武汉 11 中 2017 年分配生考试数学试题

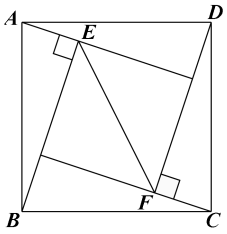
一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.用[x]表示不超过 x 的最大整数，把 x－[x]称为 x 的小数部分.已知 t=$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，a 是 t 的小数部分，b 是－t 的小数部分，则$\frac{1}{2b}-\frac{1}{a}$=（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

2.如图，在正方形 ABCD 中，△ABE 和△CDF 为直角三角形，∠AEB=∠CFD=90°，AE=CF=5，BE=DF=12，则 EF 的长是（　　）

A. 7　　B. 8　　C. $7\sqrt{2}$　　D. $7\sqrt{3}$



3.有两个一元二次方程 M：$ax^2+bx+c=0$，N: $cx^2+bx+a=0$，其中 $a\times c\neq 0$，$a\neq c$；以下四个结论中错误的是（　　）

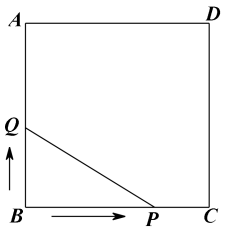
A. 如果方程 M 有两个不相等的实数根，那么方程 N 也有两个不相等的实数根

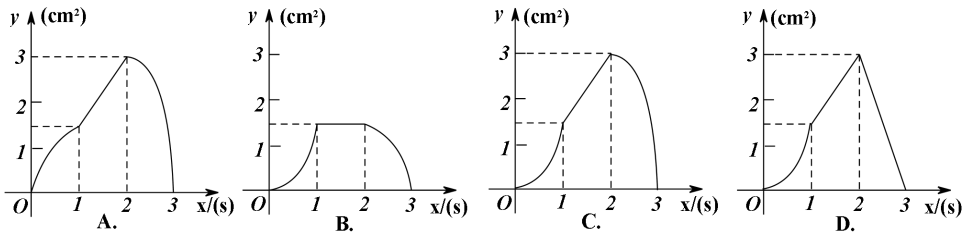
B. 如果方程 M 有两根符号相同，那么方程 N 的两根符号也相同

C. 如果 5 是方程 M 的一个根，那么$\frac{1}{5}$是方程 N 的一个根

D. 如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根，那么这个根必是 x=1

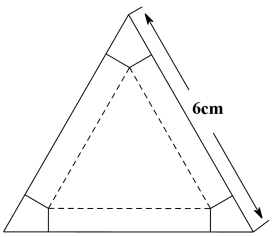
4.如图，正方形 ABCD 的边长为 3cm,动点 P 从 B 点出发以 3cm/s 的速度沿着边 BC-CD-DA 运动，到达 A 点停止运动；另一动点 Q 同时从 B 点出发，以 1cm/s 的速度沿着边 BA 向 A 点运动，到达 A 点停止运动.设 P 点运动时间为 x（s），△BPQ 的面积为 y（cm²）,则 y 关于 x 的函数图像是（　　）





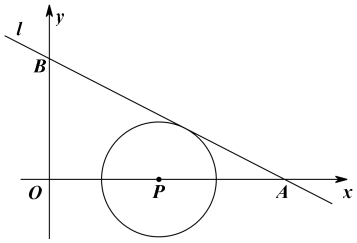
5.如图，有一块边长为 6cm 的正三角形纸板，在它的三个角处分别截去一个彼此全等的等形，再沿图中的虚线折起，做成一个无盖的直三棱柱纸盒，则该纸盒侧面积的最大值是（　　）

A. $\sqrt{3}$ cm²　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm²　　C. $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm²　　D. $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ cm²



6.我们将在直角坐标系中圆心坐标和半径均为整数的圆称为“整圆”.如图，直线 l：y=kx+ $4\sqrt{3}$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B，∠OAB=30°，点 P 在 x 轴上，圆 P 与 l 相切，当 P 在线段 OA 上运动时，使得圆 P 成为整圆的点 P 个数是（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12



