专题 07　导数有关的构造函数方法

一．知识点

基本初等函数的导数公式

(1)常用函数的导数

①$(C)'$=_____(C 为常数)；　②$(x)'$=_____；

③$(x^2)'$=_____；　④$\left(\frac{1}{x}\right)'$=_____；

⑤$(\sqrt{x})'$=_____.

(2)初等函数的导数公式

①$(x^n)'$=_____；　②$(\sin x)'$=_____；

③$(\cos x)'$=_____；　④$(e^x)'$=_____；

⑤$(a^x)'$=_____；　⑥$(\ln x)'$=_____；

⑦$(\log_a x)'$=_____.

5．导数的运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'$=_____；

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'$=_____；

(3)$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$=_____.

6．复合函数的导数

(1)对于两个函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成 x 的函数，那么称这两个函数(函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$)的复合函数为 $y=f(g(x))$.

(2)复合函数 $y=f(g(x))$的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间的关系为_____，即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

二．题型分析

1.构造多项式函数

2.构造三角函数型

3.构造 e^x 形式的函数

4.构造成积的形式

5.与 $\ln x$ 有关的构造

6.构造成商的形式

7.对称问题

（一）构造多项式函数

例 1．已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(l)=1$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)<\frac{1}{2}$，则 $f(x)<\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ 的解集为（　　）

A. $\{x|-1<x<1\}$　　**B.** $\{x\,|\,x<-1\}$

C. $\{x|x<-1$或$x>1\}$　　**D.** $\{x\,|\,x>1\}$

【答案】D

【解析】令 $F(x)=f(x)-\frac{x}{2}$，则 $F'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}<0$，所以函数 $F(x)$ 在定义域上为单调递减函数，因为 $f(x)<\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$，所以 $f(x)-\frac{x}{2}<f(1)-\frac{1}{2}$，即 $F(x)<F(1)$，根据函数 $F(x)$ 在定义域上单调递减，可知 $x>1$，故选 D.

考点：函数的单调性与导数的关系.

【方法点晴】本题主要考查了函数的单调性与函数的导数之间的关系，其中解答中涉及到利用导数研究函数的单调性，利用导数研究函数的极值与最值等知识点的综合考查，着重考查了学生分析问题和解答问题的能力，以及转化与化归思想的应用，本题的解答中根据题设条件，构造新函数 $F(x)$，利用新函数的性质是解答问题的关键，属于中档试题.

练习 1.设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导函数 $f'(x)$，对于任意的实数 x，都有 $f(x)=4x^2-f(-x)$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)+\frac{1}{2}<4x$.若 $f(m+1)\le f(-m)+4m+2$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $[-\frac{1}{2},+\infty)$　　**B.** $[-\frac{3}{2},+\infty)$　　**C.** $[-1,+\infty)$　　**D.** $[-2,+\infty)$

【答案】A

【解析】∵ $f(x)-2x^2+f(-x)-2x^2=0$，设 $g(x)=f(x)-2x^2$，则 $g(x)+g(-x)=0$，∴ $g(x)$ 为奇函数，又 $g'(x)=f'(x)-4x<-\frac{1}{2}$，∴ $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，从而在 R 上是减函数，又 $f(m+1)\le f(-m)+4m+2$ 等价于 $f(m+1)-2(m+1)^2\le f(-m)-2(-m)^2$，即 $g(m+1)\le g(-m)$，∴ $m+1\ge -m$，解得 $m\ge-\frac{1}{2}$.

考点：导数在函数单调性中的应用.

【思路点睛】因为$f(x)-2x^2+f(-x)-2x^2=0$，设$g(x)=f(x)-2x^2$，则$g(x)+g(-x)=0$，可得$g(x)$为奇函数，又$g'(x)=f'(x)-4x<-\frac{1}{2}$，得$g(x)$在$(-\infty,0)$上是减函数，从而在$R$上是减函数，在根据函数的奇偶性和单调性可得$g(m+1)\le g(-m)$，由此即可求出结果.

练习 2.设奇函数$f(x)$在R上存在导数$f'(x)$,且在$(0,+\infty)$上$f'(x)<x^2$,若$f(1-m)-f(m)\ge\frac{1}{3}[(1-m)^3-m^3]$,则实数$m$的取值范围为（ ）

A. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ **B.** $[\frac{1}{2},+\infty)$

C. $(-\infty,\frac{1}{2}]$ **D.** $(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$

【答案】B

【解析】令$g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，因为$g(-x)+g(x)=f(-x)-\frac{1}{3}(-x^3)+f(x)-\frac{1}{3}x^3=0$，所以函数$g(x)$的奇函数，因为$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)=f'(x)-x^2<0$，所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$为减函数，又题意可知，$f(0)=0,g(0)=0$，所以函数$g(x)$在$R$上为减函数，所以$f(1-m)-f(m)\ge\frac{1}{3}[(1-m)^3-m^3]$，即$g(1-m)\ge g(m)$，所以$1-m\le m$，所以$m\ge\frac{1}{2}$，故选 B.

