# 2018~2019学年广东广州天河区天河外国语学校高二下学期期中理科数学试卷

## 一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1 已知

$a$，

$b\in\mathbf{R}$，

$\mathrm{i}$是虚数单位，若

$(1+\mathrm{i})(1-b\mathrm{i})=a$，则

$|a+b\mathrm{i}|=$（ ）．

A. $\sqrt{2}$　　B. $2$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $5$

2 方程$\dfrac{x^2}{\sin\theta-1}+\dfrac{y^2}{2\sin\theta+3}=1$所表示的曲线是（ ）．

A. 焦点在$x$轴上的椭圆　　B. 焦点在$y$轴上的椭圆

C. 焦点在$x$轴上的双曲线　　D. 焦点在$y$轴上的双曲线

3 给出下列四个结论：

①命题“

$\exists x\in\mathbf{N}$，

$x^2>2^x$”的否定是“

$\forall x\in\mathbf{N}$，

$x^2\leqslant 2^x$”；

②命题“若

$a^2+b^2=0$，则

$a=0$且

$b=0$”的否定是“若

$a^2+b^2=0$，则

$ab \neq 0$”

③命题“若

$ab=0$，则

$a=0$或

$b=0$”的否命题是“

$ab \neq 0$，则

$a \neq 0$或

$b \neq 0$”；

④若“

$p \wedge q$是假命题，

$p \vee q$是真命题”，则命题

$p$，

$q$一真一假．

其中正确结论的个数为（ ）．

A. $1$　　B. $2$　　C. $3$　　D. $4$

4 曲线

$y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1}{2}$在点

$M\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$处的切线的斜率为（ ）．

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 若函数

$f(x)=x^3-ax^2+1$在

$(0,2)$内单调递减，则实数

$a$的取值范围是（ ）．

A. $a \geqslant 3$　　B. $a=2$　　C. $a \leqslant 3$　　D. $0<a<3$

6 观察下列等式，

$1^3+2^3=3^2$，

$1^3+2^3+3^3=6^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$，根据上述规律得

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=[f(n)]^2$，则

$f(n)=$（ ）．

A. $\frac{n(n+1)}{2}$　B. $n(n+1)$　C. $2n$　D. $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

7 $A$，

$B$，

$C$，

$D$是空间不共面的四点，且满足

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

$M$为

$BC$中点，则

$\triangle AMD$是（ ）．

A. 直角三角形　B. 钝角三角形　C. 锐角三角形　D. 不确定

8 已知抛物线

$C:y^2=8x$的焦点为

$F$，准线

$l$与

$x$轴的交点为

$M$，点

$P$在抛物线上，且

$|PM|=\sqrt{2}|PF|$，则

$\triangle PMF$的面积为（ ）．

A. $4$　B. $8$　C. $16$　D. $32$

9 若函数

$f(x)=ax^2+x\ln x$有两个极值点，则实数

$a$的取值范围是（ ）．

A. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　B. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　C. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$　D. $\left[-\frac{1}{2},0\right)$

10

双曲线

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为

$F_1$、

$F_2$过

$F_2$的直线与双曲线的右支交于

$A$、

$B$两点，若

$\triangle F_1AB$是以

$A$为直角顶点的等腰直角三角形，若该双曲线离心率为

$e$，则

$e^2=$（ ）.

A. $1+2\sqrt{2}$　　B. $4-2\sqrt{2}$　　C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $5-2\sqrt{2}$

11 设函数

$f(x)=(3-x)\mathrm{e}^x-tx+5t$,

$t\in\mathbf{R}$. 若存在唯一的整数

$x_0$，使得

$f(x_0)>0$，则实数

$t$的取值范围为（ ）.

A. $\left(-\frac{\mathrm{e}^2}{3},-\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$　　B. $\left(-\frac{\mathrm{e}^2}{3},-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$　　C. $\left(-\frac{\mathrm{e}^2}{3},\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$　　D. $\left(-\frac{\mathrm{e}^2}{3},\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$

12 已知函数

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，关于

$x$的方程

$f(x)-\frac{1}{f(x)}=m$有三个不等的实根，则

$m$的取值范围是（ ）.

