专题 17　数列求和的方法规律

一.【学习目标】

1．熟练掌握等差、等比数列前 n 项和公式.

2．熟练掌握非等差、等比数列求和的几种方法，如错位相减、裂项相消以及分组求和等.

二.【知识要点】

求数列前 n 项和的基本方法

(1)公式法

数列$\{a_n\}$为等差或等比数列时直接运用其前 n 项和公式求和.

若$\{a_n\}$为等差数列，则 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=$_____.

若$\{a_n\}$为等比数列，其公比为 q，

则当 $q=1$ 时，$S_n=$_____($\{a_n\}$为常数列)；

当 $q\neq1$ 时，$S_n=$_____=_____

(2)裂项相消求和法

数列$\{a_n\}$满足通项能分裂为两项之差，且分裂后相邻的项正负抵消从而求得其和.

(3)倒序相加法

如果一个数列$\{a_n\}$的前 n 项中首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前 n 项的和即可用倒序相加法，如等差数列前 n 项的和公式就是用此法推导的.

(4)错位相减法

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求，如等比数列的前 n 项和公式就是用此法推导的.

(5)分组转化求和法

一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成，则求和时可用分组求和法，分别求和而后相加减.

(6)并项求和法

一个数列的前 n 项和中，可两两结合求解，则称为并项求和．形如 $a_n=(-1)^nf(n)$类型，可采用两项合并求解．例如，$S_n=100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2=(100+99)+(98+97)+\ldots+(2+1)=5\,050$.

三.【方法总结】

1.常用基本求和法均对应数列通项的特殊结构特征，分析数列通项公式的特征，联想相应的求和方法既是根

本，又是关键.

2.数列求和实质就是求数列{S_n}的通项公式，它几乎涵盖了数列中所有的思想策略、方法和技巧，对学生的知识和思维有很高的要求，应充分重视并系统训练.

练习 3. 已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$，则 $\sum_{k=1}^{2016}f\left(\frac{k}{2017}\right)$ 的值为 _____.

【答案】504

【解析】 $\because$函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$，$\therefore f(1-x)=(1-x)^3-\frac{3}{2}(1-x)^2+\frac{3}{4}(1-x)+\frac{1}{8}$

$=\left(1-3x+3x^2-x^3\right)-\frac{3}{2}\left(1-2x+x^2\right)+\frac{3}{4}(1-x)+\frac{1}{8}=-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}$，$\therefore f(1-x)+f(x)=\frac{1}{2}$，

$\therefore\sum_{k=1}^{2016}f\left(\frac{k}{2017}\right)=f\left(\frac{1}{2017}\right)+\ldots+f\left(\frac{2015}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2016}{2}=504$，

故答案为504.

2.裂项求和

例 2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，则 S_5 等于（　　）

A. 1　　*B.* $\frac{1}{6}$　　*C.* $\frac{5}{6}$　　*D.* $\frac{1}{30}$

【答案】*C*

【解析】 $\because a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore S_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

选*C*

练习 1.数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right\}$ 的前10项的和为（　　）

A. $1-\sqrt{11}$　　*B.* $\sqrt{11}-1$　　*C.* $\sqrt{11}$　　*D.*

【答案】*B*

【解析】 $\because\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

故数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right\}$ 的前 10 项的和为 $S_{10}=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{11}-\sqrt{10}=\sqrt{11}-1$

选 B

练习 6.数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且对于任意的 $n\in N^*$ 都有 $a_{n+1}=a_n+a_1+n$，则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2017}}$ 等于（　　）

A. $\frac{2016}{2017}$　　B. $\frac{4032}{2017}$　　C. $\frac{2017}{2018}$　　D. $\frac{4034}{2018}$

【答案】D

【解析】由题意可得：$a_{n+1}-a_n=n+1$，则：

$a_1=1, a_2-a_1=2, a_3-2_2=3, \cdots, a_n-a_{n-1}=n$，

以上各式相加可得：$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，则：$\frac{1}{a_n}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2017}}=2\times\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)\right]=\frac{4034}{2018}$$

练习 7.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_2=6$，且 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$，若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\left[\frac{2017}{a_1}+\frac{2017}{a_2}+\cdots+\frac{2017}{a_{2017}}\right]=$（　　）

