掌握指数与对数的相互转化，会运用指数、对数运算法则进行有关运算.

2．掌握对数函数的定义、图象和性质及其应用.

3．掌握以对数函数为载体的复合函数的有关性质.

4．了解指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数($a>0$ 且 $a\neq1$)的关系.

三.【知识要点】

1．对数的定义

如果 $a^x=N(a>0$ 且 $a\neq1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作_____，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

2．几种常见的对数

对数形式	特　　点	记法
一般对数	底数为 $a(a>0$ 且 $a\neq1)$	$\log_a N$
常用对数	底数为 10	$\lg N$
自然对数	底数为 e	$\ln N$

3.对数的性质($a>0$，且 $a\neq1$，$N>0$)

① $a^{\log_a N}$=_____；

②$\log_a a^N$=_____；

③换底公式：_____；$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$，推广 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$.

4．对数的运算法则

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

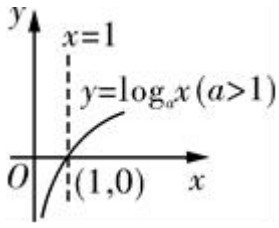
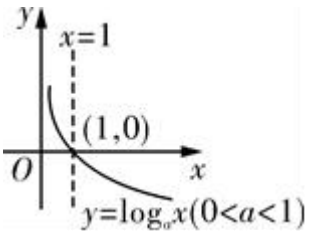
①$\log_a(MN)$=_____；

②$\log_a\frac{M}{N}$=_____；

③$\log_a M^n$=_____；

④$\log_{a^m} M^n$=_____．学+_科网

5．对数函数的概念、图象和性质

定义	形如 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$的函数叫对数函数	
图象		
性质	(1)定义域：_____	
	(2)值域：_____	
	(3)过点_____，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	(4)在(0，＋∞)上是_____	在(0，＋∞)上是_____
	(5)$x>1$ 时，_____ $0<x<1$ 时，_____	$x>1$ 时，_____ $0<x<1$ 时，_____

6.反函数

指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图象关于直线_____对称.

四．题型分析

1.利用幂指对函数性质比较大小

2.幂指对函数的性质

3.幂指对函数的定义问题

4.幂指对函数的图像问题

5.幂指对奇偶性问题

6.幂指对参数范围问题

7.幂指对综合问题

8.创新题型

9.对称问题

1.利用幂指对函数性质比较大小

例 1. 【江苏扬州 2019 模拟】三个数$0.7^{0.6}$，$5^{0.8}$，$log_{0.6}5$的大小顺序是（　　）

A．$5^{0.8}<0.7^{0.6}<log_{0.6}5$　　B．$5^{0.8}<log_{0.6}5<0.7^{0.6}$

C．$log_{0.6}5<5^{0.8}<0.7^{0.6}$　　D．$log_{0.6}5<0.7^{0.6}<5^{0.8}$

【答案】D

【分析】根据指数函数的单调性以及对数函数的单调性分别判断出$0.7^{0.6}$，$5^{0.8}$，$log_{0.6}5$的取值范围，从而可得结果.

【解析】由指数函数的性质可得$0<0.7^{0.6}<0.7^0=1$，

$\because 5^{0.6}>5^0=1$，

由对数函数的性质可得$log_{0.6}5<log_{0.6}1=0$，

$log_{0.6}5<0.7^{0.6}<5^{0.8}$，故选 D.

【点评】本题主要考查对数函数的性质、指数函数的单调性及比较大小问题，属于难题.解答比较大小问题，常见思路有两个：一是判断出各个数值所在区间（一般是看三个区间$(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$）；二是利用函数的单调性直接解答；数值比较多的比大小问题也可以两种方法综合应用.