【方法点睛】本题主要考查了函数的奇偶性及其应用，其中解答中涉及到利用导数求函数的单调性、利用导数研究函数的极值、以及函数的奇偶性的判定等知识点的综合考查，着重考查了转化与化归的思想方法，以及学生的推理与运算能力，属于中档试题，解答中得出函数的奇函数和函数的单调性是解答的关键.

练习 3.设函数$f(x)$在R上存在导函数$f'(x)$，对任意$x\in R$，都有$f(x)+f(-x)=x^2$，且$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>x$，若$f(2-a)-f(a)\ge2-2a$，则实数a的取值范围是（ ）

A. $[1,+\infty)$ **B.** $(-\infty,1]$ **C.** $(-\infty,2]$ **D.** $[2,+\infty)$

【答案】B

【解析】令$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，则$g(-x)=f(-x)-\frac{1}{2}x^2$，则$g(x)+g(-x)=f(x)+f(-x)-x^2=0$，得$g(x)$为$R$上的奇函数.$\because x>0$时，$g'(x)=f'(x)-x>0$，故$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，再结合$g(0)=0$

及 $g(x)$ 为奇函数，知 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为增函数，又

$g(2-a)-g(a)=f(2-a)-\frac{(2-a)^2}{2}-(f(a)-\frac{a^2}{2})=f(2-a)-f(a)-2+2a\geq(2-2a)-2+2a=0$ 则

$g(2-a)\geq g(a)\Leftrightarrow 2-a\geq a\Leftrightarrow a\leq 1$，即 $a\in(-\infty,1]$．故选 B.

考点：函数的单调性及导数的应用.

【方法点睛】本题考查了利用导数研究函数的单调性，然后构造函数，通过新函数的性质把已知条件转化为关于 a 的不等式来求解.本题解答的关键是由已知条件 $f'(x)>x$ 进行联想，构造出新函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，然后结合 $f(x)+f(-x)=x^2$ 来研究函数 $g(x)$ 的奇偶性和单调性，再通过要解的不等式 $f(2-a)-f(a)\geq 2-2a$ 构造 $g(2-a)-g(a)$，最终得到关于 a 的不等式，解得答案.

（二）构造三角函数型

例 2．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$2\sin x\cos x-f'(x)>0$ 且 $\forall x\in R$，$f(-x)+f(x)+\cos 2x=1$.则下列说法一定正确的是（　　）

A. $\frac{1}{4}-f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{3}{4}-f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$　　**B.** $\frac{1}{4}-f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{3}{4}-f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\frac{3}{4}-f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$　　**D.** $\frac{1}{2}-f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)>\frac{3}{4}-f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】B

【解析】令 $F(x)=\sin^2 x-f(x)$，则 $F'(x)=\sin 2x-f'(x)$.因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$2\sin x\cos x-f'(x)>0$，即 $\sin 2x>f'(x)$，所以 $F'(x)=\sin 2x-f'(x)>0$，所以 $F(x)=\sin^2 x-f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增.又 $\forall x\in R$，$f(-x)+f(x)+\cos 2x=1$，所以 $f(-x)+f(x)=2\sin^2 x$，所以 $\sin^2(-x)-f(-x)=\sin^2 x-2\sin^2 x+f(x)=+\left[\sin^2 x-f(x)\right]$，故 $F(x)=\sin^2 x-f(x)$ 为奇函数，所以 $F(x)=\sin^2 x-f(x)$ 在 R 上单调递增，所以 $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)>F\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.即 $\frac{1}{4}-f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{3}{4}-f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$，故选 B.