A. 2015　　B. 2016　　C. 2017　　D. 201

【答案】B

【解析】构造 $b_n=a_{n+1}-a_n=2$，则 $b_1=a_2-a_1=4$，

由题意可得 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=b_{n+1}-b_n=2$，

故数列 $\{b_n\}$ 是4为首项2为公差的等差数列，

故 $b_n=a_{n+1}-a_n=4+2(n-1)=2n+2$，

故 $a_2-a_1=4, a_3-a_2=6, a_4-a_3=8, \cdots, a_n-a_{n-1}=2n$,

以上 $n-1$ 个式子相加可得 $a_n-a_1=4+6+\cdots+2n=\frac{(n-1)(2n+4)}{2}$，

解得 $a_n=n(n+1)$，

$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore \frac{2017}{a_1}+\frac{2017}{a_2}+\cdots+\frac{2017}{a_{2017}}=2017-\frac{2017}{2018}$

则 $\left[\frac{2017}{a_1}+\frac{2017}{a_2}+\cdots+\frac{2017}{a_{2017}}\right]=\left[2016+\frac{1}{2018}\right]=2016$.

故答案为：B.

练习 8. 已知幂函数 $f(x)=x^a$ 的图象过点 $(4,2)$，令 $a_n=\frac{1}{f(n+1)+f(n)}$（$n\in N^*$），记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2018}=$（　　）

$A.\ \sqrt{2018}+1$　　$B.\ \sqrt{2018}-1$　　$C.\ \sqrt{2019}+1$　　$D.\ \sqrt{2019}-1$

【答案】D

【解析】函数 $f(x)=x^a$ 的图象过点 $(4,2)$，

可得 $4^a=2$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

则 $a_n=\frac{1}{f(n+1)+f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

则 $S_{2018}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2019}-\sqrt{2018}=\sqrt{2019}-1$.

故选：D.

练习 9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 9，且 $a_n=a_{n-1}^2+2a_{-1}\ (n\geq 2)$，若 $b_n=\frac{1}{a_n+2}+\frac{1}{a_{n+1}}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$_____.

【答案】$\frac{1}{9}-\frac{1}{10^{2^n}-1}$

【解析】因为 $a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}(n\geq 2)$，故 $a_n+1=(a_{n-1}+1)^2$，取对数可得 $\lg(a_n+1)=2\lg(a_{n-1}+1)$，故

$\frac{\lg(a_n+1)}{\lg(a_{n-1}+1)}=2$，故 $\{\lg(a_n+1)\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，故 $\lg(a_n+1)=2^{n-1}$，故 $a_n+1=10^{2^{n-1}}$，

则 $a_n=10^{2^{n-1}}-1$，因为 $a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}(n\geq 2)$，故 $a_{n-1}=a_n^2+2a_n$ 两边取倒数可得

$\frac{1}{a_n+2}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，故数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\cdots\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10^{2^n}-1}$$

练习 10.设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项为 S_n，点 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$，$(n\in N^*)$ 均在函数 $y=3x-2$ 的图象上.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

（2）设 $b_n=\frac{3}{a_n\cdot a_{n+1}}$，$T_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】（1）$a_n=6n-5\qquad n\in N^*$ （2）$T_n=\frac{3n}{6n+1}$

【解析】（1）∵点 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$ 在函数 $y=3x-2$ 的图象上，

$\therefore\frac{S_n}{n}=3n-2$，即 $S_n=3n^2-2n$

$\therefore a_1=S_1=1$

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-2n)-\left[3(n-1)^2-2(n-1)\right]=6n-5$

$\therefore a_n=6n-5\qquad n\in N^*$

（2）$b_n=\frac{3}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{3}{(6n-5)(6n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{19}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)=\frac{3n}{6n+1}$$

3.错位相减求和

例 3.已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{2}{3}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$，$n=1,2,3,\ldots$.

（1）证明：数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是等比数列；

（2）数列$\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{n+2}{2^n}$.

【解析】（1）$\because a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}$，

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，又$a_1=\frac{2}{3}$，$\therefore \frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是以为$\frac{1}{2}$首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

（2）由（1）知$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$，即$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}+1$，

$\therefore \frac{n}{a_n}=\frac{n}{2^n}+n$．设$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$，①

则$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，②

由①－②得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，

$\therefore T_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$．又$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

∴ 数列$\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$的前 n 项和 $S_n=2-\frac{2+n}{2^n}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+4}{2}=\frac{n+2}{2^n}$.

