2020 届八校第二次联考理科数学试题答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	A	C	C	D	B	A	B	C	D	B

1. 答案 B $\because A=\{x|x>1\}, B=\{x|-1\le x\le 2\}, \therefore A\cap B=\{x|1<x\le 2\}$

2. 答案 C $\because |Z-(1-i)|=2\sqrt{2}$, 令 $\overrightarrow{OA}=Z, \overrightarrow{OB}=1-i, |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{2}$, 根据复数的几何意义，点 A 在以 $B(1,-1)$ 为圆心，$r=2\sqrt{2}$ 的圆上，$\therefore |Z|_{\max}=3\sqrt{2}$

3. 答案 A 根据函数的相关性质得 $x>1, 0<y<1, z<0, \therefore z<y<x$

4. 答案 C 设 $BP=x$，根据题意得 $\frac{x}{x+5}=\frac{1.5}{9}=\frac{1}{6}$，解得 $x=1$，$\therefore$ 扫过的面积是 $s=\pi(6^2-5^2)=3.14\times 11=34.54m^2$

5. 答案 C $\because f(-x)=-f(x)$，且 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)<0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$，结合图形特征作出判断

6. 答案 D 根据题意可得 $p=\frac{C_4^2A_3^3}{3\times 3\times 3\times 3}=\frac{4}{9}$

7. 答案 B $\because |\overrightarrow{OA}|=2, 60^\circ\le\theta\le 120^\circ$, 结合图形转化可得 $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=|\overrightarrow{OA}|\cos\theta$，可得最大值是 1

8. 答案 A 根据题意可得渐近线的倾斜角是 $60^\circ, 120^\circ$，$\therefore \tan 60^\circ=\frac{b}{a}, b=\sqrt{3}a$，因此双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$，该曲线又过点 $(2,3)$，解得 $a=1$，所以实轴长为 2

9. 答案 B 令 $\alpha=2020x+\frac{\pi}{4}$，$\therefore f(x)=\sin\alpha+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha$

$=2\sin\left(2020x+\frac{\pi}{4}\right)$，即 $M=2$，$|m-n|_{\min}=\frac{1}{2}T$，$\therefore M\cdot|m-n|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{1010}$

10. 答案 C 易判断①③正确

11. 答案 D 根据题意数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1, a_2=3, a_3=6, a_4=10\cdots$，易求得 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，求和得 $\frac{4040}{2021}$

12. 答案 B　要求 $AM+MN$ 最小，即求 MN 最小，可得 $MN\perp$ 平面 PCE，又可证明 $MN//DF$；再把平面 POD 绕 PD 旋转，与 PDA 共面；又可证得 $\angle POD=90^\circ$。

$\because PD=\frac{1}{2}AC, DO=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{2}, \therefore \sin\angle OPD=\frac{OD}{PD}=\frac{1}{2}$,

即 $\angle OPD=30^\circ$，$\therefore \angle APN=45^\circ+30^\circ=75^\circ$,可得 $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$(AM+MN)_{\min}=AN=PA\cdot\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分；其中 16 题第一空 3 分，第二空 2 分。）

13.31　　14. 65　　15.$e-2$　　16. $(1)p=2\sqrt{2};(2)\left(4\sqrt{2},0\right)$

13. 易求得 $q^3=8, q=2$，$\therefore s_5=31$

14. 根据图形可列式 $10\times0.01+10\times0.02+(x-60)\times0.04=0.5$，解得 $x=65$

15. 根据题意得 $x_1=2\ln x_2\in[0,2]$，$\therefore 0\le\ln x_2\le 1$, 即 $1\le x_2\le e$

又 $x_2>2, \therefore 2<x_2\le e$，此时 $x_2-x_1=x_2-2\ln x_2$，

构造函数 $g(x)=x-2\ln x$，以判断函数 $g(x)$ 在 $x\in(2,e]$ 上单调递增，即 $x_2-x_1=g(x)_{\max}=g(e)=e-2$

16. 设直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，易知 $OA\perp OB$ 可得

$x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$，得到 $y_1y_2=-4p^2$

又令 $l: x=my+t$ 代入抛物线 $y^2=2px$ 中，可得方程 $y^2-2pmy-2pt=0$

由韦达定理得 $y_1y_2=-2pt=-4p^2, \therefore t=2p$

$\therefore s=\frac{1}{2}\times 2p\times|y_1-y_2|=p\sqrt{4p^2m^2+16p^2}=2p^2\sqrt{m^2+4}\ge 4p^2$