练习 1．已知函数 $y=f(x)$ 对任意的 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式成立的是（　　）

A. $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3})<f(-\frac{\pi}{4})$　　**B.** $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})<f(\frac{\pi}{4})$

C. $f(0)>2f(\frac{\pi}{3})$　　**D.** $f(0)>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$

【答案】A

【解析】构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}\left(f'(x)\cos x+f(x)\sin x\right)>0$，即函数 g（x）在 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，

则 $g\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)<g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\therefore\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}<\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$，$\therefore\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}<\dfrac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，即 $\sqrt{2}f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)<f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

故 A 正确．$g(0)<g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，即 $\dfrac{f(0)}{\cos 0}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}\therefore f(0)<2f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

练习 2．定义在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$，$f'(x)$ 是它的导函数，且恒有 $f(x)<f'(x)\cdot\tan x$ 成立，则（　　）

A. $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$　　**B.** $f(1)<2f(\frac{\pi}{6})\sin 1$

C. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})>f(\frac{\pi}{4})$　　**D.** $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})<f(\frac{\pi}{3})$

【答案】D

【解析】在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上，有 $f(x)<f'(x)\tan x=f'(x)\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$，即 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$ 令

$F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{(\sin x)^2}>0$，故 $F(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

令 $x_1=\dfrac{\pi}{4},x_2=\dfrac{\pi}{3},x_3=\dfrac{\pi}{6},x_3<x_1<1<x_2$，则有 $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}<\dfrac{f(1)}{\sin 1}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，D 选项正确.

【思路点睛】本题有两个要点，第一个要点是“切化弦”，在不少题目中，如果遇到 $\tan x$，往往转化为 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 来思考；第二个要点是构造函数法，题目中 $f(x)<f'(x)\tan x=f'(x)\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$，可以化简为 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，这样我们就可以构造一个除法的函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，而选项正好是判断 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$ 单调性的问题，顺势而为.

（三）构造 e^x 形式的函数

例 3．已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，且 $(x+1)f(x)+xf'(x)>0$ 对 $x\in R$ 恒成立，则下列函数在实数集内一定是增函数的为（　）

A. $f(x)$　　**B.** $xf(x)$

C. $e^xf(x)$　　**D.** $xe^xf(x)$

【答案】D

【解析】设 $F(x)=xe^xf(x)$，则 $F'(x)=(x+1)e^xf(x)+xe^xf'(x)=e^x\left[(x+1)f(x)+xf'(x)\right]$.

$\because(x+1)f(x)+xf'(x)>0$ 对 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立，且 $e^x>0$. $\therefore F'(x)>0,\therefore F(x)$ 在 R 上递增，故选 D.

练习 1. 设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)(x\in\mathrm{R})$ 的导函数，$f(0)=1$，且 $3f(x)=f'(x)-3$，则 $4f(x)>f'(x)$ 的解集为（　）

A. $(\dfrac{\ln 4}{3},+\infty)$　　**B.** $(\dfrac{\ln 2}{3},+\infty)$

C. $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$　　**D.** $(\dfrac{\sqrt{e}}{3},+\infty)$

【答案】B

【解析】依题意 $3f(0)=f'(0)-3, f'(0)=6$，构造函数 $f(x)=2e^{3x}-1, f'(x)=6e^{3x}$，

由 $4f(x)>f'(x)$，得 $4\left(2e^{3x}-1\right)>6e^{3x}, e^{3x}>2=e^{\ln 2}, 3x>\ln 2$，$x>\dfrac{\ln 2}{3}$

【思路点睛】本题考查导函数的概念，基本初等函数和复合函数的求导，对数的运算及对数函数的单调性. 构造函数法是在导数题目中一个常用的解法.方程的有解问题就是判断是否存在零点的问题，可参变分离，转化为求函数的值域问题处理. 恒成立问题以及可转化为恒成立问题的问题，往往可利用参变分离的方法，转化为求函数最值处理．学科网

练习 2.已知 $f(x)$ 定义在 R 上的函数，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x)>1-f'(x)$，且 $f(0)=2$，则不等式 $e^x f(x)>e^x+1$（其中 e 为自然对数的底数）的解集是（　　）

A. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　**B.** $(-1,+\infty)$　　**C.** $(0,+\infty)$　　**D.** $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

【答案】C

【解析】设 $g(x)=e^x f(x)-e^x,(x\in R)$，则 $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)-e^x=e^x\left[f(x)+f'(x)-1\right]$，

∵ $f(x)>1-f'(x)$，∴ $f(x)+f'(x)-1>0$，∴ $g'(x)$，∴ $y=g(x)$ 在定义域上单调递增，∵ $e^x f(x)>e^x+1$，∴ $g(x)>1$，又∵ $g(0)=e^0 f(0)-e^0=1$，∴ $g(x)>g(0)$，∴ $x>0$，∴不等式的解集为 $(0,+\infty)$ 故选：C.

考点：利用导数研究函数的单调性.

