2018~2019学年成都外国语学校高一下学期5月月考数学试卷

一、选择题（本大题共12题，每小题5分，共60分）

1 计算$\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$的结果等于（　）．

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案　A

解析　$\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ = \sin(43^\circ - 13^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$．

标注　【题型】 三角函数 > 三角恒等变换 > 利用和差角公式化简求值

【知识点】 三角函数 > 三角恒等变换 > 和差角公式 > 两角和与差的正弦

2 若a，b，c为实数，则下列命题正确的是（　）．

A. 若$a > b$，则$ac^2 > bc^2$　　B. 若$a < b < 0$，则$a^2 > ab > b^2$

C. 若$a < b < 0$，则$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$　　D. 若$a < b < 0$，则$\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$

答案　B

解析　A选项：当$c = 0$时，若$a > b$，则$ac^2 = bc^2$，故A错误；

B选项：若$a < b < 0$，则$a^2 > ab$且$ab > b^2$，即$a^2 > ab > b^2$，故B正确；

C选项：若$a < b < 0$，$ab > 0$，则$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} < 0$，即$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$，故C错误；

D选项：若$a < b < 0$，则$0 < \frac{b}{a} < 1$，$\frac{a}{b} > 1$故$\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$，故D错误；

故选B.

标注　【知识点】 不等式 > 不等式的性质

【题型】 不等式 > 不等式的性质 > 针对不等式变形判断正误

3 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3+a_7+a_{11}=12$，则S_{13}等于（ ）.

A. 58　　B. 54　　C. 56　　D. 52

答案 D

解析 $\because a_3+a_7+a_{11}=12$，

$\therefore 3a_7=12\Rightarrow a_7=4$.

则$S_{13}=\dfrac{13(a_1+a_{13})}{3}=\dfrac{13\cdot 2\cdot a_7}{2}=13\times 4=52$.

故选D.

标注 【知识点】 数列 > 等差数列 > 等差数列的性质及应用

【知识点】 数列 > 等差数列 > 等差数列的前n项和

【题型】 数列 > 等差数列 > 等差数列的性质问题 > 等差数列前n项和的性质

4 在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$a=4\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{2}$，则B等于（ ）.

A. 45°或135°　　B. 135°　　C. 45°　　D. 30°

答案 C

解析 根据正弦定理，可知$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则$B=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$，又$a>b$，故$A>B$，因此$B=\dfrac{\pi}{4}$.

故选C.

标注 【题型】 解三角形 > 正余弦定理的简单应用 > 利用正、余弦定理求解边角

【知识点】 解三角形 > 正弦定理

5 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_5a_6+a_4a_7=18$，则$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$（ ）.

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. $2+\log_3 5$

答案 B

解析 由等比数列的性质知$a_5a_6=a_4a_7$，又$a_5a_6+a_4a_7=18$，所以$a_5a_6=a_4a_7=9$，从而

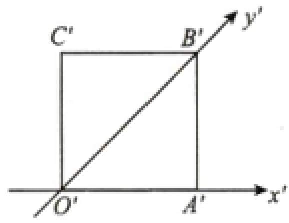
$\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=\log_3(a_1a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_{10})=\log_3(a_5a_6)^5=5\log_3(a_5a_6)=5\log_39$
$=10$

.

标注 【题型】 数列 > 等比数列 > 等比数列的性质问题 > 等比数列的性质

【知识点】 数列 > 等比数列 > 等比数列的性质及应用

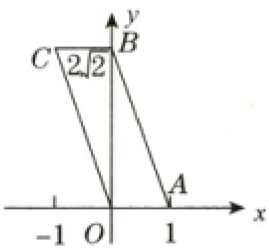
6 如图所示的正方形$O'A'B'C'$的边长为1cm，它是水平放置的一个平面图形的直观图，则原图形的周长是（　）.