7.设实数 x、y、z 满足 x+y+z=1，则 M=xy+2yz+3xz 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

8.一个五位数的自然数 $\overline{abcde}$ 称为“凸”数，当且仅当它满足 a＜b＜c,c＞d＞e（如 12430,13531 等），则在所有的五位数中“凸”数的个数是（　　）

A. 8568　　B. 2142　　C. 2139　　D. 1134

二、解答题（本大题共 8 小题，共 80 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

9.（本题满分 10 分）已知△ABC 的顶点 A、C 在反比例函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$（$x>0$）的图像上，∠ACB=90°，∠ABC=30°，AB⊥x 轴，点 B 在点 A 的上方，且 AB=6，求点 C 的坐标.

10.（本题满分 10 分）有位学生忘记写两个三位数间的乘号，得到一个六位数，这个六位数恰好为原来两个三位数的乘积的 3 倍，求这个六位数.

11.（本题满分 10 分）设 a,b 是任意两个实数，规定 a 与 b 之间的一种运算“⊕”为：$a\oplus b=\begin{cases}\frac{b}{a}(a>0)\\ a-b(a\ \ 0)\end{cases}$,例如：

$1\oplus 3=\frac{-3}{1}=-3$，$(-3)\oplus 2=(-3)\ -2=-5$, $(x^2+1)\oplus(x-1)=\frac{x-1}{x^2+1}$(因为 $x^2+1>0$).

参考上面材料，解答下列问题：

（1）$2\oplus 4=$_____,$(-2)\oplus 4=$_____；

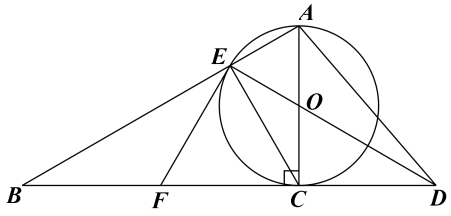
（2）若 $x>\frac{1}{2}$,且满足$(2x-1)\oplus(4x^2-1)=(-4)\oplus(1-4x)$，求 x 的值.

12.（本题满分 10 分）已知正实数 x,y,z 满足：$xy+yz+zx\neq 1$,且 $\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}+\frac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz}+\frac{(z^2-1)(x^2-1)}{zx}=4$.

（1）求 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$ 的值.

（2）证明：$9(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz(xy+yz+zx)$.

13.（本题满分 10 分）如图，以 $Rt\Delta ABC$ 的 AC 边为直径作 $\odot O$ 交斜边 AB 于点 E，连接 EO 并延长交 BC 的延长线于点 D，点 F 为 BC 的中点，连接 EF.（1）求证：EF 是 $\odot O$ 的切线；（2）若 $\odot O$ 的半径为 3，∠EAC=60°，求 AD 的长.



14.（本题满分 10 分）提高长江大桥车辆的通行能力可改善整个城市的交通状况.在一般情况下，大桥上的车流速度 v（单位：千米/小时）是车流密度 x（单位：辆/千米）的函数.当桥上的车流密度达到 200 辆/千米时，造成堵塞，此时车流速度为 0；当车流密度不超过 20 辆/千米时，车流速度为 60 千米/时.研究表明:当 $20<x\leqslant 200$ 时，车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.

（1）当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时，求函数 v(x)的表达式；

（2）当车流密度 x 为多大时，车流量（单位时间内通过桥上某观测点的车辆数，单位：辆/时）$f(x)=x\cdot v(x)$可以达到最大，并求出最大值（精确到 1 辆/时）.

15.（本题满分 10 分）已知点 O 为正方形 ABCD 的中心，M 为射线 OD 上一动点（M 与点 O，D 不重合），以线段 AM 为一边作正方形 AMEF，连接 FD.

