# 高一年级数学期中考试试题

# 答案和解析

1.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题以命题的真假判断与应用为载体考查了不等式的基本性质，熟练掌握不等式的基本性质是解答的关键，题目比较基础.

由已知中 $a<b<0$，结合不等式的基本性质，利用作差法逐一分析四个答案的真假，可得结论.

【解答】

解：$\because a<b<0$，$\therefore ab<a^2$，故 $A$ 错误；

$a^2>b^2$故 $B$ 错误；

$ab>0$，故$\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$，即$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 $C$ 错误；

因为$-\frac{1}{a}-\left(-\frac{1}{b}\right)=\frac{a-b}{ab}<0$，所以$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$，故 $D$ 正确.

故选 $D$.

2.【答案】$A$

【解析】【分析】

此题考查了等比数列的性质，利用了整体代入的思想，熟练掌握等比数列的性质是解本题的关键.

由数列$\{a_n\}$为等比数列，利用等比数列的性质得到$a_8a_9=q^8\cdot a_4a_5$，将已知$a_4a_5=1$，$a_8a_9=16$代入求出$q^8$的值，开方求出$q^4$的值，然后把所求的式子再利用等比数列的性质化简后，将$q^4$的值与$a_4a_5=1$代入，即可求出值.

【解答】

解：$\because$数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_4a_5=1$，$a_8a_9=16$，

$\therefore a_8a_9=q^8\cdot a_4a_5$，即$q^8=16$，

$\therefore q^4=4$，

则$a_6a_7=q^4\cdot a_4a_5=4$.

故选 $A$.

3.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查向量的运算以及平面向量基本定理，属于基础题.

根据向量的三角形法则和向量的数乘运算用向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$表示出向量$\overrightarrow{OC}$，从而求出$\lambda=\frac{1}{3}$，

$\mu=\frac{2}{3}$，再代值计算即可.

【解答】

解：$\because \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，

$\therefore \lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

故选 $D$.

4.【答案】$B$

【解析】解：当数列$\{a_n\}$的公比 $q=1$ 时，$S_4=4a_1$，$3S_2=6a_1$，$S_4=3S_2$，

$\therefore q\neq 1$.

$\therefore \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3\times\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$，得$q^2=2$.

$\because a_2+a_6=a_2(1+q^4)=15$，

$\therefore a_2=3$，

$\therefore a_4=a_2q^2=6$.

故选：$B$.

分两种情况解答：$q=1$ 和 $q\neq 1$.利用等比数列的通项公式和求和公式解答.

本题考查了等比数列的通项公式，考查了等比数列的前 $n$ 项和，是基础的计算题.

5.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题考查函数的单调性和奇偶性，以及解不等式，属中档题.

根据函数 $f(x)$为奇函数，且在$(0,+\infty)$内是增函数，又 $f(2)=0$，判断函数 $f(x)$在 $R$ 上的符号，根据奇函数把$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 转化为$\frac{f(x)}{x}<0$，根据积商符号法则及函数的单调性即可求得$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集.

【解答】

解：因为函数 $f(x)$为奇函数，且在$(0,+\infty)$内是增函数，$f(2)=0$，

所以 $x>2$ 或$-2<x<0$ 时，$f(x)>0$；$x<-2$ 或 $0<x<2$ 时，$f(x)<0$；

$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$，即$\frac{f(x)}{x}<0$，

可知$-2<x<0$ 或 $0<x<2$.

故选：$A$.

6.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查与余弦函数有关的命题的真假判断，根据三角函数的图象和性质是解决本题的关键，题目比较基础.

根据余弦函数的图象和性质分别进行判断即可.