A. 6cm　　B. 8cm　　C. $(2+3\sqrt{2})\text{cm}$　　D. $(2+2\sqrt{3})\text{cm}$

答案 B

解析 如图，画出原图形，$OB=2O'B'=2\sqrt{2}\text{cm}$，



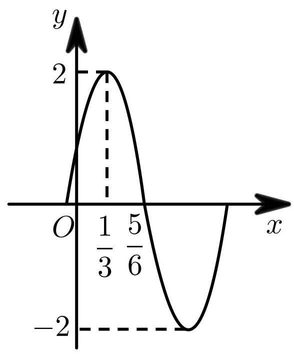
$

$OA=O'A'=1\text{cm}$，$AB=CO=\sqrt{OA^2+OB^2}=3\text{cm}$，$BC=B'C'=1\text{cm}$，故周长为8cm$.

标注 【知识点】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 斜二测画法

【题型】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的概念 > 斜二测法画直观图

7 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R},A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则$f(x)$的解析式是（　）.



A. $f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$　　B. $f(x)=2\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$

C. $f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$　　D. $f(x)=2\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$

答案　A

解析　由图象可知：$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$的长度是四分之一个周期，

函数的周期为2，所以$\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

函数图象过$(\frac{1}{3},2)$所以$A=2$，并且$2=2\sin(\pi\times\frac{1}{3}+\phi)$，

$\because|\phi|<\frac{\pi}{2}$，$\phi=\frac{\pi}{6}$，

$f(x)$的解析式是$f(x)=2\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})(x\in\mathbf{R})$，

故选A．

标注　【知识点】 三角函数 > 三角函数的图象与性质 > 正弦型函数 > 正弦型函数的图象与性质

8　《莱茵德纸草书》（ Rhind Papyrus ）是世界上最古老的数学著作之一，书中有一道这样的题目：把100磅面包分给5个人，使每人所得成等差数列，且使较大的两份之和的$\frac{1}{2}$是较小的三份之和，则最小的1份为（　）．

A. $\frac{5}{3}$ 磅　　B. $\frac{11}{9}$ 磅　　C. $\frac{10}{3}$ 磅　　D. $\frac{20}{9}$ 磅

答案　D

解析　设五个人所分得的面包为$a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$(其中$d>0$)，因为把100个面包分给五个人，

所以$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=100$，解得$a=20$，

因为使较大的两份之和的$\frac{1}{2}$是较小的三份之和，

所以$\frac{1}{2}(a+d+a+2d)=a-2d+a-d+a$，得$2a+3d=2(3a-3d)$，

化简得$9d=4a$，所以$d=\frac{4}{9}\times 20=\frac{80}{9}$，所以最小的1份为$a-2d=20-2\times\frac{80}{9}=\frac{20}{9}$．

故选D．

标注 【知识点】 数列 > 数列的概念 > 数列的函数特性

【题型】 数列 > 数列的实际应用

9 已知不等式$ax^2-5x+b>0$的解集为$\{x\,|-3<x<2\}$，则不等式$bx^2-5x+a>0$的解集为（ ）．

A. $\left\{x\middle|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x<-\frac{1}{3}或x>\frac{1}{2}\right\}$

C. $\{x\,|-3<x<2\}$

D. $\{x\,|x<-3或x>2\}$

答案 B

解析 根据题意，可有

$(x+3)(x-2)<0\Rightarrow x^2+x-6<0\Rightarrow -5x^2-5x+30>0$，根据待定系数可得$a=5$，$b=30$

因此$30x^2-5x-5>0\Rightarrow 6x^2-x-1>0\Rightarrow(2x-1)(3x+1)>0$

解之$x<-\frac{1}{3}$或$x>\frac{1}{2}$

故选B．

标注 【知识点】 不等式 > 解不等式 > 一元二次不等式

【题型】 不等式 > 解不等式 > 解一元二次不等式

10 已知$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=-\frac{7}{9}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$的值等于（ ）．

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{7}{9}$

答案 B

解析 已知$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=-\frac{7}{9}$，

又$\frac{2\pi}{3}+\theta-\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}$，

则$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\frac{7}{9}$.

故选B .

标注 【知识点】 三角函数 > 三角函数的概念 > 任意角的三角函数 > 诱导公式

【题型】 三角函数 > 三角函数的概念 > 任意角的三角函数 > 利用诱导公式进行化简或求值问题

11 已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则$\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$ ( ) .