（1）当点 M 在线段 OD 上时（如图 1），线段 BM 与 DF 有怎样的数量及位置关系？请判断并直接写出结果；

（2）当点 M 在线段 OD 的延长线上时（如图 2），（1）中的结论是否仍然成立？请结合图 2 说明理由.

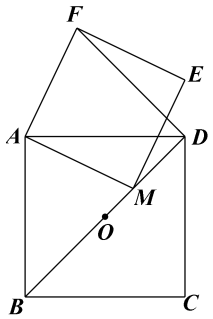


图1

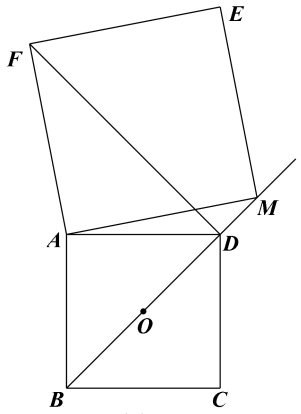


图2

16.（本题满分 10 分）如图 1，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过 A（－1,0）,B（4,0）两点，与 y 轴相交于点 C，连接 BC，点 P 为抛物线上一动点，过点 P 作 x 轴的垂线 l，交直线 BC 于点 G，交 x 轴于点 E.（1）求抛物线的解析式；（2）当 P 位于 y 轴右边的抛物线上运动时，过点 C 作 CF⊥直线 l，F 为垂足，当 P 运动到何处时，以 P，C，F 为顶点的三角形与△OBC 相似？并求出此时点 P 的坐标；（3）如图 2，当点 P 在位于直线 BC 上方的抛物线上运动时，连接 PC，PB，请问△PBC 的面积 S 能否取得最大值？若能，请求出最大面积 S，并求出此时点 P 的坐标，若不能，请说明理由.

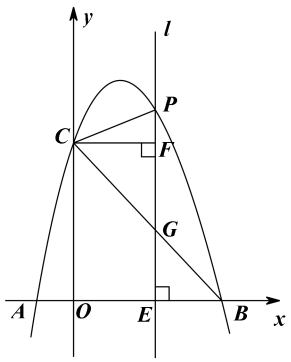


图1

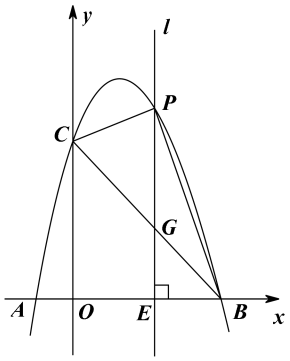


图2

1.

【解析】$\because t=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3},1<\sqrt{3}<2,\ \therefore 3<2+\sqrt{3}<4,$ 即$3<t<4,$

$\therefore a=t-3=\sqrt{3}-1.$ 又 $-t=-2-\sqrt{3},-2<-\sqrt{3}<-1,$ $\therefore -4<-2-\sqrt{3}<-3,$

$\therefore b=-t-(-4)=2-\sqrt{3},\ \therefore \dfrac{1}{2b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2(2-\sqrt{3})}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=\dfrac{1}{2},$ 故选 A.