练习 1．已知$a=2^{-\frac{1}{3}},b=log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3},c=log_23,d=log_45$．则（　　）

A．$a>c<d>b$　　B．$b<a<c<d$　　C．$b<a<d<c$　　D．$c>a>d>b$

【答案】C

【解析】利用指数与对数的性质，先分别与 1 和 0 比较大小，间接的比较出一部分的大小关系，对没有比较出大小关系的，通过化为底数一样的形式再去比较大小即可。

【详解】因为$a=2^{-\frac{1}{5}}>0$，而$2^{-\frac{1}{5}}<2^{0}=1$，所以$0<a<1$，

$b=\log_{2}\frac{1}{5}<\log_{2}1=0$，所以$b<0$，

$c=\log_{2}3>\log_{2}2=1$，所以$c>1$，

$d=\log_{4}5>\log_{4}4=1$，所以$d>1$，

而$d=\log_{4}5=\frac{1}{2}\log_{2}5=\log_{2}\sqrt{5}<\log_{2}3=c$，故$1<d<c$，

所以$b<0<a<1<d<c$.

故选：C.

练习 2．设$a=log_{5}4-log_{5}2$，$b=ln\frac{2}{3}+ln3$，$c=10^{\frac{1}{2}lg5}$，则a,b,c的大小关系为

A．$a<b<c$　　B．$a<b<c$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

【答案】B

【解析】由题意得$a=log_{5}4-log_{5}2=log_{5}2<1$，$b=ln\frac{2}{3}+ln3=ln2<1$，

$c=10^{\frac{1}{2}lg5}=\sqrt{5}>1$.

根据对数函数的性质，可知$a<b$，

$\therefore a<b<c$．选 B.

练习 3.已知$1<a<b$，$m=a^{b-1}$，$n=b^{a-1}$，则m,n 的大小关系为（　　）

A．$m<n$　　B．$m=n$

C．$m>n$　　D．m,n 的大小关系不确定，与 a,b 的取值有关

【答案】C

【解析】∵$1<a<b$，∴$b-1>a-1>0$，∴$m=a^{b-1}>a^{a-1}>n=b^{a-1}$，则 $m>n$，

本题选择 C 选项.

2.幂指对函数的性质

例 2【江苏扬州 2019 模拟】已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+5,x\le 1\\ -\log_a x,x>1\end{cases}$ **是**$(-\infty,+\infty)$**上的减函数，那么**a**的取值范围是（　　）**

A. $(1,+\infty)$　　**B.** $(1,3)$　　**C.** $(1,3]$　　**D.** $[1,3)$

【答案】C

【分析】由$y=x^2-2ax+5$在$(-\infty,1]$上递减，$y=-\log_a x$在$(1,+\infty)$上递减，结合$1-2a+5\ge-\log_a 1$即可得结果.

【解析】因为$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+5,x\le 1\\ -\log_a x,x>1\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的减函数，

所以$y=x^2-2ax+5$在$(-\infty,1]$上递减，可得$a\ge 1$，

$y=-\log_a x$在$(1,+\infty)$上递减，由对数函数的单调性可得$a>1$，

又因为$1-2a+5\ge-\log_a 1$，解得$a\le 3$，

综上可得$1<a\le 3$，即a的取值范围是$(1,3]$，故选 C.

【点评】本题主要考查分段函数的解析式及单调性，属于中档题.分段函数的单调性是分段函数性质中的难点，也是高考命题热点，要正确解答这种题型，必须熟悉各段函数本身的性质，在此基础上，不但要求各段函数的单调性一致，最主要的也是最容易遗忘的是，要使分界点处两函数的单调性与整体保持一致.

练习 1.函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x)$ **的单调递增区间为（　　）**

A.（－∞，2）　　B.（2，+∞）　　C.（－∞，4）　　D.（4，+∞）

【答案】D

【解析】先求得函数的定义域，函数$f(x)$是复合函数，外函数是增函数，再找出内函数在定义域内的增区间即可。

【详解】由函数$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x)$，可得 $x^2-4x>0$，求得 $x<0$ 或 $x>4$，故函数的定义域为$\{x|x<0$ 或 $x>4\}$，

令 $t=x^2-4x$，则$y=\log_{\frac{1}{3}}t$

因为$y=\log_{\frac{1}{3}}t$ 是定义域内的增函数，

只需找出函数 $t=x^2-4x$ 在定义域内的增区间.