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

答案 D

解析 令$\alpha=\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$，得

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

分析得$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\frac{4}{5}$，

因而$\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{4}{5}$.

故选D .

标注 【知识点】 三角函数 > 三角恒等变换 > 和差角公式 > 两角和与差的正弦

【题型】 三角函数 > 三角恒等变换 > 利用和差角公式化简求值

12

若两个正实数x，y满足$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=2$，且不等式$x+\frac{y}{4}<m^2-m$有解，则实数$m$的取值范围是（ ）．

A. $(-1,2)$

B. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C. $(-2,1)$

D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

答案 D

解析 若不等式$x+\frac{y}{4}<m^2-m$有解，即$m^2-m>\left(x+\frac{y}{4}\right)_{\min}$即可，

则

$$\begin{aligned} x+\frac{y}{4}&=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\right)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2x}{y}+\frac{y}{8x}\\ &\geqslant 1+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{8x}}\\ &=1+2\times\sqrt{\frac{1}{4}}\\ &=1+2\times\frac{1}{2}\\ &=1+1\\ &=2, \end{aligned}$$

当且仅当$\frac{2x}{y}=\frac{y}{8x}$，即$y^2=16x^2$，即$y=4x$时取等号，此时$x=1$，$y=4$，即$\left(x+\frac{y}{4}\right)_{\min}=2$，

则由$m^2-m>2$得$m>2$或$m<-1$，即实数m的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$．

故选D．

标注 【知识点】不等式 > 基本不等式 > 均值不等式的实际应用

【题型】不等式 > 基本不等式 > 均值不等式与恒成立问题

13 已知点A、B、C、D在同一个球面上，$AB=3$，$BC=4$，$AC=5$，若四面体$ABCD$体积的最大值为10，则这个球的表面积是（ ）．

A. $\frac{25\pi}{4}$

B. $\frac{125\pi}{4}$

C. $\frac{225\pi}{16}$

D. $\frac{625\pi}{16}$

答案 D

解析 由$AB^2+BC^2=AC^2$可知$\triangle ABC$为直角三角形，

$BA\perp BC$，所以$\triangle ABC$的外心O_2为AC的中点，

由四面体的体积公式可知，当顶点D到平面ABC的距离最大时，有最大体积，

当D，O_2，球心O_1共线时，顶点D到平面ABC的距离最大，

由题可求得此时顶点D到平面ABC的距离为$h=5$，

设球的半径为R，则球心O_1到圆心O_2的距离为$d=\sqrt{R^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$，

则$h=\frac{25}{8}$，则球的表面积$S=4\pi R^2=\frac{625}{16}\pi$．

故选D．

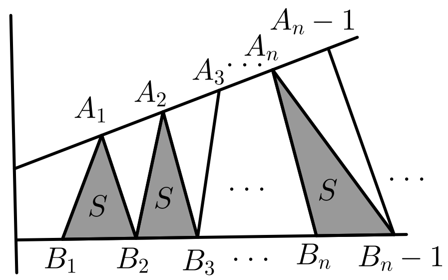
标注 【题型】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的概念 > 简单几何体或组合体求体积、表面积问题

【题型】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的内切球、外接球问题

【知识点】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的体积、表面积 > 空间几何体的表面积

【知识点】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的体积、表面积 > 空间几何体的体积

14 如图，点列$\{A_n\}$、$\{B_n\}$分别在某锐角的两边上且$|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|$，$A_n\neq A_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，$|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|$，$B_n\neq B_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，（$P\neq Q$表示点$P$与$Q$不重合），若$d_n=|A_nB_n|$，$S_n$为$\triangle A_nB_nB_{n+1}$的面积，则（　　）．



A. $\{S_n\}$是等差数列　　B. $\{S_n^2\}$是等差数列　　C. $\{d_n\}$是等差数列　　D. $\{d_n^2\}$是等差数列

答案 A

解析 设锐角的顶点为O，$|OA_1|=a$，$|OB_1|=b$，

$|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|=b$，$|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|=d$，