2.C 3.D

4.C

试题解析：由题意可得BQ=x．

①0≤x≤1时，P点在BC边上，BP=3x，

则△BPQ的面积=$\dfrac{1}{2}$ BP•BQ，

解y=$\dfrac{1}{2}$ ×3x×x=$\dfrac{3}{2}$ x²；故A选项错误；

②1＜x≤2时，P点在CD边上，

则△BPQ的面积=$\dfrac{1}{2}$ BQ•BC，

解y=$\dfrac{1}{2}$ •x•3=$\dfrac{3}{2}$ x；故B选项错误；

③2＜x≤3时，P点在AD边上，AP=9-3x，

则△BPQ的面积=$\dfrac{1}{2}$ AP•BQ，

解y=$\dfrac{1}{2}$ •（9-3x）•x=$\dfrac{9}{2}$ x-$\dfrac{3}{2}$ x²；故D选项错误．

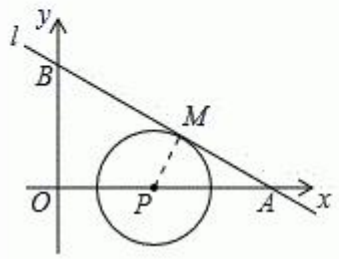
故选C．

5.C

试题分析：设盒子高为 x cm，侧面积为 y cm²，根据条件可得：等形的长边为 $\sqrt{3}x$ cm，盒子的底边长为（6-2$\sqrt{3}x$ ）cm，侧面积：$3x(6-2\sqrt{3}x$ cm²，所以 $y=3x(6-2\sqrt{3}x)=-6\sqrt{3}x^2+18x$ ，所以当 $x=-\dfrac{18}{-12\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$y_{最大}=\dfrac{-18^2}{-24\sqrt{3}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ ，故选：C．

6. A

试题分析：∵直线l：$y=kx+4\sqrt{3}$ 与x轴、y轴分别交于A、B，∴B（0，$4\sqrt{3}$），∴OB=$4\sqrt{3}$，在RT△AOB中，∠OAB=30°，∴OA=$\sqrt{3}$ OB=$\sqrt{3}\times4\sqrt{3}$ =12，∵⊙P与l相切，设切点为M，连接PM，则PM⊥AB，∴PM=$\frac{1}{2}$ PA，设P（x，0），∴PA=12－x，∴⊙P的半径PM=$\frac{1}{2}$ PA=$6-\frac{1}{2}x$，∵x为整数，PM为整数，∴x可以取0，2，4，6，8，10，共6个数，∴使得⊙P成为整圆的点P个数是6．故选A．



7.C

【解析】

$$M=xy+(2y+3x)z=xy+(2y+3x)(1-x-y)=-3x^2-4xy-2y^2+3x+2y$$

$$=-2\left[y^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)y+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]-3x^2+3x+2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=-2\left(y+x-\frac{1}{2}\right)^2-x^2+x+\frac{1}{2}=-2\left(y+x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}$$

当且仅当$x=\frac{1}{2},y=0$时，M 取等号，故$M_{\max}=\frac{3}{4}$，故选 C.

8. B

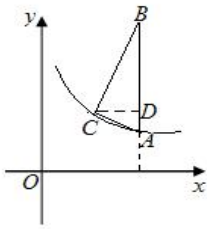
9.【解析】如图，过点C作$CD\perp AB$于点D.

在$Rt\Delta ACB$中，$BC=AB\cdot\cos\angle ABC=3\sqrt{3}$

在$Rt\Delta BCD$中，$CD=BC\cdot\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2},$

$BD=BC\cdot\cos B=\frac{9}{2},\therefore AD=AB-BD=\frac{3}{2}$，设$C\left(m,\frac{\sqrt{3}}{m}\right),A\left(n,\frac{\sqrt{3}}{n}\right)$，

依题意知$n>m>0,$故$CD=n-m,AD=\frac{\sqrt{3}}{m}-\frac{\sqrt{3}}{n}$，于是



$\begin{cases} n-m=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{m}-\dfrac{\sqrt{3}}{n}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ n=2\sqrt{3} \end{cases}$，故点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$.

10.【解析】设两个三位数分别为 x,y，则 $1000x+y=3xy$，①

$\therefore y=3xy-1000x=(3y-1000)x$, 故 y 是 x 的正整数倍，不妨设 $y=tx$（t 为正整数），代入①得

$1000+t=3tx,\ \therefore x=\dfrac{1000+t}{3t}$, $\because x$ 是三位数，$\therefore x=\dfrac{1000+t}{3t}\geq 100$，解得

$t\leq\dfrac{1000}{299}$, $\because t$ 为正整数，$\therefore t$ 的可能取值为 $1,2,3$. 验证可知，只有 $t=2$ 符合，此时

$x=167,y=334$. 故所求的六位数为 167334.