【方法点睛】本题考查函数单调性与奇偶性的结合，结合已知条件构造函数，然后用导数判断函数的单调性是解题的关键，属于中档题．结合已知条件中的 $f(x)>1-f'(x)$ 以及所求结论 $e^x f(x)>e^x+1$ 可知应构造函数 $g(x)=e^x f(x)-e^x,(x\in R)$，利用导数研究 $y=g(x)$ 的单调性，结合原函数的性质和函数值，即可求解.

练习 3．定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对任意实数 x，有 $f(x)>f'(x)$，且 $f(x)+1$ 为奇函数，则不等式 $f(x)+e^x<0$ 的解集是（　　）

A. $(-\infty,0)$　　**B.** $(0,+\infty)$　　**C.** $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$　　**D.** $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

【答案】B

【解析】设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$．由 $f(x)>f'(x)$，得 $g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，故函数 $g(x)$ 在 R 上单调递减．由 $f(x)+1$ 为奇函数 $f(0)=-1$，所以 $g(0)=\frac{f(0)}{e^0}=-1$．不等式 $f(x)+e^x<0$ 等价于 $\frac{f(x)}{e^x}<-1$，即 $g(x)<g(0)$，结合函数 $g(x)$ 的单调性可得 $x>0$，从而不等式 $f(x)+e^x<0$ 的解集为 $(0,+\infty)$，故答案为 B.

【方法点睛】本题考查了导数的综合应用及函数的性质的应用，构造函数的思想，阅读分析问题的能力，属于中档题．常见的构造思想是使含有导数的不等式一边变为 0，即 $f(x)>f'(x)$ 得 $f'(x)-f(x)<0$，当是形如 $f'(x)-f(x)<0$ 时构造 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$；当是 $f'(x)+f(x)<0$ 时构造 $g(x)=f(x)\cdot e^x$，在本题中令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，（ $x\in R$ ），从而求导 $g'(x)<0$，从而可判断 $y=g(x)$ 单调递减，从而可得到不等式的解集.

练习 4.已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为（　）

A. $(-2,+\infty)$　　**B.** $(4,+\infty)$　　**C.** $(1,+\infty)$　　**D.** $(0,+\infty)$

【答案】D

【解析】设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则

$g'(x)=\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{(e^x)^2}==\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，$\because f'(x)<f(x)\therefore g'(x)<0.$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 是 R 上的减函数，

$\because$ 函数 $f(x+2)$ 是偶函数，

$\therefore$ 函数 $f(-x+2)=f(x+2)$

$\therefore$ 函数关于 $x=2$ 对称，

$\therefore f(0)=f(4)=1,$

原不等式等价为 $g(x)<1,$

∴不等式 $f(x)<e^x$ 等价 $g(x)<1,$ 即 $g(x)<g(0)$ ，

∵ $g(x)$ 是 R 上的减函数，

∴ $x>0$.

∴不等式 $f(x)<e^x$ 式的解集为 $(0,+\infty)$. 选 D

练习 5. 设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，$f(0)=1$，且 $3f(x)=f'(x)-3$ ，则 $4f(x)>f'(x)$ 的解集是（　）

A. $\left(\frac{\ln 4}{3},+\infty\right)$　　**B.** $\left(\frac{\ln 2}{3},+\infty\right)$　　**C.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　**D.** $\left(\frac{\sqrt{e}}{3},+\infty\right)$

【答案】B

【解析】设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{3x}}$ ，则 $g'(x)=\frac{f'(x)e^{3x}-3e^{3x}f(x)}{(e^{3x})^2}=\frac{f'(x)-3f(x)}{e^{3x}}=\frac{3}{e^{3x}}$ ，所以 $g(x)=\int 3e^{-3x}dx=-\int e^{-3x}d(-3x)=-e^{-3x}+c$ （ c 为常数），则 $f(x)=e^{3x}g(x)=-1+ce^{3x}$ ，由 $f(0)=-1+c=1$ ，$c=2$，所以 $f(x)=2e^{3x}-1$，又由 $f'(x)=3f(x)+3$，所以 $4f(x)>f'(x)=3f(x)+3$ 即 $f(x)>3$，即 $2e^{3x}-1>3$，解得 $x>\frac{\ln 2}{3}$. 故选 B.

（四）构造成积的形式

例 4. 已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足：函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$ （ $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数）成立. 若 $a=\left(\sin\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\sin\frac{1}{2}\right)$ ，$b=(\ln 2)\cdot f(\ln 2)$ ，$c=\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)$ ，则 a ，b ，c 的大小关系是（　）

A. $a>b>c$　　**B.** $b>a>c$

C. $c>a>b$　　**D.** $a>c>b$

【答案】A

【解析】易知 $f(x)$ 关于 y 轴对称,设 $F(x)=xf(x)$,当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $F'(x)=f(x)+xf'(x)<0$ ，

$\therefore F(x)$在$(-\infty,0)$上为递减函数,且$F(x)$为奇函数,$\therefore F(x)$在R上是递减函数.