由于a，b不确定，则$\{d_n\}$不一定是等差数列，

$\{d_n^2\}$不一定是等差数列，

设$\triangle A_nB_nB_{n+1}$的底边B_nB_{n+1}上的高为h_n，

由三角形的相似可得$\frac{h_n}{h_{n+1}}=\frac{OA_n}{OA_{n+1}}=\frac{a+(n-1)b}{a+nb}$，$\frac{h_{n+2}}{h_{n+1}}=\frac{OA_{n+2}}{OA_{n+1}}=\frac{a+(n+1)b}{a+nb}$，

两式相加可得，$\frac{h_n+h_{n+2}}{h_{n+1}}=\frac{2a+2nb}{a+nb}=2$，

即有$h_n+h_{n+2}=2h_{n+1}$，

由$S_n=\frac{1}{2}d\cdot h_n$，可得$S_n+S_{n+2}=2S_{n+1}$，

即为$S_{n+2}-S_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

则数列$\{S_n\}$为等差数列．

标注 【知识点】 数列 > 数列的概念 > 数列的函数特性

【知识点】 数列 > 等差数列 > 等差数列的概念通项公式

【题型】 数列 > 等差数列 > 等差数列的判定与证明问题

二、填空题（本大题共4题，每小题5分，共20分）

15 不等式$\frac{x+2}{x-1}<0$的解集为 ______ ．

答案 $\{x|-2<x<1\}$

解析 $\frac{x+2}{x-1}<0\Rightarrow(x+2)(x-1)<0\Rightarrow-2<x<1$．

标注 【知识点】 不等式 > 解不等式 > 分式不等式

【知识点】 不等式 > 解不等式 > 一元二次不等式

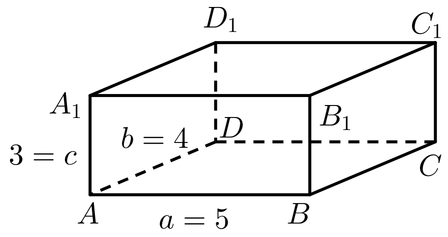
【题型】 不等式 > 解不等式 > 解一元二次不等式

【题型】 不等式 > 解不等式 > 解分式不等式

16 长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的同一顶点的三条棱长分别为3、4、5，则该长方体的外接球表面积为 ______ ．

答案 50π

解析 $\because$长方体的外接球的球心在长方体的体对角线交点处，



故有其外接球半径$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+4^2+3^2}=\frac{\sqrt{50}}{2}$.

故外接球表面积为$4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{50}{4}=50\pi$.

故答案为：50π .

标注 【知识点】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的体积、表面积 > 空间几何体的表面积

【题型】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的概念 > 简单几何体或组合体求体积、表面积问题

【题型】 立体几何初步 > 基本立体图形 > 空间几何体的内切球、外接球问题

17 已知数列满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$,（$n\in\mathbf{N}^*$），若$b_{n+1}=(n-\lambda)\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，$b_1=-\lambda$，且数列$\{b_n\}$是单调递增数列，则实数λ的取值范围为 ______ .

答案 $\lambda<2$

解析 $\because$数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，

$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$ ，（$n\in\mathbf{N}^*$），

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$，

化为$\frac{1}{a_n+1}+1=2\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$ ，

$\therefore$数列$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是等比数列，

首项为$\frac{1}{a_1}+1=2$，公比为2，

$\therefore\frac{1}{a_n}+1=2^n$ ，

$\therefore b_{n+1}=(n-\lambda)\left(\frac{1}{a_n}+1\right)=(n-\lambda)\cdot 2^n$ ，

$\because b_1=-\lambda$ ，

且数列$\{b_n\}$是单调递增数列，

$\therefore b_{n+1}>b_n$ ，

$\therefore (n-\lambda)\cdot 2^n>(n-1-\lambda)\cdot 2^{n-1}$ ，

化为$\lambda<n+1$ ，

$\because$数列$\{n+1\}$为单调递增数列，

$\therefore \lambda<2$.

$\therefore$实数λ的取值范围为$\lambda<2$.

标注 【题型】 数列 > 数列的概念 > 数列的函数特性问题 > 数列与不等式综合问题

【知识点】 数列 > 数列的概念 > 数列的函数特性

18 在锐角三角形ABC中，$\sin A=2\sin B\sin C$ ，则$\tan A\tan B\tan C$的最小值是 ______ .