利用二次函数的性质可得 $t=x^2-4x$ 在定义域内的增区间为（4，+∞），

故选：D.

【点睛】①研究函数的单调性，首先要考虑函数的定义域，要注意函数的单调区间是定义域内的某个区间。

②对于复合函数的单调性，要综合考虑内外函数的单调性，利用“同增异减”的方法。

练习 2.函数 $y=\log_{0.5}(x^2-3x-10)$的递增区间是 （　　）

A．(-∞，-2)　　B．(5，+∞)　　C．$(-\infty,\frac{3}{2})$　　D．$(\frac{3}{2},+\infty)$

【答案】A

【解析】由$x^2-3x-10>0$得$x>5$或$x<-2$.

当$x\in(-\infty,2)$时，$f(x)=x^2-3x-10$单调递减，

而$0<0.5<1$,由复合函数单调性可知，$y=log_{0.5}(x^2-3x-10)$在$(-\infty,2)$上是单调递增的，

故选 A.

点睛：复合函数单调性的判断：$y=f(g(x))$.

当内层函数$g(x)$单调递增，外层函数$f(x)$单调增，则$y=f(g(x))$单调递增；

当内层函数$g(x)$单调递减，外层函数$f(x)$单调减，则$y=f(g(x))$单调递增；

内层函数$g(x)$单调递减，外层函数$f(x)$单调增，则$y=f(g(x))$单调递减；

内层函数$g(x)$单调递增，外层函数$f(x)$单调减，则$y=f(g(x))$单调递减.

将上述判断方法简称为“同增异减”.

3.幂指对函数的定义问题

例 3.【2019 四川遂宁模拟】函数 $f(x)=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数，则有（　　）

A．a=1 或 a=2　　B．a=1　　C．a=2　　D．a>0 且 a≠1

【答案】C

【分析】根据指数函数的定义得到 $a^2-3a+3=1$， a>0 且$a\neq1$,解出方程即可.

【解析】函数 $f(x)=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数,根据指数函数的定义得到 $a^2-3a+3=1$，且 a>0,解得 a=1 或 2，因为指数函数的底数不能为 1，故结果为 2.

故答案为：C.

(3)不等式 $mf(x)-f(\frac{x}{2})>0$

$\Leftrightarrow m(1+\frac{2}{4^x-1})-(1+\frac{2}{4^{\frac{x}{2}}-1})>0$ 对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，

令$2^x=t(t>1)$,

$$m>\frac{\frac{t+1}{t-1}}{\frac{t^2+1}{t^2-1}}=\frac{(t+1)^2}{t^2+1}=\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}=1+\frac{2t}{t^2+1}=\frac{2}{t+\frac{1}{t}}$$

则 对$t>1$恒成立，

$\because \frac{2}{t+\frac{1}{t}}$ 在$t>1$时，递减，所以 $\frac{2}{t+\frac{1}{t}}<1$ ，$m\geq 1$.

【点睛】函数恒成立求参数取值范围是常考题型，一种方法，可以采用参变分离的方法，将恒成立转化为求函数的最大值和最小值，二种方法，将不等式整理为$F(x)<0$的形式，即求$F(x)_{\max}<0$ ，或是$F(x)>0$的形式，即求$F(x)_{\min}<0$ ，求参数取值.

练习 2．已知函数$f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$ **(其中 *a*>0 且 *a*≠1).**

（1）求函数 *f*(*x*)的奇偶性，并说明理由；

（2）若$a=\frac{1}{3}$**，当 *x*∈**$[0,\frac{1}{2}]$ **时，不等式**$f(x)>4^x+2m-1$**恒成立，求实数 *m* 的范围.**

【答案】（1）奇函数（2）$m<-1$

【解析】（1）由于函数 f（x）的定义域关于原点对称，且 f（﹣x）=﹣f（x），可得函数 f（x）是奇函数；（2）设$F(x)=f(x)-4^x+1$,不等式$f(x)>4^x+2m-1$恒成立即$2m<F(x)_{min}$

【详解】（1）由条件知$\frac{1+x}{1-x}$>0，解得－1<*x*<1，∴函数$f(x)$的定义域为(－1,1)；

可知函数$f(x)$的定义域关于原点对称.

f(－*x*)=$\log_a\frac{1+x}{1-x}$=--$\log_a\frac{1+x}{1-x}$=－*f*(*x*)，

因此$f(x)$是奇函数.