练习 1.已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_2=4b_1$，$S_n=2a_n-2$，$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n^2+n$（$n\in N^*$）

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$为等差数列；

（3）若数列$\{c_n\}$的通项公式为 $c_n=\begin{cases}-\frac{a_nb_n}{2}, n\text{为奇数}\\ \frac{a_nb_n}{4}, n\text{为偶数}\end{cases}$，令 T_n 为$\{c_n\}$的前 n 项的和，求 T_{2n}.

【答案】（1）$a_n=2^n$（2）见解析（3）$T_{2n}=\frac{7}{9}+\frac{12n-7}{9}\cdot 4^n$

【解析】（1）当$n>1$时，$\begin{cases}S_n=2a_n-2\\ S_{n-1}2a_{n-1}-2\end{cases}\Rightarrow a_n=2a_n-2a_{n-1}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$

当$n=1$时，$S_1=2a_1-2\Rightarrow a_1=2$，

综上，$\{a_n\}$是公比为 2，首项为 2 的等比数列，$a_n=2^n$

（2）∵ $a_2=4b_1$，∴ $b_1=1$，∵ $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n^2+n$，∴ $\frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1$

综上，$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$是公差为 1，首项为 1 的等差数列，$\frac{b_n}{n}=1+n-1\Rightarrow b_n=n^2$.

（3）令 $p_n=c_{2n-1}+c_{2n}$

$=-\frac{(2n-1)^2\cdot 2^{2n-1}}{2}+\frac{(2n)^2\cdot 2^{2n}}{4}=(4n-1)\cdot 2^{2n-2}=(4n-1)\cdot 4^{n-1}$

$\begin{cases}T_{2n}=3\times4^0+7\times4^1+11\times4^2+\cdots+(4n-1)\times4^n\\ 4T_{2n}=3\times4^1+7\times4^2+11\times4^3+\cdots+(4n-5)\times4^n+(4n-1)\times4^{n+1}\end{cases}$ ①
②

①－②，得 $-3T_{2n}=3?4^0+4?4^1+4?4^2+\cdots+4?4^{n-1}-(4n-1)?4^n$

$$-3T_{2n}=3+\frac{16-4?4^n}{1-4}-(4n-1)?4^n$$

$$T_{2n}=\frac{7}{9}+\frac{12n-7}{9}\cdot 4^n$$

练习 2.已知数列$\{a_n\}$是首项为正数的等差数列，数列$\left\{\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$的前 n 项和为$\frac{n}{2n+1}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=(a_n+1)\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

【答案】（1）$2n-1$；（2）$\frac{4+(3n-1)\cdot 4^{n+1}}{9}$.

【解析】（1）设数列$\{a_n\}$的公差为 d，

令 $n=1$，得 $\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{3}$，所以 $a_1a_2=3$.

令 $n=2$，得 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{5}$，所以 $a_2a_3=15$.

解得 $a_1=1,d=2$，所以 $a_n=2n-1$.

（2）由（1）知 $b_n=2n\cdot 2^{2n-4}=n\cdot 4^n$，所以 $T_n=1\cdot 4^1+2\cdot 4^2+.....+n\cdot 4^n$，

所以 $4T_n=1\cdot 4^2+2\cdot 4^3+.....+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$，

两式相减，得 $-3T_n=4^1+4^2+.....+4^n-n\cdot 4^{n+1}$

$$=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}=\frac{1-3n}{3}\times 4^{n+1}-\frac{4}{3},$$

所以 $T_n=\frac{3n-1}{9}\times 4^{n+1}+\frac{4}{9}=\frac{4+(3n-1)\cdot 4^{n+1}}{9}$.

练习 3. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=5,a_4+a_6=22$，数列$\{b_n\}$中，$b_1=3,b_n=2b_{n-1}+1(n\geq 2)$.

（1）分别求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；

（2）定义 $x=[x]+(x)$，$[x]$ 是 x 的整数部分，(x) 是 x 的小数部分，且 $0\le(x)<1$.记数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\left(\frac{a_n}{b_n+1}\right)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】(1) $a_n=2n+1,\ b_n=2^{n+1}-1$;(2) $S_n=\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$.

【解析】试题分析：（1）因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，故可以把已知条件转化为基本量 a_1,d 的方程组，求出其值即得通项公式，而 $\{b_n\}$ 满足递推关系 $b_n=2b_{n-1}+1$，它可以变形为 $b_n+1=2(b_{n-1}+1)$ 也就是 $\{b_n+1\}$ 是等比数列，从而求得 $\{b_n\}$ 的通项.（2）根据题设给出的定义得到 $\left(\frac{2n+1}{2^{n+1}}\right)=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$，所以 $c_n=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$，它是等差数列和等比数列的乘积，利用错位相减法可以求出其前 n 项和.