答案 8

解析 方法一：由$\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ ，$\sin A=2\sin B\sin C$ ，

可得$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$（ * ） ，

由三角形ABC为锐角三角形，则$\cos B>0$ ，$\cos C>0$ ，

在（ * ）式两侧同时除以$\cos B\cos C$可得$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ ，

又$\tan A=-\tan(\pi-A)=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$（ # ） ，

则$\tan A\tan B\tan C=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}\times\tan B\tan C$ ，

由$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$可得$\tan A\tan B\tan C=-\frac{2(\tan B\tan C)^2}{1-\tan B\tan C}$ ，

令$\tan B\tan C=t$ ，由A ，B ，C为锐角可得$\tan A>0$ ，$\tan B>0$ ，$\tan C>0$ ，

由（ # ）得$1-\tan B\tan C<0$ ，解得$t>1$ ，

$\tan A\tan B\tan C=-\frac{2t^2}{1-t}=-\frac{2}{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}}$ ，

$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ ，由$t>1$则$0>\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\geqslant-\frac{1}{4}$ ，因此$\tan A\tan B\tan C$最小值为8 ，

当且仅当$t=2$时取到等号，此时$\tan B+\tan C=4$ ，$\tan B\tan C=2$ ，

解得$\tan B=2+\sqrt{2}$，$\tan C=2-\sqrt{2}$，$\tan A=4$（或$\tan B$，$\tan C$互换），

此时A，B，C均为锐角．

方法二：由$\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，$\sin A=2\sin B\sin C$，

可得$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$（*），

由三角形ABC为锐角三角形，则$\cos B>0$，$\cos C>0$，

在（*）式两侧同时除以$\cos B\cos C$可得$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，

又$\tan A=-\tan(\pi-A)=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$（#），

则$\tan A\tan B\tan C=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}\times\tan B\tan C$，

由$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$可得：

$\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2(\tan B\tan C)^2}{\tan B\tan C-1}$

$=2(\tan B\cdot\tan C-1+\dfrac{1}{\tan B\cdot\tan C-1}+2)\geqslant 8$，

当$\tan B\cdot\tan C=2$时，上式等号成立.

标注 【知识点】解三角形 > 解三角形的应用

【题型】三角函数 > 三角函数的图象与性质 > 正弦型函数 > 三角函数图像与性质问题

【题型】解三角形 > 正余弦定理的综合应用 > 边角互化问题

19 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a^2=b^2+2bc\sin A$，$0<A<\dfrac{\pi}{2}$，则$\tan A-4\tan B$的最小值为______．

答案 $-\dfrac{1}{2}$

解析 由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$及$a^2=b^2+2bc\sin A$，

得$c^2-2bc\cos A=2bc\sin A$，

即$c-2bc\cos A=2b\sin A$，

再由正弦定理，得$\sin C-2\sin B\cos A=2\sin B\sin A$，

即$\sin A+B-2\sin B\cos A=2\sin B\sin A$，

即$\sin A\cos B-\cos A\sin B=2\sin B\sin A$，

所以$\tan A-\tan B=2\tan A\tan B$，

所以$\tan B=\dfrac{\tan A}{2\tan A+1}$，

所以$\tan A-4\tan B=\tan A-\dfrac{4\tan A}{2\tan A+1}$

$=\dfrac{1}{2}(2\tan A+1)+\dfrac{2}{2\tan A+1}-\dfrac{5}{2}$

$\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{2}(2\tan A+1)\times\dfrac{2}{2\tan A+1}}-\dfrac{5}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}$，