11. 解：（1）2⊕4=$\dfrac{4}{2}$=2，（﹣2）⊕4=﹣2﹣4=﹣6；

（2）∵x>$\dfrac{1}{2}$，∴（2x﹣1）⊕（$4x^2$﹣1）=（﹣4）⊕（1﹣4x），

即$\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$=﹣4﹣（1﹣4x），$\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$=4x﹣5，$4x^2$﹣1=（4x﹣5）（2x﹣1），

$4x^2$﹣1=$4x^2$﹣14x+5，$2x^2$﹣7x+3=0，（2x﹣1）（x﹣3）=0，解得 x_1=$\dfrac{1}{2}$，x_2=3.

经检验，x_1=$\dfrac{1}{2}$是增根，x_2=3 是原方程的解，故 x 的值是 3．故答案为：2，﹣6.

12.【解析】（1）解：由等式 $\dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}+\dfrac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz}+\dfrac{(z^2-1)(x^2-1)}{zx}=4$，

去分母得 $z(x^2-1)(y^2-1)+x(y^2-1((z^2-1)+y(z^2-1)(x^2-1)=4xyz$ ，

$x^2y^2z+xy^2z^2+x^2yz^2-\left[x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+3xyz\right]+(x+y+z)-xyz=0,$

$xyz(xy+yz+zx)-(x+y+z)(xy+yz+zx)+(x+y+z)-xyz=0$ ，

$\therefore[xyz-(x+y+z)](xy+yz+zx-1)=0$ ，$\because xy+yz+zx\neq 1,\therefore xy+yz+zx-1\neq 0$ ，

$\therefore xyz-(x+y+z)=0,\ \therefore xyz=x+y+z$ ，$\therefore$ 原式=$\dfrac{x+y+z}{xyz}=1.$

（2）证明：由（1）得计算过程知$\therefore xyz = x + y + z$，又$\because x, y, z$为正实数，

$$\therefore 9(x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz(xy+yz+zx)$$

$$= 9(x+y)(y+z)(z+x) - 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$= x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) - 6xyz$$

$$= x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0.$$

$$\therefore 9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz(xy+yz+zx) .$$

【注：$(x+y)(y+z)(z+x) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 2xyz$

$$= x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) + 2xyz$$

$(x+y+z)(xy+yz+zx) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 3xyz$

$$= x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) + 3xyz$$ 】

13.证明：（1）如图 1，连接 FO，∵F 为 BC 的中点，AO=CO，∴OF∥AB，
∵AC 是⊙O 的直径，∴CE⊥AE，
∵OF∥AB，∴OF⊥CE，∴OF 所在直线垂直平分 CE，
∴FC=FE，OE=OC，∴∠FEC=∠FCE，∠0EC=∠0CE，
∵∠ACB=90°，即：∠0CE+∠FCE=90°，∴∠0EC+∠FEC=90°，即：∠FEO=90°，∴FE 为⊙O 的切线；

（2）如图 2，∵⊙O 的半径为 3，∴AO=CO=EO=3，
∵∠EAC=60°，OA=OE，∴∠EOA=60°，∴∠COD=∠EOA=60°，
∵在 Rt△OCD 中，∠COD=60°，OC=3，∴CD=$3\sqrt{3}$，
∵在 Rt△ACD 中，∠ACD=90°，CD=$3\sqrt{3}$，AC=6，∴AD=$3\sqrt{7}$.

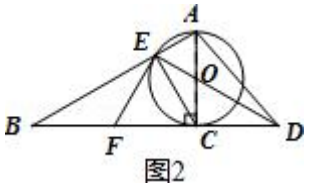


图2

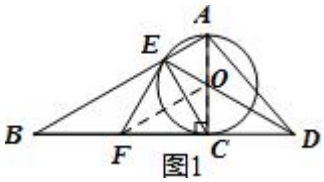


图1

.