【解答】

解：对于 $A$，函数的周期为 $2k\pi$，$k\in Z$，当 $k=-1$ 时，周期 $T=-2\pi$，故 $A$ 正确；

对于 $B$，当 $x=\frac{8\pi}{3}$时，$\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=cos\pi=-1$ 为最小值，此时 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$对称，故 $B$ 正确；

对于 $C$，因为 $f(x+\pi)=\cos(x+\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos(x+\frac{\pi}{3})$，且 $-\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{2}=0$，则 $f(x+\pi)$的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$，故 $C$ 正确；

对于 $D$，当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时，$\frac{5\pi}{6}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，此时函数 $f(x)$有增有减，不是单调函数，故 $D$ 错误．

故选 $D$．

7.【答案】$B$

【解析】解：由 $x>1$，得 $x-1>0$，

$\because 4x+1+\frac{1}{x-1}=4(x-1)+\frac{1}{x-1}+5\geq 2\sqrt{4}+5=9$，

当且仅当 $4(x-1)=\frac{1}{x-1}$，

即 $x=\frac{3}{2}$时，等号成立．

故选：$B$．

由 $4x+1+\frac{1}{x-1}=4(x-1)+\frac{1}{x-1}+5$，利用基本不等式即可求解．

本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是求值条件的配凑．

8.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查等差数列的性质和三角形的面积公式，涉及余弦定理的应用，属于中档题．

由题意可得 $2b=a+c$，平方后整理得$a^2+c^2=4b^2-2ac$，利用三角形面积可求得 $ac$ 的值，代入余弦定理可求得 $b$ 的值．

【解答】

解：$\because a$，$b$，$c$ 成等差数列，$\therefore 2b=a+c$，

平方得$a^2+c^2=4b^2-2ac$，①

又$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{3}{2}$，且$\angle B=30°$，

由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}acsinB=\frac{1}{2}ac\cdot sin30°$

$=\frac{1}{4}ac=\frac{3}{2}$，解得 $ac=6$，

代入①式可得$a^2+c^2=4b^2-12$，

由余弦定理得 $cosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$=\frac{4b^2-12-b^2}{2\times 6}=\frac{3b^2-12}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$b^2=4+2\sqrt{3}$，

$\therefore b=1+\sqrt{3}$．

故选 $B$．

9.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查正余弦定理在解三角形中的应用，属于中档题.

由已知$b^2+c^2=a^2+bc$，利用余弦定理可得$cosA=\frac{1}{2}$，可得$A=\frac{\pi}{3}$，由$\sin B\cdot sinC=\sin^2 A$，利用正弦定理可得$bc=a^2$，代入$b^2+c^2=a^2+bc$，可得$b=c$.由此可以确定三角形形状.

【解答】

解：因为$b^2+c^2=a^2+bc$，所以$bc=b^2+c^2-a^2$，

利用余弦定理可得$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为$A\in(0,\pi)$，

故$A=\frac{\pi}{3}$，

因为$\sin B\cdot\sin C=\sin^2 A$，利用正弦定理可得$bc=a^2$，

代入$b^2+c^2=a^2+bc$可得$(b-c)^2=0$，故$b=c$，

所以$\triangle ABC$为等边三角形.

故选$C$.

10.【答案】$A$

【解析】解由图象易知，$A=2$，$T=\frac{4}{3}(\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$，

$\therefore\omega=2$，又$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，

$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=2sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

$\because f(a+x)+f(a-x)=0$，

$\therefore f(x)$关于点$(a,0)$对称，

即有$2a+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，

$\therefore a=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in Z$，

$\therefore|a|$的最小值为$\frac{\pi}{12}$，

故选：$A$.

由图象可求得$A$、$\omega$、$\varphi$，从而可得函数解析式，由$f(a+x)+f(a-x)=0$可知$f(x)$关于点$(a,0)$对称，利用正弦函数的中心对称性即可得到答案.

本题考查由$y=Asin(\omega x+\varphi)$的部分图象确定其解析式，得到函数解析式$f(x)=2sin(2x+\frac{\pi}{6})$是关键，考查识图与运算能力，属于中档题.

学而思武汉分校

11.【答案】$D$

【解析】解：函数 $f(x)=Acos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的部分图象如图所示，其中 $M(\frac{\pi}{3},2)$，

$N(\frac{4\pi}{3},0)$为图象上两点，

所以：$T=4(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=4\pi$，

故$\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，

由于$(\frac{\pi}{3},2)$满足函数的图象，

所以$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以函数的关系式为 $f(x)=2sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$.