5.分奇偶数讨论求和

例 5.已知函数 $f(n)=\begin{cases}n^2,n\text{为奇数}\\-n^2,n\text{为偶数}\end{cases}$，且 $a_n=f(n)+f(n+1)$，则 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_8=$（　　）

A. -2017　　*B.* -2018　　*C.* 2017　　*D.* 2018

【答案】*D*

【解析】当 n 为奇数时，$n+1$ 为偶数，则 $a_n=n^2-(n+1)^2=-2n-1$，所以

$a_1+a_3+a_5+a_7=-(3+7+11+15)=-36$，

当 n 为偶数时，$n+1$ 为奇数，则 $a_n=-n^2+(n+1)^2=2n+1$

$a_2+a_4+a_6+a_8=5+9+13+17=44$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_8=8$.

练习 5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=0$，$a_{n+1}=\left(\sqrt{a_n+1}+1\right)^2-1$ $\left(n\in N^*\right)$.

（1）求 a_n；

（2）若 $b_n=(-1)^n\frac{2n+1}{a_n+n+1}\left(n\in N^*\right)$，记 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.求 S_{2n}.

【答案】（1）$a_n=n^2-1$（2）$S_{2n}=\dfrac{-2n}{2n+1}$

【解析】试题分析：（1）由递推关系可知$\left\{\sqrt{a_n+1}\right\}$是公差为1的等差数列，从而求得通项公式；（2）$b_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$，相邻项相消即可得到$S_{2n}$.

试题解析：

（1）$a_{n+1}=\left(\sqrt{a_n+1}+1\right)^2-1\Rightarrow a_{n+1}+1=\left(\sqrt{a_n+1}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{a_{n+1}+1}=\sqrt{a_n+1}+1$

$\therefore\ \left\{\sqrt{a_n+1}\right\}$是公差为1的等差数列

$\therefore\sqrt{a_n+1}=\sqrt{a_1+1}+(n-1)\times1=n$

$\therefore a_n=n^2-1$.

（2）由（1）知 $b_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\therefore S_{2n}=-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\cdots+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$，

$=-\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{-2n}{2n+1}$.

6.利用数列周期性求和

例 1.数列$\{a_n\}$的通项$a_n=n\left(\cos^2\dfrac{n\pi}{4}-\sin^2\dfrac{n\pi}{4}\right)$，其前$n$项和为$S_n$，则$S_{40}$为

A. 10　　*B.* 15　　*C.* 20　　*D.* 25

【答案】C

【解析】由题意得，$a_n=n\left(\cos^2\dfrac{n\pi}{4}-\sin^2\dfrac{n\pi}{4}\right)$，

则$a_1=0,a_2=-2,a_3=0,a_4=4,a_5=0,a_6=-2,a_7=0,\cdots$，

所以数列$\{a_n\}$构成周期为四项的周期性且$a_1+a_2+a_3+a_4=2$

所以$S_{40}=10\times2=20$，故选C

7.含有绝对值的数列求和

例 1.已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=8,a_4=2$，且满足$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$

（1）求$\{a_n\}$的通项公式

（2）设$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots\cdots+|a_n|$，求$S_n$.

【答案】(1) $\sin A\cdot\sin C$ 最大为$\frac{3}{4}$. (2) $S_n=\begin{cases}-n^2+9n,n\le 5\\ n^2+9n+40,n>5\end{cases}$

【解析】（1）∵$a_{n+2}+a_n=2a_n$，

∴数列$\{a_n\}$是等差数列

由$a_1=8,a_4=2$知$d=-2$

∴$a_n=8-2(n-1)=-2n+10$

（2）由（1）可得数列$\{a_n\}$的前n项和为$T_n=\frac{n(8-2n+10)}{2}=-n^2+9n$。

当$n\le 5$时，$a_n\ge 0$

$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=$

$=-n^2+9n$。

当$n>5$时，$a_n<0$

$S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(a_6+a_7+\cdots+a_n)$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=2T_5-T_n$

$=n^2+9n+40$。

综上$S_n=\begin{cases}-n^2+9n,n\le 5\\ n^2+9n+40,n>5\end{cases}$。