A. $\left(-\infty,\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}\right)$　　C. $\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e},+\infty\right)$

## 二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13 $\int_{-2}^{2}(\sin x+\sqrt{4-x^2})\mathrm{d}x=$______.

14 已知 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$，则 $f(k+1)=f(k)+$ ______ .

15 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F$，短轴的一个端点为 $M$，直线 $l:3x-4y=0$交椭圆 $E$于 $A$，$B$两点，若 $|AF|+|BF|=4$，点 $M$到直线 $l$的距离不小于 $\dfrac{4}{5}$，则椭圆 $E$的离心率的取值范围是 ______ .

16 已知 $f(x)\ (x\in\mathbf{R})$是奇函数，函数 $f'(x)$是 $f(x)$的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$成立的 $x$的取值范围是 ______ .

## 三、解答题（本大题共5小题，每小题12分，共60分）

17 设函数$f(x)=xe^{kx}(k\neq 0)$.

(1) 求$f(x)$的单调区间.

(2) 若函数

$f(x)$在区间

$(-1,1)$内单调递增，求

$k$的取值范围.

18 已知

$F$为抛物线

$C:y^2=2px(p>0)$的焦点，过

$F$的动直线交抛物线

$C$于

$A$,

$B$两点，当直线与

$x$轴垂直时，

$|AB|=4$.

(1) 求抛物线$C$的方程.

(2) 设直线

$AB$的斜率为

$1$且与抛物线的准线

$l$相交于点

$M$，抛物线

$C$上存在点

$P$使得直线

$PA$,

$PM$,

$PB$的斜率成等差数列，求点

$P$的坐标.

19 如图，在四棱锥

$P-ABCD$中，四边形

$ABCD$是直角梯形，

$AB\perp AD$,

$AB//CD$,

$PC\perp$底面

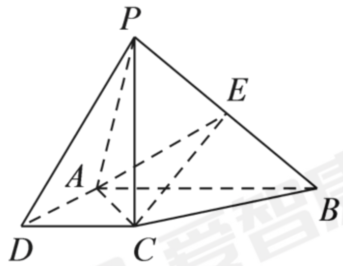
$ABCD$,

$AB=2AD=2CD=4$,

$PC=2a$,

$E$是

$PB$的中点.




（1） 求证：平面

$EAC\perp$平面

$PBC$.

（2） 若二面角

$P-AC-E$的余弦值为

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求直线

$PA$与平面

$EAC$所求角的正弦值.

20 已知椭圆

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为

$\dfrac{1}{2}$，点

$M\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$在椭圆

$C$上.

（1） 求椭圆$C$的方程.

（2） 若不过原点

$O$的直线

$l$与椭圆

$C$相交于

$A$,

$B$两点，与直线

$OM$相交于点

$N$，且

$N$是线段

$AB$的中点，求

$\triangle OAB$面积的最大值.

21 已知函数

$f(x)=(a-bx^3)\mathrm{e}^x-\dfrac{\ln x}{x}$，且函数

$f(x)$的图象在点

$(1,\mathrm{e})$处的切线与直线

$x-(2\mathrm{e}+1)y-3=0$垂直.

（1） 求

$a$，

$b$.

（2） 求证：当

$x\in(0,1)$时，

$f(x)>2$.

## 四、选做题（本大题共2小题，选做一题计10分）

**选修4-4：坐标系与参数方程**

22 已知曲线

$C$的参数方程为

$\begin{cases}x=2+2\sqrt{2}\cos\alpha\\ y=2+2\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$(

$\alpha$为参数)，以直角坐标系原点

$O$为极点，

$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（1） 求曲线$C$的极坐标方程.

（2） 设射线

$l_1:\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

$l_2:\theta=\dfrac{\pi}{6}$，若

$l_1, l_2$分别与曲线

$C$相交于异于原点的两点

$A, B$，求

$\triangle ABO$的面积.

**选修4-5：不等式选讲**

23 设函数$f(x)=|x-2|-|2x+1|$.

（1） 解不等式$f(x)\leqslant 0$.

（2） $\forall x\in \mathbf{R}$,

$f(x)-2m^2\leqslant 4m$恒成立，求实数

$m$的取值范围.