函数 $f(x)$图象的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{8}$，再向右平移$\frac{3\pi}{8}$个单位长度后得到函数 $g(x)=$

$2sin(4x-\frac{7\pi}{6})=2sin(4x-\frac{\pi}{6})$的图象.

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 4x-\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

整理得函数的单调增区间为$[-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}](k\in Z)$，

故选：$D$.

首先根据函数的图象求出函数的解析式，进一步求出函数的单调区间.

本题考查的知识要点：三角函数关系式的变换，正弦型函数性质的应用，主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力，属于基础题型.

12.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查了函数零点的问题，以及分段函数的问题，属于中档题.

令 $f(x)=1$ 得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$，$x_3=5$，再画出 $f(x)$的图象，结合图象可得答案.

【解答】

解：令 $f(x)=1$，

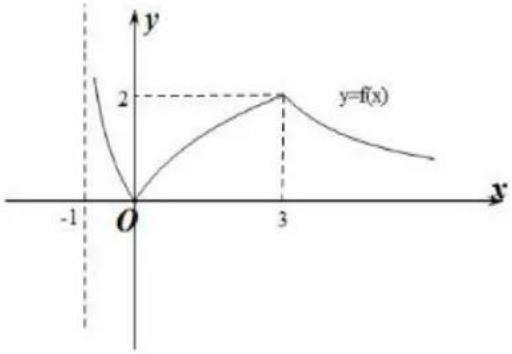
当 $x\in(-1,3)$时，$|\log_2(x+1)|=1$，解得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$，

当 $x\in[3,+\infty)$时，$\frac{4}{x-1}=1$，解得$x_3=5$，

综上 $f(x)=1$ 解得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$，$x_3=5$，

令 $g(x)=f[f(x)]-1=0$，

作出 $f(x)$图象如图所示：




由图象可得当 $f(x)=-\frac{1}{2}$无解，

$f(x)=1$ 有 3 个解，

$f(x)=5$ 有 1 个解，

综上所述函数 $g(x)=f[f(x)]-1$ 的零点个数为 4，

故选 $C$.

13.【答案】1

【解析】解：向量$\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，$\vec{b}=(-\sqrt{3},m)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\cos<\vec{a},\ \vec{b}>=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，

即$\frac{\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+1\times m}{\sqrt{3+1}\times\sqrt{3+m^2}}=-\frac{1}{2}$，

解得 $m=1$，

故答案为：1.

利用平面向量的数量积求出$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值，列方程求出实数 $m$ 的值.

本题考查了利用平面向量的数量积求夹角余弦值的应用问题，是基础题.

14.【答案】3

【解析】【分析】

本题考查对数函数恒过定点问题，以及幂函数的解析式、函数值的求法，属于简单题.

令 $2x-3=1$ 求出 $x$，代入解析式求出 $y$，即求出定点 $P$ 的坐标，再代入幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 求出$\alpha$的值，即可求出 $f(9)$.

【解答】

解：由题意得，$2x-3=1$，解得 $x=2$，此时 $y=\log_a(2x-3)+\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

则定点 $P$ 的坐标是$(2,\sqrt{2})$，

又 $P$ 在幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$的图象上，则$2^{\alpha}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，得$\alpha=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，则 $f(9)=9^{\frac{1}{2}}=3$，

故答案为：3.