即 $4p^2=32$, 解得 $p=2\sqrt{2}$,同时求得定点 $\left(4\sqrt{2},0\right)$

三、解答题

17. 解：$(1)\ f(x)=\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$,

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$\therefore T=\pi$;

又$\because 2x+\frac{\pi}{6}=k\pi, x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$,即对称中心是$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right),(k\in Z)$.....5 分

$(2)\because f(A)=\sin(2A+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2},\therefore A=\frac{\pi}{3}$ .....6 分

又$\because \Delta ABC$ 为锐角三角形

$\therefore \frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$且$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,即$B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \tan B>\frac{1}{\sqrt{3}}$,得到$0<\frac{1}{\tan B}<\sqrt{3}$ .....8 分

而在ΔABC中,$\frac{C}{\sin C}=\frac{4}{\sin B}$

$$\therefore c=\frac{4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\sin B}=\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}\cos B+2\sin B}{\sin B}$$

即$c=\frac{2\sqrt{3}}{\tan B}+2\in(2,8)$ .....10 分

$\therefore s=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}c=\sqrt{3}c$

$\therefore s\in\left(2\sqrt{3},8\sqrt{3}\right)$ .....12 分

18. (1)证明:连接AC

$\because$底面$ABCD$为菱形,$\angle ABC=60^{\circ}$,$\therefore \Delta ABC$是正三角形

$\because E$是BC中点,$\therefore AE\perp BC$

又$AD//BC$,$\therefore AE\perp AD$

又$\because PA\perp$平面$ABCD$,$AE\subset$平面$ABCD$,$\therefore PA\perp AE$

又$PA\cap AD=A$,$\therefore AE\perp$平面PAD

又$AE\subset$平面AEF,$\therefore$平面$AEF\perp$平面PAD .....4 分

(2)解:由(1)知,AE,AD,AP两两垂直,以AE,AD,AP所在直线分别为x轴,y轴,z轴建立如图所示的空间直角坐标系,易知:

$A(0,0,0),B(\sqrt{3},-1,0),C(\sqrt{3},1,0),D(0,2,0),P(0,0,2),M(0,1,1)$

$\therefore \overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},1,-2),\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,-2\lambda),\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$

而 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(0,0,2)+(\sqrt{3}\lambda,\lambda,-2\lambda)=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,2-2\lambda)$,且 $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$

设平面 PCD 的法向量 $\vec{m}=(x_0,y_0,z_0)$

$\therefore \begin{cases}\sqrt{3}x_0+y_0-2z_0=0\\ 2y_0-2z_0=0\end{cases}$,取 $z_0=\sqrt{3}$,$\therefore \vec{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$

根据题意,线面角 $\sin\theta=\dfrac{\left|\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right|}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3\lambda^2+\lambda^2+4(1-\lambda)^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{2\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}}$

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时,$\sin\theta$ 最大,此时 F 为 PC 的中点,即 $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.....8 分

$\therefore \overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0),\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right),\overrightarrow{AM}=(0,1,1)$

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$,平面 AEM 的法向量为 $\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\therefore \begin{cases}\sqrt{3}x_1=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}y_1+z_1=0\end{cases}$,解得 $\vec{n_1}=(0,2,-1)$,同理可得 $\vec{n_2}=(0,1,-1)$.....10 分

$\therefore \left|\cos\alpha\right|=\left|\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>\right|=\dfrac{|2+1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ .....11 分

所以二面角 $F-AE-M$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ .....12 分

19. 解:(1) 由题意可得 $f(p)=C_5^1p(1-p)^4$

$\therefore f'(p)=C_5^1\left[(1-p)^4-4p(1-p)^3\right]=C_5^1(1-p)^3(1-5p)$

因此当 $p_0=\dfrac{1}{5}$ 时,$f(p)$ 取最大值 .....4 分

(2) 由上可知 $p_0=\dfrac{1}{5}$,设剩下 45 个布娃娃中有 Y 个奖品,获利为 X 元,则 $Y\sim B\left(45,\dfrac{1}{5}\right)$,

