专题08　解析几何

平面解析几何主要介绍用代数知识研究平面几何的方法．为此，我们要关注：将几何问题代数化，用代数语言描述几何要素及其关系，将几何问题转化为代数问题，处理代数问题，分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题．

在此之中，要不断地体会数形结合、函数与方程及分类讨论等数学思想与方法．要善于应用初中平面几何、高中三角函数和平面向量等知识来解决直线、圆和圆锥曲线的综合问题．

§8－1　直角坐标系

【知识要点】

1．数轴上的基本公式

设数轴的原点为O，A，B为数轴上任意两点，$OB=x_2$，$OA=x_1$，称x_2-x_1叫做向量$\overrightarrow{AB}$的坐标或数量，即数量$AB=x_2-x_1$；数轴上两点A，B的距离公式是

$$d(A，B)=|AB|=|x_2-x_1|.$$

2．平面直角坐标系中的基本公式

设A，B为直角坐标平面上任意两点，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则A，B两点之间的距离公式是$d(A,.B)=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

A，B两点的中点$M(x，y)$的坐标公式是$x=\dfrac{x_1+x_2}{2},y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

3．空间直角坐标系

在空间直角坐标系$O-xyz$中，若$A(x_1，y_1，z_1)$，$B(x_2，y_2，z_2)$，A，B两点之间的距离公式是

$$d(A,B)=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

【复习要求】

1．掌握两点间的距离公式，中点坐标公式；会建立平面直角坐标系，用坐标法(也称为解析法)解决简单的几何问题．

2．了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置，并掌握两点间的距离公式．

【例题分析】

例 1　解下列方程或不等式：

(1) $|x-3|=1$；(2) $|x-3|\leqslant 4$；(3) $1<|x-3|\leqslant 4$.

略解：(1)设直线坐标系上点 A，B 的坐标分别为 x，3，

则 $|x-3|=1$ 表示点 A 到点 B 的距离等于 1，如图 8－1－1 所示，

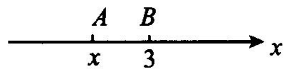


图 8－1－1

所以，原方程的解为 $x=4$ 或 $x=2$.

(2)与(1)类似，如图 8－1－2，

图 8－1－2

则 $|x-3|\leqslant 4$ 表示直线坐标系上点 A 到点 B 的距离小于或等于 4，

所以，原不等式的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 7\}$.

(3)与(2)类似，解不等式 $1<|x-3|$，得解集 $\{x|x>4$，或 $x<2\}$，

将此与不等式 $|x-3|\leqslant 4$ 的解集 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 7\}$ 取交集，

得不等式 $1<|x-3|\leqslant 4$ 的解集为 $\{x|-1\leqslant x<2$，或 $4<x\leqslant 7\}$.

【评析】解绝对值方程或不等式时，如果未知数 x 的次数和系数都为 1，那么可以利用绝对值的几何意义来解绝对值方程或不等式．$|x-a|$ 的几何意义：表示数轴(直线坐标系)上点 $A(x)$ 到点 $B(a)$ 的距离．

例 2　已知矩形 $ABCD$ 及同一平面上一点 P，求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

解：如图 8－1－3，以点 A 为原点，以 AB 为 x 轴，向右为正方向，以 AD 为 y 轴，向上为正方向，建立平面直角坐标系．

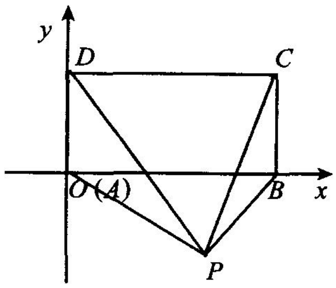


图 8－1－3

设 $AB=a$，$AD=b$，则 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$，

设 $P(x,y)$，

则 $PA^2+PC^2=(\sqrt{x^2+y^2})^2+(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})^2$

$=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$，

$PB^2+PD^2=(\sqrt{(x-a)^2+y^2})^2+(\sqrt{x^2+(y-b)^2})^2$

$=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$，

所以 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

【评析】坐标法是解析几何的一个基本方法,非常重要．坐标法中要注意坐标系的建立，理论上，可以任意建立坐标系，但是坐标系的位置会影响问题解决的复杂程度，适当的坐标系可以使解题过程较为简便．

例 3　已知空间直角坐标系中有两点 $A(1,2,-1)$，$B(2,0,2)$．

(1)求 A，B 两点的距离；

(2)在 x 轴上求一点 P，使 $|PA|=|PB|$；

(3)设 M 为 xOy 平面内的一点，若 $|MA|=|MB|$，求 M 点的轨迹方程．

解：(1)由两点间的距离公式，得 $|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$.