当且仅当$\dfrac{1}{2}(2\tan A+1)=\dfrac{2}{2\tan A+1}$，

即$\tan A=\dfrac{1}{2}$时等号成立，

所以$\tan A-4\tan B$的最小值为$-\dfrac{1}{2}$．

故答案为$-\dfrac{1}{2}$．

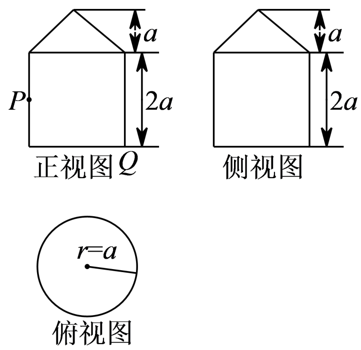
标注 【题型】解三角形 > 正余弦定理的综合应用 > 边角互化问题

【知识点】解三角形 > 正弦定理

【知识点】不等式 > 基本不等式 > 基本不等式的概念

三、解答题（本大题共6题，共70分）

20 已知一个几何体的三视图如图所示．



（1）求此几何体的表面积．

（2）如果点P，Q在正视图中所示位置：P为所在线段中点，Q为顶点，求在几何体表面上，从P点到Q点的最短路径的长．

答案 （1）$(5+\sqrt{2})\pi a^2$．

（2）$a\sqrt{1+\pi^2}$．

解析 （1）由三视图可知：此几何体是一个圆锥加一个圆柱，

其表面积是圆锥的侧面积、圆柱的侧面积和圆柱的一个底面积之和，

底面圆半径长为a，圆柱高为$2a$，圆锥高为a .

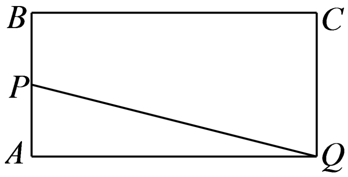
$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}(2\pi a)\cdot(\sqrt{2}a)=\sqrt{2}\pi a^2$,

$S_{圆柱侧}=(2\pi a)\cdot(2a)=4\pi a^2$,

$S_{圆柱底}=\pi a^2$,

$\therefore S_{表面积}=\sqrt{2}\pi a^2+4\pi a^2+\pi a^2=(5+\sqrt{2})\pi a^2$.

（2）沿P点与Q点所在母线剪开圆柱侧面，如图：



则$PQ=\sqrt{AP^2+AQ^2}=\sqrt{a^2+(\pi a)^2}=a\sqrt{1+\pi^2}$,

故从P点到Q点在侧面上的最短路径的长为$a\sqrt{1+\pi^2}$.

标注 【知识点】立体几何初步 > 基本立体图形 > 三视图

【知识点】立体几何初步 > 基本图形位置关系 > 空间中的基本事实与定理 > 点、直线、平面之间的位置关系

【题型】立体几何初步 > 基本立体图形 > 计算多面体和旋转体表面上的最短距离

【题型】立体几何初步 > 基本立体图形 > 三视图问题 > 利用三视图求面积

21 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知$\tan(\frac{\pi}{4}+A)=2$.

（1）求$\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}$的值 .

（2）若$B=\frac{\pi}{4}$，$a=3$，求$\triangle ABC$的面积.

答案 （1）$\frac{2}{5}$.

（2）9 .

解析 （1）由$\tan(\frac{\pi}{4}+A)=2$，，得$\tan A=\frac{1}{3}$，所以$\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}=\frac{2\tan A}{2\tan A+1}=\frac{2}{5}$.

（2）由$\tan A=\frac{1}{3}$，$A\in(0,\pi)$，得$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 又由$B=\frac{\pi}{4}$，$a=3$及正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin \mathrm{B}}$，得$b=3\sqrt{5}$，又$\sin C=\sin(A+B)=\sin(A+\frac{\pi}{4})\Rightarrow\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

则△ABC的面积为：$\frac{1}{2}ab\sin C=9$．

标注 【题型】三角函数 > 三角恒等变换 > 利用和差角公式化简求值

【题型】三角函数 > 三角恒等变换 > 倍角、半角公式问题

【题型】三角函数 > 三角函数的概念 > 任意角的三角函数 > 同角三角函数的基本关系式的化简和求值

【题型】解三角形 > 正余弦定理的简单应用 > 三角形面积计算问题

【题型】解三角形 > 正余弦定理的简单应用 > 利用正、余弦定理求解边角

【知识点】解三角形 > 三角形面积公式

【知识点】解三角形 > 正弦定理

【知识点】三角函数 > 三角恒等变换 > 和差角公式 > 两角和与差的正切

【知识点】三角函数 > 三角恒等变换 > 二倍角公式 > 二倍角的正弦

【知识点】三角函数 > 三角函数的概念 > 任意角的三角函数 > 同角三角函数的基本关系式

22 已知向量$\overrightarrow{a}=\left(-2\cos^2x,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{b}=(1,\sin 2x)$，函数$f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+1$．