又 $X=15Y-90$,因此 $E(X)=E(15Y-90)=15E(Y)-90=15\times45\times\dfrac{1}{5}-90=45>0$

因此买下剩下所有的45个布娃娃 8分

(3)设抽到k个,有奖品的可能性为$p(k)$,则$p(k)=\frac{C_{10}^{k}\cdot C_{40}^{5-k}}{C_{50}^{5}}$

根据题意可得$\begin{cases}p(k)\geq p(k+1)\\ p(k)\geq p(k-1)\end{cases}$,即$\frac{C_{10}^{k}C_{40}^{50-k}}{C_{50}^{5}}\geq\frac{C_{10}^{k+1}C_{40}^{4-k}}{C_{50}^{5}}$且$\frac{C_{10}^{k}C_{40}^{5-k}}{C_{50}^{5}}\geq\frac{C_{10}^{k-1}C_{40}^{6-k}}{C_{50}^{5}}$,

化简得$\begin{cases}(10-k)(5-k)\leq(k+1)(36+k)\\ k(35+k)\leq(11-k)(6-k)\end{cases}$

解得$\frac{7}{26}\leq k\leq\frac{33}{26}$,从而$k=1$ 12分

20.(1)易求得$a=\sqrt{2},b=1$ ∴椭圆方程:$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 4分

(2)易求得右焦点$F(1,0)$,若直线l斜率不存在时，$k_1+k_2=0$，不合题意，舍去；.....5分

设直线l的方程为$y=k(x-1)$,联立方程

$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$,化简得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$

设直线l与椭圆C的两个交点为$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

根据韦达定理得$x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$ 7分

而$k_1=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{2}},k_2=\frac{y_2}{x_2+\sqrt{2}}$

又有$k_1+k_2=3$

即$\frac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}+\frac{y_2}{x_2+\sqrt{2}}=\frac{k(x_1-1)}{x_1+\sqrt{2}}+\frac{k(x_2-1)}{x_2+\sqrt{2}}$

$=k\frac{2x_1x_2+(\sqrt{2}-1)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}}{x_1x_2+\sqrt{2}(x_1+x_2)+2}$

$=k\frac{\frac{4k^2-4}{1+2k^2}+(\sqrt{2}-1)\frac{4k^2}{1+2k^2}-2\sqrt{2}}{\frac{2k^2-2}{1+2k^2}+\sqrt{2}\frac{4k^2}{1+2k^2}+2}$

$$=k\frac{4k^2-4+\left(\sqrt{2}-1\right)4k^2-2\sqrt{2}\left(2k^2+1\right)}{2k^2-2+4\sqrt{2}k^2+2+4k^2}$$

$$=k\frac{-\left(4+2\sqrt{2}\right)}{(6+4\sqrt{2})\ k^2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{2}\right)}{(6+4\sqrt{2})\ k}$$

$=\frac{-\left(4+2\sqrt{2}\right)}{k}=3$,解得$k=-\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ .....11 分

$\therefore$直线$l:y=-\frac{2-\sqrt{2}}{3}(x-1)$，即$\left(2-\sqrt{2}\right)x+3y-\left(2-\sqrt{2}\right)=0$ .....12 分

21.解:(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+a+\cos x$

设 $g(x)=\frac{1}{x}+a+\cos x$ ，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\sin x<0$ ，因此 $f'(x)$ 单调递减，

$f'(x)_{\min}=f'(\pi)=\frac{1}{\pi}+a-1$，又$x\to 0$时，$f'(x)\to+\infty$ .....2 分

若$f'(\pi)<0$，即$a<1-\frac{1}{\pi}$时，$\exists x_0\in(0,\pi)$,使$f'(x_0)=0$;

当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增，

当$x\in(x_0,\pi)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，

$\therefore f(x)$在x_0处取极大值，不存在极小值 .....4 分

若$f'(\pi)\geq 0$，即$a\geq 1-\frac{1}{\pi}$，$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$在$(0,\ \pi]$单调递增，此时$f(x)$无极值

.....5 分

(2) 由第一问结论可知

(i) 若$a\geq 1-\frac{1}{\pi}$时，由上问可知：

$$f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\geq\ln\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)+1=\ln\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}>0$$