15.【答案】$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】【分析】

本题考查三角函数的化简和求值，考查二倍角公式、和差公式以及两角差的余弦公式的

运用，考查运算能力，属于中档题．由两角和的正切公式求出 $tan\alpha=-\frac{1}{3}$，再由定义，即可得到 $sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，再运用二倍角公式和两角差的余弦公式，即可化简得到所求的值．

【解答】

解：$\because \tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1+tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，

$\therefore tan\alpha=-\frac{1}{3}$，

又$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，

可令$\alpha$终边上一点为 $P(3,-1)$，$OP=\sqrt{10}$，

则 $sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，

故 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}=2\sqrt{2}sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

故答案为：$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

16.【答案】$\frac{1}{2}n(n+1)$

【解析】解：由题意，可知$a_n>0$，$b_n>0$，

$\because b_nb_{n+1}=a_{n+1}^2$，$\therefore a_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}}$，

则$a_n=\sqrt{b_{n-1}b_n}(n\geq2)$．

$\because a_n+a_{n+1}=2b_n$，

$\therefore n\geq2$ 时，$\sqrt{b_{n-1}b_n}+\sqrt{b_nb_{n+1}}=2b_n$，

即$\sqrt{b_n}(\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{b_{n+1}})=2\sqrt{b_n}\cdot\sqrt{b_n}$，

$\therefore \sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{b_{n+1}}=2\sqrt{b_n}$，

即$\sqrt{b_{n+1}}-\sqrt{b_n}=\sqrt{b_n}-\sqrt{b_{n-1}}(n\geq2)$．

∴数列$\{\sqrt{b_n}\}$是等差数列．

又$\because a_1+a_2=2b_1=4$，$\therefore b_1=2$，$b_2=\frac{a_2^2}{b_1}=\frac{9}{2}$，

∴等差数列列$\{\sqrt{b_n}\}$的首项为$\sqrt{b_1}=\sqrt{2}$，公差 $d=\sqrt{b_2}-\sqrt{b_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \sqrt{b_n}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(n-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$．

$\therefore b_n=\frac{1}{2}(n+1)^2$，$n\in N*$．

$\therefore a_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$，

$\therefore a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$，其中$a_1=1$ 适合此式，

$\therefore a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

故答案为：$\frac{1}{2}n(n+1)$.

本题先根据递推式可得$a_n = \sqrt{b_{n-1}b_n}(n \geq 2)$.代入$a_n + a_{n+1} = 2b_n$，进行计算，再根据等差中项判别法可得数列$\{\sqrt{b_n}\}$是等差数列．进一步计算可得数列$\{\sqrt{b_n}\}$的通项公式，从而可得正项数列$\{b_n\}$的通项公式，再代入$a_n = \sqrt{b_{n-1}b_n}(n \geq 2)$，然后验证 $n = 1$ 是否满足，即可得到数列$\{a_n\}$的通项公式．

本题主要考查数列求通项公式．考查了转化和化归思想，等差中项判别法，以及逻辑思维能力和数学运算能力．本题属中档题．

17.【答案】解：(1)由函数 $f(x) = (sinx + cosx)^2 + cos2x - 1$．

化简可得：$f(x) = 2sinxcosx + cos2x$

$= sin2x + cos2x$

$= \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$，

∴函数 $f(x)$的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$，

(2)由(1)可知，$f(x) = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$，

$\because x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$，

$\therefore 2x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$，

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$时，$x = \frac{\pi}{8}$，

∴ $f(x)$在$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8})$上单调递增，在$(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$上单调递减，

$f(-\frac{\pi}{4}) = -1$，$f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}$，$f(\frac{\pi}{4}) = 1$，

故得函数 $f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值分别为$\sqrt{2}$，$-1$．

【解析】本题考查三角函数的化简能力和三角函数的图象和性质的运用，属于中档题．

(1)利用二倍角以及辅助角公式将函数化为 $y = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$，再利用周期公式求函数的最小正周期；

(2)根据 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$求出 $2x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$，再结合三角函数的图象和性质，求出 $f(x)$的最大值和最小值．

18.【答案】解：(Ⅰ)在△ $ABC$ 中，

$\because \frac{2a-c}{b} = \frac{cosC}{cosB}$，

$\therefore 2acosB = ccosB + bcosC$，

利用正弦定理可得，

$2\sin A\cos B = \sin C\cos B + \sin B\cos C =$

$\sin(B + C) = \sin A$，

$\because sinA \neq 0$，

$\therefore cosB = \frac{1}{2}$,

$\because 0 < B < \pi$,

$\therefore B = \frac{\pi}{3}$;