（1）BM=DF，BM⊥DF

理由是：∵四边形ABCD、AMEF是正方形，

∴AF=AM，AD=AB，∠FAM=∠DAB=90°，

∴∠FAM-∠DAM=∠DAB-∠DAM，

即∠FAD=∠MAB，

∵在△FAD和△MAB中

$$\begin{cases} AF=AM \\ \angle FAD=\angle MAB \\ AD=AB \end{cases}$$

∴△FAD≌△MAB，

∴BM=DF，∠FDA=∠ABD=45°，

∵∠ADB=45°，

∴∠FDB=45°+45°=90°，

∴BM⊥DF，

即BM=DF，BM⊥DF.

16. 将0），的函式

（2）成立，

理由是：∵四边形ABCD和AMEF均为正方形，

∴AB=AD，AM=AF，∠BAD=∠MAF=90°，

∴∠FAM+∠DAM=∠DAB+∠DAM，

即∠FAD=∠MAB，

∵在△FAD和△MAB中

$$\begin{cases} AF=AM \\ \angle FAD=\angle MAB \\ AD=AB \end{cases}$$

∴△FAD≌△MAB，

∴BM=DF，∠ABM=∠ADF，

由正方形ABCD知，∠ABM=∠ADB=45°，

∴∠BDF=∠ADB+∠ADF=90°，

即BM⊥DF，

∴（1）中的结论仍成立.

解：（1）点A（－1，B（4，0）坐标代入数的表达得：

$$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -16+4b+c=0 \end{cases},$$

解得：b=3，c=4．抛物线的解析式为 $y=-x^2+3x+4$.

（2）如图1所示：

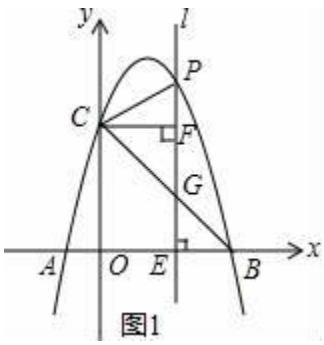


图1

∵令 x=0 得 y=4，　∴OC=4.　∴OC=OB.

∵∠CFP=∠COB=90°，∴FC=PF 时，以 P，C，F 为顶点的三角形与△OBC 相似.

设点 P 的坐标为（a，$-a^2+3a+4$）（a＞0）．则 CF=a，$PF=|-a^2+3a+4-4|=|a^2-3a|$.

∴$|a^2-3a|=a$.　解得：a=2，a=4．∴点 P 的坐标为（2，6）或（4，0）.

（3）如图 2 所示：连接 EC.

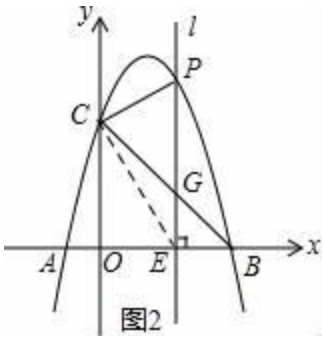


图2

设点 P 的坐标为（a，$-a^2+3a+4$）. 则 OE=a，PE=$-a^2+3a+4$，EB=4－a.

∵$S_{四边形PCEB}=\frac{1}{2}OB\cdot PE=\frac{1}{2}\times4(-a^2+3a+4)$，$S_{\triangle CEB}=\frac{1}{2}EB\cdot OC=\frac{1}{2}\times4\times(4-a)$，

∴$S_{\triangle PBC}=S_{四边形PCEB}-S_{\triangle CEB}=2(-a^2+3a+4)-2(4-a)=-2a^2+8a$.

∵a=－2＜0，

∴当 a=2 时，△PBC 的面积 S 有最大值.

∴P（2，6），△PBC 的面积的最大值为 8.