即$a\geq 1-\frac{1}{\pi}$时函数没有零点 .....6 分

(ii)若$a<1-\frac{1}{\pi}$时，$x\in(0,x_0]$时$f(x)$单调递增；$x\in(x_0,\pi]$时，$f(x)$单调递减。

由$f'(x_0)=0$得 $\frac{1}{x_0}+a+\cos x_0=0$，从而$a=-\frac{1}{x_0}-\cos x_0$

再设 $h(x)=-\frac{1}{x}-\cos x$，则 $h'(x)=\frac{1}{x^2}+\sin x>0$ 从而 a 关于 x_0 单调递增。

①若 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，此时 $a\in\left(-\infty,-\frac{2}{\pi}\right]$，若

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi)>0$ 得 $a<-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $a>-\frac{\ln\pi}{\pi}$ ，所以 $a<-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$ 时无零点；

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi)<0$ 得 $-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)<a<-\frac{\ln\pi}{\pi}$ ，所以 $-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)<a\le-\frac{2}{\pi}$ 时有一个零点；

当 $a=-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, f(\pi)\neq 0$, 有一个零点

因此 $a<-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$ 时无零点；$-\frac{2}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)\le a\le-\frac{2}{\pi}$ 时有一个零点；.....8 分

②$x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 此时 $a\in\left(-\frac{2}{\pi},1-\frac{1}{\pi}\right]$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}a+1>0, f(\pi)=\ln\pi+\pi a$

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)=\ln x_0+ax_0+\sin x=\ln x_0+\sin x_0-x_0\cos x_0-1$，

设 $m(x)=\ln x+\sin x-x\cos x-1$, 则 $m'(x)=\frac{1}{x}+x\sin x>0$，

所以 $f(x)_{\max}>m\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}>0$，

若 $f(\pi)>0$ 即 $a>-\frac{\ln\pi}{\pi}$ 即 $-\frac{\ln\pi}{\pi}<a<1-\frac{1}{\pi}$ 时无零点；.....10 分

若 $f(\pi)\le 0$ 即 $a\le-\frac{\ln\pi}{\pi}$ 即 $-\frac{2}{\pi}<a\le-\frac{\ln\pi}{\pi}$ 时有一个零点 .....11 分

综上所述：$a\in\left(-\infty,-\frac{2}{\pi}(1+\ln\frac{\pi}{2})\right)\cup\left(-\frac{\ln\pi}{\pi},+\infty\right)$ 时无零点；

$a\in\left[-\frac{2}{\pi}(1+\ln\frac{\pi}{2}),-\frac{\ln\pi}{\pi}\right]$ 时有一个零点 .....12 分

22.解:(1) 依题意得 $\begin{cases}x^2=4t^2+4+\frac{1}{t^2}\\ y^2=4t^2-4+\frac{1}{t^2}\end{cases}$，整合得到: $x^2-y^2=8$

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，化简得 $\rho^2\cos 2\theta=8$

对于 $\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+y^2=8, x^2+y^2-4\sqrt{2}x=0$，化简得：$\rho=4\sqrt{2}\cos\theta$

$\therefore C_1:\rho^2\cos 2\theta=8; C_2:\rho=4\sqrt{2}\cos\theta$ .....5 分

$(2)\ A(\rho_A,\theta), B(\rho_B,\theta)$

依题意得 $\begin{cases}\rho^2\cos 2\theta=1\\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$，解得 $\rho_A=\sqrt{2}$；$\begin{cases}\rho=4\sqrt{2}\cos\theta\\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$，解得 $\rho_B=2\sqrt{6}$

$|AB|=\rho_B-\rho_A=2\sqrt{6}-\sqrt{2}$

又$\because \dfrac{d}{OC_2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$，解得 $d=\sqrt{2}$

$\therefore s=\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{3}-2\right)=2\sqrt{3}-1$ .....10 分

23. (1)解：易知 $f(x)=|x-1|+|2x+4|$ 在 $\{x|-4\le x\le 2\}$ 的最大值是 9

$\therefore 3+M=9$ 即 $M=6$ .....4 分

(2)证明：$\because \dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\ge\dfrac{2ab}{c}+\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ac}{b}$

$$又\because \frac{2ab}{c}+\frac{2bc}{a}+\frac{2ac}{b}=a\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge 2(a+b+c)$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立

又$\because a+b+c=M=6$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\ge 12$ 成立 .....10 分