（1）求函数$f(x)$的最小正周期以及单调递增区间．

（2）设△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$c=3$，$f(C)=2$，若$\sin(A+C)=2\sin A$，求a、b的值．

答案 （1）函数$f(x)$最小正周期为π；单调递增区间$\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$(k\in\mathbf{Z})$．

（2）$a=\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}$．

解析 （1）$f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+1=1\times\left(-2\cos^2x\right)+\sqrt{3}\times\sin 2x+1$

$=(-1)-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore$最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$．

由$\sin x$的图象和性质，可知$x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$(k\in\mathbf{Z})$是增区间，

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$是增区间，

解得：$k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$(k\in\mathbf{Z})$，

所以，$f(x)$的单调增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$(k\in\mathbf{Z})$．

（2）$f(C)=2\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=2$，

$\therefore \sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\because 0<C<\pi$，

$\therefore 0<2C<2\pi$，

$\therefore -\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，

$\therefore 2C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，

$\because \sin(A+C)=2\sin A$，

$\therefore \sin B=2\sin A$，

由正弦定理，$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$，①

$\because$由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$，即$a^2+b^2-ab=9$，②

$\therefore$联立①、②解得$a=\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}$．

标注 【知识点】三角函数 > 三角函数的图象与性质 > 正弦型函数 > 正弦型函数的图象与性质

【知识点】解三角形 > 正弦定理

【知识点】解三角形 > 余弦定理

【题型】解三角形 > 正余弦定理的简单应用 > 利用正、余弦定理求解边角

【题型】三角函数 > 三角函数的图象与性质 > 正弦型函数 > 正弦型三角函数图像与性质问题

23 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$，数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1$，点$P(b_n,b_{n+1})$在直线$x-y+2=0$上，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

（2）设$c_n=\frac{b_n}{a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

答案 （1）$a_n=3^{n-1}$，$b_n=2n-1$．

（2）$T_n=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$．

解析 （1）由$a_{n+1}=2S_n+1$可得$a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，

两式相减得$a_{n+1}-a_n=2a_n$，

$a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$．

又$a_2=2S_1+1=3$，

所以$a_2=3a_1$．

故$\{a_n\}$是首项为1，公比为3的等比数列．

所以$a_n=3^{n-1}$．

由点$P(b_n,b_{n+1})$在直线$x-y+2=0$上，所以$b_{n+1}-b_n=2$．

则数列$\{b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列．

则$b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$．

（2）因为$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{2n-1}{3^{n-1}}$，所以$T_n=\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{3}{3^1}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^{n-1}}$．

则$\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots\dfrac{2n-3}{3^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{3^n}$，

两式相减得：$\dfrac{2}{3}T_n=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{2}{3^{n-1}}-\dfrac{2n-1}{3^n}$．

所以$T_n=3-\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=3-\dfrac{n+1}{3^{n-1}}$．

标注　【知识点】数列 > 数列的概念 > 数列的前n项和

【知识点】数列 > 等差数列 > 等差数列的概念通项公式

【知识点】数列 > 等比数列 > 等比数列的概念通项公式的意义

【题型】数列 > 数列的概念 > 数列求和问题 > 错位相减法求和

【题型】数列 > 数列的概念 > 数列求通项问题 > 利用Sn与an的关系求通项

24 建设生态文明是关系人民福祉、关乎民族未来的大计，是实现中国梦的重要内容．习近平指出："绿水青山就是金山银山"．某乡镇决定开垦荒地打造生态水果园区，其调研小组研究发现：一棵水果树的产量ω（单位：千克）与肥料费用$10x$（单位：元）满足如下关系：$\omega(x)=\begin{cases}5x^2+10\,(0\leqslant x\leqslant 2)\\ 40-\dfrac{30}{1+x}(2<x\leqslant 5)\end{cases}$．此外，还需要投入其它成本（如施肥的人工费等）$20x$元．已知这种水果的市场售价为16元/千克，且市场需求始终供不应求．记该棵水果树获得的利润为$f(x)$（单位：元）．