(Ⅱ)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，

$AC^2 = a^2 + c^2 - 2accosB = a^2 + c^2 - ac$，

在$\triangle ABM$中，由余弦定理得，

$$AM^2 = \frac{1}{4}a^2 + c^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot c\cdot \cos B$$

$= \frac{1}{4}a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac.$

$\because AM = AC$,

$\therefore \frac{1}{4}a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac = a^2 + c^2 - ac$,

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$,

∴由正弦定理得$\frac{sinC}{sinA} = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

【解析】本题主要考查了正弦定理，三角形内角和定理，两角和的正弦函数公式，余弦定理在解三角形中的综合应用，考查了转化思想，属于中档题.

(Ⅰ)由已知化简，利用正弦定理，三角形内角和定理，两角和的正弦函数公式可得：$2sinAcosB = sinA$，由于$sinA \neq 0$，可求cos$B$，结合$B$的范围即可得解$B$的值.

(Ⅱ)由$AM = AC$，利用余弦定理得，$\frac{1}{4}a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac = a^2 + c^2 - ac \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$，结合正弦定理即可得$\frac{sinC}{sinA}$的值.

19.【答案】解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，等比数列$\{b_n\}$的公比为$q$，

$\because a_2 = 2$，$a_5 + a_9 = 14$，

$\therefore a_1 + d = 2$，$2a_1 + 12d = 14$，解得$a_1 = d = 1$.

$\therefore a_n = 1 + (n-1) = n$.

$\therefore b_1 = a_2 = 2$，$b_4 = a_{15} + 1 = 16 = 2 \times q^3$，

$\therefore q = 2$.

$\therefore b_n = 2^n$.

$(2)c_n = a_n \cdot b_n = n \cdot 2^n$.

∴数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n = 2 + 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + \ldots + n\cdot 2^n$ ①，

$2T_n = 2^2 + 2\times 2^3 + \ldots + (n-1)\cdot 2^n + n\cdot 2^{n+1}$②，

$$\therefore ① - ② \Rightarrow -T_n = 2 + 2^2 + \ldots + 2^n - n\cdot 2^{n+1}$$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2}\frac{2(2^n-1)}{2-1} - n\cdot 2^{n+1}$$

$= (1-n)\cdot 2^{n+1} - 2$.

$\therefore T_n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$.

【解析】本题考查了“错位相减法”、等差数列与等比数列的通项公式及其求和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

(1)利用等差数列与等比数列的通项公式即可得出.

(2)利用“错位相减法”与等比数列的求和公式即可得出.

20.【答案】解：(1) $\because (b^2+c^2-2R^2)tanA=4S$，

$\therefore (b^2+c^2-2R^2)\frac{sinA}{cosA}=4\times\frac{1}{2}bcsinA$，

即$b^2+c^2-2R^2=2bccosA$，$\therefore b^2+c^2-2bccosA=2R^2$，

由余弦定理得$a^2=2R^2$，

由正弦定理得$(2RsinA)^2=2R^2$，得 $sinA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because A$ 为锐角，$\therefore A=\frac{\pi}{4}$；

(2) $\because A=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理得$b^2+c^2-2bc\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，$\therefore b^2+c^2=\sqrt{2}bc+1$，

$\because b^2+c^2\geq 2bc$，取等号的条件是 $b=c$，

$\therefore bc\leq\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{\sqrt{2}}{4}bc\leq\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$，

$\therefore S$ 的最大值为$\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$.

【解析】(1)由已知条件可得$b^2+c^2-2bccosA=2R^2$，再由余弦定理得$a^2=2R^2$，再利用正弦定理求出 $sinA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而求出 $A$；

(2)因为 $A=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理得$b^2+c^2=\sqrt{2}bc+1$，再利用基本不等式得到 $bc\leq\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，

从而求得 $S=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{\sqrt{2}}{4}bc\leq\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$，得到 $S$ 的最大值.

本题主要考查了正弦定理和余弦定理，是中档题.