$\because 0<\sin\frac{1}{2}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}<\ln 2<1,\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2>1,\therefore F\left(\sin\frac{1}{2}\right)>F(\ln 2)>F\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)$，即$a>b>c$,故选 A.

【方法点睛】本题考查学生的是函数的性质,属于中档题目.从选项可以看出,要想比较a,b,c的大小关系,需要构造新函数$F(x)=xf(x)$,通过已知函数$f(x)$的奇偶性,对称性和单调性,判断$F(x)$的各种性质,可得$F(x)$在R上是递减函数.因此只需比较自变量的大小关系,通过分别对各个自变量与临界值$0,1$作比较,判断出三者的关系,即可得到函数值得大小关系.

练习 1.设函数$f(x)$是定义在$(-\infty,0)$上的可导函数，其导函数为$f'(x)$，且有$2f(x)+xf'(x)>x^2$，则不等式$(x+2016)^2f(x+2016)-4f(-2)>0$的解集为（　　）

A. $(-\infty,-2016)$　　**B.** $(-\infty,-2018)$

C. $(-2018,0)$　　**D.** $(-2016,0)$

【答案】B

【解析】构造函数$F(x)=x^2f(x)$，$F'(x)=x\left[2f(x)+xf'(x)\right]$，由于$2f(x)+xf'(x)>x^2>0$，故$F'(x)=x\left[2f(x)+xf'(x)\right]<0$，$F(x)$为减函数.原不等式即$F(x+2016)>F(-2)$，故$x+2016<-2,x<-2018$.

考点：函数导数与不等式，构造函数.

【思路点睛】本题考查函数导数与不等式，构造函数法.是一个常见的题型，题目给定一个含有导数的条件$2f(x)+xf'(x)>x^2>0$，这样我们就可以构造函数$F(x)=x^2f(x)$，它的导数恰好包含这个已知条件，由此可以求出$F(x)$的单调性，即函数$F(x)$为减函数.注意到原不等式可以看成$F(x+2016)>F(-2)$，利用函数的单调性就可以解出来.

练习 2．设函数$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的可导函数，其导函数为$f'(x)$，且有$2f(x)+x^2f'(x)>0$，则不等式$(x-2014)^2f(x-2014)-4f(2)>0$的解集为（ ）

A. $(2012,+\infty)$　　**B.** $(0,2012)$　　**C.** $(0,2016)$　　**D.** $(2016,+\infty)$

【答案】D

【解析】试题分析：∵函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，$2f(x)+xf'(x)>x^2$，

$\therefore 2xf(x)+x^2f'(x)>x^3>0,\therefore\left[x^2f(x)\right]'>0,$ ∴函数 $y=x^2f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\because(x-2014)^2f(x-2014)-4f(2)>0\therefore\therefore(x-2014)^2f(x32014)\ >2^2f(2)$，

$\therefore x-2014>2,\therefore x>2016,$

∴不等式的解集为 $(2016,+\infty)$.

【名师点睛】本题考查函数的单调性，解不等式，以及导数的应用，属中档题．解题时正确确定函数 $y=x^2f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数是解题的关键

练习 3.函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且满足 $xf'(x)+2f(x)>0$，则不等式 $\dfrac{(x+2016)f(x+2016)}{5}<\dfrac{5f(5)}{x+2016}$ 的解集为（　　）

A. $\{x|x>-2011\}$　　**B.** $\{x|x<-2011\}$

C. $\{x|-2016<x<-2011\}$　　**D.** $\{x|-2011<x<0\}$

【答案】C

【解析】由 $xf'(x)+2f(x)>0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x^2f'(x)+2xf(x)>0$，即 $[xf(x)]'=x^2f'(x)+2xf(x)>0$，所以函数 $xf(x)$ 为单调递增函数，由 $\dfrac{(x+2016)f(x+2016)}{5}<\dfrac{5f(5)}{x+2016}$，即 $(x+2016)^2f(x+2016)<5^2f(5)$，所以 $0<x+2016<5$，所以不等式的解集为 $\{x|-2016<x<-2011\}$，故选 C.

