天天练 37　计数原理、排列组合、二项式定理

一、选择题

1．10 名运动员中有 2 名老队员和 8 名新队员，现从中选 3 人参加团体比赛，要求老队员至多 1 人入选且新队员甲不能入选的选法有(　　)种(　　)

A. 76　B. 77

C. 80　D. 82

2．(2017·汉口一模)某单位有 7 个连在一起的车位，现有 3 辆不同型号的车需停放，如果要求剩余的 4 个空车位连在一起，则不同的停放方法有(　　)

A．16 种　B．18 种　C．24 种　D．32 种

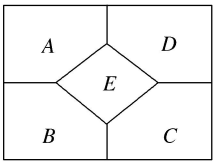
3．(2017·长沙一模)在某次大合唱中，要求 6 名演唱者站一横排，且甲不站左端，乙不站右端，则不同的站法种数为(　　)

A．368　B．488　C．486　D．504

4．(2016·四川卷，4)用数字 1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数，其中奇数的个数为(　　)

A．24　B．48　C．60　D．72

5．如图所示的五个区域中，中心区域是一幅图画，现有要求在其余四个区域中涂色，有四种颜色可供选择．要求每一个区域只涂一种颜色，相邻区域所涂颜色不同，则不同的涂色方法种数为(　　)



A．64　B．72　C．84　D．96

6．二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式中的常数项是(　　)

A．180　B．90　C．45　D．360

7．$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中只有第 6 项系数最大，则其常数项为(　　)

A．120　B．210　C．252　D．45

8．(2017·豫十校联考(二))$(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中 x 的系数为(　　)

A．160　B．240　C．360　D．800

二、填空题

9．已知关于 x 的二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 32，常数项为 80，则实数 a 的值为_____.

10．(2016·课标全国Ⅱ，15)有三张卡片，分别写有 1 和 2,1 和 3,2 和 3.甲，乙，丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说：“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，乙看了丙的卡片后说：“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”，丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”，则甲的卡片上的数字是_____.

11．(2017·兰州一模)有 4 个不同的球，4 个不同的盒子，把球全部放入盒内.

(1)恰有 1 个盒内放 2 个球，其放法有_____种；

(2)恰有 2 个盒内不放球，其放法有_____种.

三、解答题

12．已知等差数列$\{a_n\}$的首项是二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的常数项，公差为二项式展开式的各项系数和，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

天天练 37　计数原理、排列组合、二项式定理

1．B　若没有老运动员，其选法有：$C_7^3=35$；若有 1 名老运动员，其选法有：$C_3^1C_7^2=42$，所以老队员至多 1 个入选且新队员甲不能入选的选法有 35＋42＝77，故选 B.

2．C　将 4 个连在一起的空车位“捆绑”，作为一个整体，则所求即 4 个不同元素的全排列，有 $A_4^4=24$ 种不同的停放方法，故选 C.

3．D　**通解**　以甲的位置分为两类：①甲站右端，有 A_5^5种；②甲在中间 4 个位置之一，而乙不在右端，有 $A_4^1A_4^1A_4^4$种，故共有 $A_5^5+A_4^1A_4^1A_4^4=504$(种)站法．故选 D.

优解　(间接法)：甲在左端的站法有 A_5^5种，乙在右端的站法有 A_5^5种，甲在左端且乙在右端的站法有 A_4^4种，故共有 $A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$(种)站法．故选 D.

4．D　奇数的个数为 $C_3^1A_4^4=72$.

5．C　分成两类：A 和 C 同色时有 $4\times3\times3=36$(种)；A 和 C 不同色时 $4\times3\times2\times2=48$(种)，∴一共有 $36+48=84$(种).

6．A　$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot(\sqrt{x})^{10-k}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=2^kC_{10}^k\cdot x^{5-\frac{5}{2}k}$，令 $5-\frac{5}{2}k=0$，得 $k=2$，故常数项为 $2^2C_{10}^2=180$.