21.【答案】解：(1) $\because$点$(n,S_n)$在函数 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ 的图象上，

$\therefore S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，①

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)$，②

①$-$②，得$a_n=n(n\geq 2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，符合上式，

$\therefore a_n=n$；

(2)由(1)知$a_n=n$，则$\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，

$$\therefore T_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots$$
$$+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$$
$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$，

$\because T_{n+1}-T_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}>0$，

$\therefore$数列$\{T_n\}$单调递增，

$\therefore (T_n)_{min}=T_1=\frac{1}{3}$，

要使不等式$T_n>\frac{1}{3}\log_a(1-a)$对任意正整数$n$恒成立，

只要$\frac{1}{3}>\frac{1}{3}\log_a(1-a)$，即$\log_a(1-a)<1$，

$\because 1-a>0$，$\therefore 0<a<1$，

$\therefore 1-a>a$，即$0<a<\frac{1}{2}$.

$\therefore a$的取值范围为$(0,\frac{1}{2})$.

【解析】本题考查数列的通项与求和，着重考查等差关系的确定及数列$\{T_n\}$的单调性的分析，突出裂项法求和，突出转化思想与综合运算能力的考查，属于较难题.

(1)根据题意可得$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，可得$S_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)$，从而即可求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)由(1)知$a_n=n$，利用裂项法可求$\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，从而可求得$T_n$，再判断数列$\{T_n\}$单调递增，从而可求得$a$的取值范围.

22.【答案】解：(1)因为不等式$f(x)=ax^2+bx-1>0$的解集是$\{x|3<x<4\}$，

所以3，4是方程$ax^2+bx-1=0$的解且$a<0$，

因此$\begin{cases}3+4=-\frac{b}{a}\\3\times4=-\frac{1}{a}\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{12}\\b=\frac{7}{12}\end{cases}$.

即$a$，$b$的值分别为$-\frac{1}{12}$，$\frac{7}{12}$.

(2)当$b=2$时，不等式$f(x)<0$对一切实数$x$恒成立，

即$ax^2+2x-1<0$对一切实数$x$恒成立，

若$a=0$，则不等式$2x-1<0$不恒成立，所以$a\neq0$.

当$a\neq0$时，要$ax^2+2x-1<0$对一切实数$x$恒成立，

则$\begin{cases}a<0\\2^2-4a\times(-1)<0\end{cases}$，解得$a<-1$.

即$a$的取值范围是$(-\infty,-1)$.

(3)当$a=1$时，$g(x)=f(x)-2b=x^2+bx-2b-1=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}-2b-1$，

因为存在$t_1,t_2 \in [0,1]$，使得 $g(t_1)g(t_2)<0$ 成立，

所以关于 $x$ 的方程 $g(x)=0$ 有两个不相等的实根，且至少有一个在区间$(0,1)$内，

由$\frac{b^2}{4}+2b+1>0$ 解得 $b<-2\sqrt{3}-4$ 或 $b>2\sqrt{3}-4$...①，

当 $x \in (0,1)$时，$2-x \in (1,2)$.

由$x^2+bx-2b-1=0$ 得 $b=\frac{x^2-1}{2-x}=(2-x)+\frac{3}{2-x}-4 \in [2\sqrt{3}-4,0)$...②.

由①②得 $b$ 的取值范围是$(2\sqrt{3}-4,0)$.

【解析】本题考查了一元二次不等式的解法，不等式恒成立问题，一次和二次函数和函数零点与方程根的关系.

(1)利用一元二次不等式的解法计算得结论;

(2)利用不等式恒成立问题处理方法，结合二次函数图象建立不等式组 $\begin{cases}a<0\\2^2-4a\times(-1)<0\end{cases}$，计算得结论;

(3)利用函数零点与方程根的关系把问题转化为关于 $x$ 的方程 $g(x)=0$ 有两个不相等的实根，且至少有一个在区间$(0,1)$内，再利用二次函数图象，结合对钩函数计算得结论.

学而思 武汉分校