（五）与 $\ln x$ 有关的构造

例 5.已知定义在实数集 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=4$，且 $f(x)$ 导函数 $f'(x)<3$，则不等式 $f(\ln x)>3\ln x+1$ 的解集为（　　）

A. $(1,+\infty)$　　**B.** $(e,+\infty)$　　**C.** $(0,1)$　　**D.** $(0,e)$

【答案】D

【解析】设 t=lnx,则不等式 $f(\ln x)>3\ln x+1$ 化为 $f(t)>3t+1$，设 g(x)=f(x)-3x-1,则 $g'(x)=f'(x)-3$。

因为$f'(x)<3$，所以$g'(x)=f'(x)-3$<0,此时函数 g(x)单调递减。因为 f(1)=4，所以 g(1)=f(1)-3-1=0,所以当 x>1 时，g(x)<g(1)=0,此时 g(x)=f(x)-3x-1<0,即不等式 f(x)>3x+1 的解为 x<1，即不等式 f(t)>3t+1 的解集为 t<1.由 lnx<1 得 0<x<e。选 D。

练习 1.设$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$,$e$**为自然对数的底数.若**$f'(x)\ln x>\dfrac{f(x)}{x}$**，则（　）**

A. $f(2)<f(e)\ln 2, 2f(e)>f(e^2)$　　**B.** $f(2)<f(e)\ln 2, 2f(e)<f(e^2)$

C. $f(2)>f(e)\ln 2, 2f(e)<f(e^2)$　　**D.** $f(2)>f(e)\ln 2, 2f(e)>f(e^2)$

【答案】B

【解析】由不等式$f'(x)\ln x>\dfrac{f(x)}{x}$启发，可构造函数$F(x)=\dfrac{f(x)}{\ln x}$，则$F'(x)=\dfrac{f'(x)\ln x-\dfrac{f(x)}{x}}{(\ln x)^2}$，又由$f'(x)\ln x>\dfrac{f(x)}{x}$，得$f'(x)\ln x-\dfrac{f(x)}{x}>0$，即$F(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递增函数，因为$2<e<e^2$，所以$F(2)<F(e)<F(e^2)$，即$\dfrac{f(2)}{\ln 2}<\dfrac{f(e)}{\ln e}<\dfrac{f(e^2)}{\ln e^2}$，又$\ln e=1,\ln e^2=2$，整理可得$f(2)<f(e)\ln 2$，$2f(e)<f(e^2)$.故正确答案选 B.

【方法点睛】此题主要考查导数在研究函数单调性的应用等方面的知识，属于中高档题.首先根据条件$f'(x)\ln x>\dfrac{f(x)}{x}$，构造函数$F(x)=\dfrac{f(x)}{\ln x}$，对函数$F(x)$求导，则有$F'(x)>0(x\in(0,+\infty))$，可知$F(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递增函数，又$2<e<e^2$，即$F(2)<F(e)<F(e^2)$，化简整理即得正确答案.

（六）构造成商的形式

例 6.已知$f(x)$**在**$(0,+\infty)$**上非负可导，且满足**$xf'(x)-f(x)\le 0$**，对于任意正数**m,n**，若**$m<n$**，则必有（　）**

A. $nf(m)\le mf(n)$　　**B.** $mf(m)\le f(n)$

C. $nf(n)\le f(m)$　　**D.** $mf(n)\le nf(m)$

【答案】D

【解析】构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则由 $F'(x)=\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}\le 0$ 可知函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 是单调递减函数，因为 $m\le n$，所以 $F(m)\ge F(n)$，即 $\frac{f(m)}{m}\ge\frac{f(n)}{n}$，也即 $nf(m)\ge mf(n)$，因此应选 D.

考点：导数的运算和灵活运用.

【易错点睛】本题是一道抽象型的函数性质判断题.考查的是运用所学知识去分析问题和解决问题的能力.解答本题的难点是不清楚函数的解析式也无法弄清楚，所以具有较大的难度.求解时通过深刻的观察和抽象概括，先构造一个新的函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，然后再带该函数进行求导，借助题设中的条件 $xf'(x)-f(x)\le 0$，判断出函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 是单调递减函数.从而运用单调函数的定义使得本题巧妙获解.

练习 1.已知函数 $y=f(x)$ 是 R 上的可导函数，当 $x\neq 0$ 时，有 $f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0$，则函数 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$ 的零点个数是（ ）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】B

【解析】令 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}=0, xf(x)=-\frac{1}{x}$. $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=\frac{xf'(x)+f'(x)}{x}=\frac{[xf(x)]'}{x}>0$，即当 $x>0$ 时，$[xf(x)]'>0$，为增函数，当 $x<0$ 时，$[xf(x)]'<0$，为减函数，函数 $y=-\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty),(-\infty,0)$ 上为增函数，故在区间 $(-\infty,0)$ 上有一个交点.即 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$ 的零点个数是1.