（1）求$f(x)$的函数关系式．

（2）当投入的肥料费用为多少时，该水果树获得的利润最大？最大利润是多少？

答案　（1）$f(x)=\begin{cases}80x^2-30x+160\,(0\leqslant x\leqslant 2)\\ 640-\dfrac{480}{1+x}-30x\,(2<x\leqslant 5)\end{cases}$．

（2）投入肥料费为30元时利润最大，最大利润为430元．

解析 （1） $f(x)=16\omega(x)-2x-x=\begin{cases}80x^2-30x+160\,(0\leqslant x\leqslant 2)\\ 640-\dfrac{480}{1+x}-30x\,(2<x\leqslant 5)\end{cases}$.

（2）当$0\leqslant x\leqslant 2$时，$f(x)_{\max}=f(2)=420$

当$2<x\leqslant 5$时，$f(x)=670-30\left[\dfrac{16}{x+1}+(x+1)\right]\leqslant 670-60\sqrt{\dfrac{16}{x+1}(x+1)}=450$

当且仅当$\dfrac{16}{x+1}=x+1$时，即$x=3$时，等号成立．

故当投入肥料费为30元时，种植该果树的最大利润为430元．

标注 【知识点】 不等式 > 基本不等式 > 基本不等式成立的条件

【知识点】 函数 > 函数的应用 > 函数的实际应用

【题型】 不等式 > 基本不等式 > 利用均值不等式求最值

【题型】 不等式 > 基本不等式 > 均值不等式应用条件

【题型】 函数 > 函数的应用 > 函数的模型及其应用问题 > 分段函数模型

25 设正数列$\{a_n\}$的前$\{a_n\}$项和为S_n，且$2\sqrt{S_n}=a_n+1$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若数列$b_n=\dfrac{a_n+3}{2}$，设T_n为数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项的和，求$T_n$．

（3）$T_n\leqslant\lambda b_{n+1}$对一切$n\in\mathbf{N}^*$恒成立．求$\lambda$的最小值．

答案 （1）$2n-1$．

（2）$\dfrac{n}{2n+4}$．

（3）$\dfrac{1}{16}$．

解析 （1）$\because 2\sqrt{S_n}=a_n+1\quad\therefore a_n=2\sqrt{S_n}-1$．

$\therefore S_n=S_{n-1}+a_n=S_{n-1}+2\sqrt{S_n}-1$．

即$\sqrt{S_{n-1}}=\sqrt{S_n}-1\Rightarrow\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$．

$\because a_1=2\sqrt{a_1}+1$　解得$a_1=1$．

$\therefore\sqrt{S_n}=1+n-1=n\quad\therefore S_n=n^2$．

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$．

（2）$b_n=\dfrac{a_n+3}{2}=n+1$．

$\therefore\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$．

$T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$.

（3）$T_n\leqslant\lambda b_{n+1}$对一切$n\in\mathbf{N}^*$成立．

即$\frac{n}{2n+4}\leqslant\lambda\cdot(n+2)$ ．

$\therefore\lambda\geqslant\frac{n}{2\left(n^2+4n+4\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+\frac{4}{n}+4}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n\cdot\frac{4}{n}}+4}=\frac{1}{16}$ ．

当且仅当$n=2$且$\neq$取等号．

$\therefore\lambda$最小值为$\frac{1}{16}$ ．

标注 【知识点】 不等式 > 基本不等式 > 基本不等式成立的条件

【知识点】 数列 > 数列的概念 > 数列的前n项和

【知识点】 数列 > 数列的概念 > 数列的函数特性

【题型】 不等式 > 解不等式 > 不等式中的恒成立与存在性问题

【题型】 数列 > 数列的概念 > 数列求和问题 > 裂项相消法求和

【题型】 数列 > 数列的概念 > 数列的函数特性问题 > 数列与不等式综合问题