（2）任取 x_1，x_2∈（﹣1，1），且 x_1<x_2

$$f(x_1)-f(x_2)=\log_a\frac{1+x_1}{1-x_1}-\log_a\frac{1+x_2}{1-x_2}=\log_a\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)},$$

因为$\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}-1=\frac{2(x_1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}$

又﹣1<x_1<x_2<1，所以$\frac{2(x_1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}<0$，

因此有$\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}<1$.

又$a=\frac{1}{3}$，所以$log_a\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}>0$，

即 f（x_1）＞f（x_2）.

所以当$a=\frac{1}{3}$时，f（x）在（－1，1）上是减函数.

设$F(x)=f(x)-4^x+1$，

可知$F(x)$是减函数，则$2m<F(x)_{min}=F\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，

解得：$m<-1$。

【点睛】本题主要考查对数函数的单调性，求函数的奇偶性的方法和步骤，属于中档题.

练习 3．是否存在实数 a，使得函数 $f(x)=a^{2x}+2a^x-1(a>0且a\neq1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 14？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

【答案】$a=3或\frac{1}{3}$.

【解析】令 $a^x=t$，分为 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情形，由 x 的范围得到新的变量 t 的范围，故转化为二次函数 $y=t^2+2t-1$ 在给定区间内求最值.

试题解析：令 $a^x=t$，则 $y=t^2+2t-1$，开口向上，对称轴为 $t=-1$，

当 $a>1$ 时，$t\in\left[\frac{1}{a},a\right]$，故函数 $y=t^2+2t-1$ 在 $\left[\frac{1}{a},a\right]$ 上单调递增，故 $y_{max}=a^2+2a-1=14$，

解得 $a=3$ 或 $a=-5$（舍去）

当 $0<a<1$ 时，$t\in\left[a,\frac{1}{a}\right]$，故函数 $y=t^2+2t-1$ 在 $\left[a,\frac{1}{a}\right]$ 上单调递增，故 $y_{max}=\left(\frac{1}{a}\right)^2+2\frac{1}{a}-1=14$，

解得 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{1}{5}$（舍去）

综上所述：a 的值为 $a=3或\frac{1}{3}$.

考点：二次函数的性质.

【方法点睛】本题主要考查了换元法以及二次函数在给定区间内的最值问题，注重对基础的考查，难度一般；换元法的作用是利用整体代换，常设 $a^x=t$，转化为一元二次方程、二次函数等问题，要注意换元后 t 的取值范围；二次函数在给定区间内求最值主要是根据所给区间与二次函数对称轴的关系，判断函数在该

区间上的单调性，得其最值.

8.创新题型

例 8.若定义运算 $a*b=\begin{cases}b, a<b\\ a, a\geq b\end{cases}$，**则函数** $f(x)=\log_2 x*\log_{\frac{1}{2}} x$ **的值域是（　　）**

A. $(0, 1]$　　**B.** $[0, +\infty)$

C. $[1, +\infty)$　　**D.** R

【答案】B

【解析】令$\log_2 x<\log_{\frac{1}{2}} x\Rightarrow\log_2 x<-\log_2 x$，即$2\log_2 x<0$，即$0<x<1$，令$\log_2 x\geq\log_{\frac{1}{2}} x$，解得$x\geq 1$，又因为$a*b=\begin{cases}b, a<b\\ a, a\geq b\end{cases}$，所以$f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x, 0<x<1\\ \log_2 x, x\geq 1\end{cases}$，当$0<x<1$时，函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$单调递减，所以此时$f(x)\in(0,+\infty)$，当$x\geq 1$时，函数$f(x)=\log_2 x$单调递增，此时$f(x)\in[0,+\infty)$，所以函数$f(x)$的值域为$[0,+\infty)$，故选 B.