考点：1.函数与导数；2.零点.

【思路点睛】零点问题一种解法是变为两个函数图象的交点，如本题中的 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$ 的零点，可以转化为 $xf(x)=-\frac{1}{x}$，也就是左右两个函数图象的交点个数，函数 $y=-\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty),(-\infty,0)$ 上为增

函数，通过已知条件分析 $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=\frac{xf'(x)+f'(x)}{x}=\frac{[xf(x)]'}{x}>0$,即当 $x>0$ 时，$[xf(x)]'>0$ ，为增函数，当 $x<0$ 时，$[xf(x)]'<0$ ，为减函数，由此判断这两个函数在区间 $(-\infty,0)$ 上有一个交点.

练习 2.. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-f(x)>0$ ，当 $0<m<n<1$ 时，下面选项中最大的一项是（　　）

A. $\frac{f(m^n)}{m^n}$　**B.** $\log_m n\cdot f(\log_n m)$　**C.** $\frac{f(n^m)}{n^m}$　**D.** $\log_n m\cdot f(\log_m n)$

【答案】B

【解析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ ，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$ ，又 $m^n<1, n^m<1, \log_n m>1, \log_m n<1$ ，所以最大的一项是 $g(\log_n m)=\frac{f(\log_n m)}{\log_n m}=\log_m n\cdot f(\log_n m)$ ，选 B.

考点：利用导数研究函数单调性

【方法点睛】利用导数解抽象函数不等式，实质是利用导数研究对应函数单调性，而对应函数需要构造. 构造辅助函数常根据导数法则进行：如 $f'(x)<f(x)$ 构造 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ，$f'(x)+f(x)<0$ 构造 $g(x)=e^x f(x)$ ，$xf'(x)<f(x)$ 构造 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ ，$xf'(x)+f(x)<0$ 构造 $g(x)=xf(x)$ 等

练习 3.已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的减函数，而满足 $\frac{f(x)}{f'(x)}+x<1$ ，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，则（　　）

A．对任意的 $x\in R, f(x)<0$　**B．对任意的 $x\in R, f(x)>0$**

C．当且仅当 $x\in(-\infty,1), f(x)<0$　**D．当且仅当 $x\in(1+\infty), f(x)>0$**

【答案】B

【解析】由题意 $f'(x)<0$ 恒成立，由 $\frac{f(x)}{f'(x)}+x<1$ 得 $f(x)+xf'(x)>f'(x)$. 令 $x=1$ 得 $f(1)>0$ ，又 $f(x)$ 为减函数，所以当 $x<1$ 时，$f(x)>f(1)>0$ ，而当 $x>1$ 时，由 $\frac{f(x)}{f'(x)}+x<1$ 得 $\frac{f(x)}{f'(x)}<0$ ，从而 $f(x)>0$ ，

综上有当$x \in R$时，$f(x)>0$．故选 B．

考点：导数与单调性．

【名师点睛】本题考查导数的应用，在解题时，关键是导导数与单调性的关系得出$f'(x)<0$恒成立，然后对已知不等式$\frac{f(x)}{f'(x)}+x<1$进行分析，首先可得$f(1)>0$，从而有得到部分$f(x)$的正负，即$x<1$时，$f(x)>f(1)>0$，实际上这个结果就排除了 A，C 的正确性，也说明 D 是错误的，只有 B 是正确的．这是利用了选择题的特征．

练习 4.若定义在 R 上的函数 f（x）满足 f（0）=﹣1，其导函数 f′（x）满足 f′（x）＞k＞1，则下列结论中一定错误的是（　）

A. $f(\frac{1}{k})>\frac{1}{k}$　　**B.** $f(\frac{1}{k})>\frac{1}{k-1}$

C. $f(\frac{1}{k-1})<\frac{1}{k-1}$　　**D.** $f(\frac{1}{k-1})>\frac{k}{k-1}$

【答案】C

【解析】根据导数的概念得出$\frac{f(x)-f(0)}{x}$＞k＞1，用 x=$\frac{1}{k-1}$代入可判断出 f（$\frac{1}{k-1}$）＞$\frac{1}{k-1}$，即可判断答案．

解；∵f′（x）=$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

f′（x）＞k＞1，

∴$\frac{f(x)-f(0)}{x}$＞k＞1，

即$\frac{f(x)+1}{x}$＞k＞1，

当 x=$\frac{1}{k-1}$时，f（$\frac{1}{k-1}$）+1＞$\frac{1}{k-1}$×k=$\frac{k}{k-1}$，

即 f（$\frac{1}{k-1}$）＞$\frac{k}{k-1}$﹣1=$\frac{1}{k-1}$

故 f（$\frac{1}{k-1}$）＞$\frac{1}{k-1}$，

所以 f（$\frac{1}{k-1}$）＜$\frac{1}{k-1}$，一定出错，

故选：C.