7．B　由已知得，二项展开式中各项的系数和二项式系数相等．由展开式中只有第 6 项的系数 C_{2n}^5 最大，可得展开式有 11 项，即 $2n=10$，$n=5$.

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r\,x^{5-\frac{1}{2}r}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^r=C_{10}^rx^{5-\frac{5}{6}r}$，令 $5-\frac{5}{6}r=0$，得 $r=6$，此时 $T_7=C_{10}^6=210$，故选 B.

8．B　**通解**　由 $(x^2+3x+2)^5=[(x^2+3x)+2]^5$ 得 $T_{k+1}=C_5^k\cdot2^k(x^2+3x)^{5-k}$，再次使用展开式的通项得，$T_{r+1}=C_5^k\cdot2^kC_{5-k}^r\cdot3^rx^{10-2k-r}$，其中 $0\leqslant k\leqslant5$,$0\leqslant r\leqslant5-k$.令 $10-2k-r=1$，即 $2k+r=9$，所以 $r=1$，$k=4$，由此得 x 的系数为 $C_5^4\times2^4\times3=240$.

优解 1　：由 $(x^2+3x+2)^5=(x+1)^5(x+2)^5$ 得 $(x+1)^5$ 展开式中 x 的系数为 C_5^4，常数项为 1，$(x+2)^5$ 展开式中 x 的系数为 $C_5^4\times2^4$，常数项为 2^5，故原式的展开式中 x 的系数为 $C_5^4\times2^5+C_5^4\times2^4=240$.

优解 2　将 $(x^2+3x+2)^5$ 看作 5 个三项式相乘，展开式中 x 的系数就是从其中一个三项式中取 $3x$ 的系数 3，从另外 4 个三项式中取常数项相乘所得的积，即 $C_5^1\times3\times C_4^4\times2^4=240$.

9．2

解析：∵二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 32，

∴$2^n=32$，∴$n=5$，

∵$T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_5^ra^rx^{\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r}$，

∴$\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r=0$，∴$r=3$.

∴常数项为 $C_5^3a^3=80$，∴$a=2$.

10．1 和 3

解析：由丙说的话可知丙的卡片上的数字一定不是 2 和 3.若丙的卡片上的数字是 1 和 2，则乙的卡片上的数字是 2 和 3，甲的卡片上的数字是 1 和 3，满足题意；若丙的卡片上的数字是 1 和 3，则乙的

卡片上的数字是 2 和 3，此时，甲的卡片上的数字只能是 1 和 2，不满足题意．故甲的卡片上的数字是 1 和 3.

11．144　84

解析：(1)“恰有 1 个盒内放 2 个球”，即另外 3 个盒内放剩下的 2 个球，而每个盒内至多放 1 个球，即另外 3 个盒子中恰有 1 个空盒，因此，“恰有 1 个盒内放 2 个球”即“恰有 1 个盒内不放球”，故有 $C_4^2C_4^1A_3^3=144$ 种放法.

(2)先从 4 个盒子中任意拿走 2 个，有 C_4^2 种方法，问题转化为“4 个球，2 个盒子，每盒必放球，有几种放法？”．从放球数目看，可分为(3,1)，(2,2)两类：第 1 类，可从 4 个球中先选 3 个，然后放入指定的一个盒子中即可，有 $C_4^3\cdot C_2^1=8$ 种放法；第 2 类，有 $C_4^2=6$ 种放法．因此共有 8＋6＝14(种)放法．由分步乘法计数原理得，“恰有 2 个盒内不放球”的放法有 $C_4^2\times 14=84$(种).

12．**解**：由于二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的通项为

$T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r=(-2)^rC_6^rx^{3-r}$.

令 $3-r=0$，得 $r=3$，

∴常数项为 $T_4=(-2)^3C_6^3=-160$，即 $a_1=-160$.

又二项展开式的各项系数和即为 $x=1$ 时二项式的值，∴$d=1$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-160+(n-1)\times 1=n-161$.