考点：函数的值域的求解.

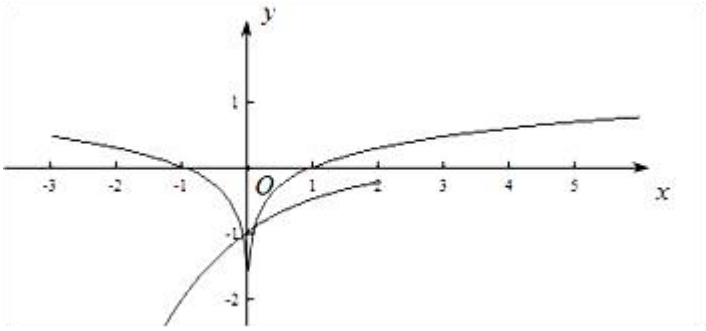
【方法点睛】本题主要考查了函数的值域的计算问题，其中解答中涉及到对数函数的图象与性质，对数不等式的求解，对数函数的值域，以及对数函数的单调性的判定及应用，着重考查了学生分析问题和解答问题的能力，以及转化与化归思想的应用，本题的解答中根据函数的新定义，得到新函数的解析式是解答的关键，试题有一定难度，属于中档试题.

练习 1. 若点 A, B 分别是函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象上的点，且线段 AB 的中点恰好为原点 $O(0,0)$，则称 A, B 为两函数的一对“孪生点”.若 $f(x)=\lg|x|, g(x)=2^x$**，则这两函数的“孪生点”共有（　　）**

A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对

【答案】B

【解析】



由题意，$y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ “孪生点”的对数就是 $y=f(x)$ 与 $y=-g(-x)$（与 $y=g(x)$ 关于原点对称）的交点个数，由 $g(x)=2^x$，得 $-g(-x)=-2^{-x}=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$，画出 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\lg|x|$ 的图象，如图，由图知，两图象有 2 个交点，$\therefore f(x)=\lg|x|$ 与 $g(x)=2^x$ 这两函数的“孪生点”共有 2 对，故选 B.

【方法点睛】本题考查对数函数、指数函数的图象、函数图象的对称变换，新定义问题及数形结合思想，属于难题.新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的.遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决.本题通过定义两函数的“孪生点”达到考查对数函数、指数函数的图象以及函数图象的对称变换的目的.

9.对称问题

例 9．设曲线 $y=x^{n+1}(n\in N^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n，则 $\log_{2017}x_1+\log_{2017}x_2+\ldots+\log_{2017}x_{2016}$ 的值为（　　）

A．$-\log_{2017}2016$　　B．-1　　C．$\log_{2017}2016-1$　　D．1

【答案】B

【解析】$\because y'=(n+1)x^n$，所以曲线 $y=x^{n+1}(n\in N^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为 $k=(n+1)\times 1^n=n+1$，所以切线方程为 $y-1=(n+1)(x-1)$，令 y=0，可得 $x_n=\frac{n}{n+1}$，所以 $\log_{2017}x_1+\log_{2017}x_2+\ldots+\log_{2017}x_{2016}=\log_{2017}(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_{2016})=\log_{2017}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2016}{2016+1}\right)=\log_{2017}\frac{1}{2017}=-1$。故选 B。

练习 1．定义在 R 上的函数 $f(x)$，已知函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，对任意的 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$（$x_1\neq x_2$），都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则下列结论正确的是（　）

A．$f(0.3^2)<f(2^{0.3})<f(\log_2 5)$　　B．$f(\log_2 5)<f(2^{0.3})<f(0.3^2)$

C．$f(\log_2 5)<f(0.3^2)<f(2^{0.3})$　　D．$f(0.3^2)<f(\log_2 5)<f(2^{0.3})$

【答案】A

【解析】因为函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 y 轴对称，所以函数 $y=f(x)$ 为偶函数，由对任意的 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$（$x_1\neq x_2$），都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又因为 $0.3^2<2^{0.3}<\log_2 5$，所以 $f(0.3^2)<f(2^{0.3})<f(\log_2 5)$.故选 A.