练习 5.已知奇函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)$ 为其导函数,且满足以下条件①$x>0$ 时，$f'(x)<\frac{3f(x)}{x}$；②$f(1)=\frac{1}{2}$；③$f(2x)=2f(x)$,则不等式 $\frac{f(x)}{4x}<2x^2$ 的解集为_____.

【答案】$\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

【解析】$x>0$ 时，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}\Rightarrow g'(x)=\frac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}<0$，又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $g(x)$ 为偶函数，因为 $f(2x)=2f(x)$，所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}f(1)=\frac{1}{8}$，$g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{f(\frac{1}{4})}{(\frac{1}{4})^3}=8$，从而

$\frac{f(x)}{4x}<2x^2\Rightarrow g(x)<8\Rightarrow g(|x|)<g(\frac{1}{4})\Rightarrow|x|>\frac{1}{4}\Rightarrow$ 解集为 $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

考点：利用导数解不等式

【方法点睛】利用导数解抽象函数不等式，实质是利用导数研究对应函数单调性，而对应函数需要构造.构造辅助函数常根据导数法则进行：如 $f'(x)<f(x)$ 构造 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$f'(x)+f(x)<0$ 构造 $g(x)=e^xf(x)$，$xf'(x)<f(x)$ 构造 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$xf'(x)+f(x)<0$ 构造 $g(x)=xf(x)$ 等

（七）对称问题

例 7．设函数 $y=f''(x)$ 是 $y=f'(x)$ 的导数．某同学经过探究发现，任意一个三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 都有对称中心 $(x_0,f(x_0))$，其中 x_0 满足 $f''(x_0)=0$．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，则 $f(\frac{1}{2017})+f(\frac{2}{2017})+f(\frac{3}{2017})+\ldots+f(\frac{2016}{2017})=$（ ）

A．2013　　B．2014　　C．2015　　D．2016

【答案】D

【解析】$f'(x)=x^2-x+3,f''(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2},f(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2+3\times\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=1$，所以函数 $f(x)$ 的对称中心为 $M(\frac{1}{2},1)$，设 P,Q 是函数 $f(x)$ 的图象上关于 M 中心对称的两点，则 $f(x)+f(1-x)=2$，

$\therefore f(\frac{1}{2017})+f(\frac{2}{2017})+f(\frac{3}{2017})+\ldots+f(\frac{2016}{2017})$

$=\frac{1}{2}[(f(\frac{3}{2017})+f(\frac{2014}{2017}))+(f(\frac{2}{2017})+f(\frac{2015}{2017}))+\ldots+(f(\frac{2016}{2017})+f(\frac{1}{2017}))]$

$=\frac{1}{2}\times(2\times2016)=2016$，故选 D.

考点：1、转化与划归思想及导数的运算；2、函数对称的性质及求和问题.

【方法点睛】

本题通过“三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$都有对称中心$(x_0,f(x_0))$”这一探索性结论考查转化与划归思想及导数的运算、函数对称的性质及求和问题，属于难题．遇到探索性结论问题，应耐心读题，分析新结论的特点，弄清新结论的性质，按新结论的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决．本题的解答就是根据新结论性质求出$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+3x-\frac{5}{12}$的对称中心后再利用对称性和的.

练习 1.对于三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，给出定义：设$f'(x)$是函数$y=f(x)$的导数，$f''(x)$是$f'(x)$的导数，若方程$f''(x)=0$有实数解x_0，则称点$(x_0,f(x_0))$为函数$y=f(x)$的“拐点”.某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心.若$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，请你根据这一发现，则函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$的对称中心为（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　**B.** $\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　**C.** $\left(\frac{1}{2},-1\right)$　　**D.** $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

【答案】A

【解析】依题意，得$f'(x)=x^2-x+3\therefore f''(x)=2x-1$

由 f''（x）=0，即 2x-1=0．∴x=$\frac{1}{2}$，又 f（$\frac{1}{2}$）=1，

∴函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$对称中心为$\left(\frac{1}{2},1\right)$