(2)设 $P(a,0,0)$为 x 轴上任一点，由题意得 $\sqrt{(a-1)^2+(0-2)^2+(0+1)^2}$

$=\sqrt{(a-2)^2+0+4}$，

即 $a^2-2a+6=a^2-4a+8$，解得 $a=1$，所以 $P(1,0,0)$.

(3)设 $M(x，y，0)$，则有 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+4}$,

整理可得 $x-2y-1=0$.

所以，M 点的轨迹方程为 $x-2y-1=0$.

【评析】由两点间的距离公式建立等量关系，体现了方程思想的应用.

练习 8－1

一、选择题

1．数轴上三点 A，B，C 的坐标分别为 3，－1，－5，则 $AC+CB$ 等于(　　)

A．－4　　B．4　　C．－12　　D．12

2．若数轴上有两点 $A(x)$，$B(x^2)$(其中 $x\in\mathbf{R}$)，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的数量的最小值为(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．0　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$

3．在空间直角坐标系中，点(1，－2，3)关于 yOz 平面的对称点是(　　)

A．(1，－2，－3)　B．(1，2，3)　C．(－1，－2，3)　D．(－1，2，3)

4．已知平面直角坐标内有三点 $A(-2，5)$，$B(1，-4)$，$P(x，y)$，且 $|AP|=|BP|$，则实数 x，y 满足的方程为(　　)

A．$x+3y-2=0$　　B．$x-3y+2=0$

C．$x+3y+2=0$　　D．$x-3y-2=0$

二、填空题

5．方程 $|x+2|=3$ 的解是______；不等式 $|x+3|\geqslant 2$ 的解为______.

6．点 $A(2，3)$关于点 $B(-4，1)$的对称点为______.

7．方程 $|x+2|-|x-3|=4$ 的解为______.

8．如图 8－1－4，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$|DA|=3$，$|DC|=4$，$|DD_1|=2$，A_1C 的中点为 M，则点 B_1 的坐标是______，点 M 的坐标是______，M 关于点 B_1 的对称点为______.

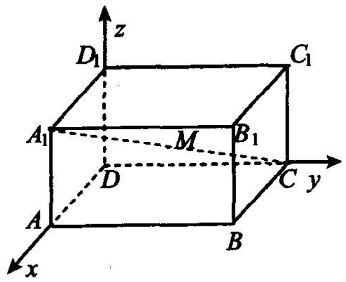


图 8－1－4

三、解答题

9．求证：平行四边形 $ABCD$ 满足 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$.

10．求证：以 $A(4，3，1)$，$B(7，1，2)$，$C(5，2，3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

11．在平面直角坐标系中，设 $A(1，3)$，$B(4，5)$，点 P 在 x 轴上，求$|PA|+|PB|$的最小值.

§8－2　直线的方程

【知识要点】

1．直线方程的概念

如果以一个方程的解为坐标的点都在某条直线上，且这条直线上点的坐标都是这个方程的解，那么这个方程叫做这条直线的方程，这条直线叫做这个方程的直线.

2．直线的倾斜角和斜率

x 轴正向与直线向上的方向所成的角叫做这条直线的倾斜角．并规定，与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为零度角．因此，倾斜角α的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

我们把直线 $y=kx+b$ 中的系数 k 叫做这条直线的斜率．设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$为直线 $y=kx+b$ 上任意两点，其中 $x_1\neq x_2$，则斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

倾斜角为 90° 的直线的斜率不存在，倾斜角为α的直线的斜率 $k=\tan\alpha\,(\alpha\neq 90°)$.

3．直线方程的几种形式

点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$；

斜截式：$y=kx+b$；

两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2, y_1\neq y_2)$;

一般式：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$.

4．两条直线相交、平行与重合的条件

设直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则

(1)l_1 与 l_2 相交$\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 或 $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}(A_2B_2\neq 0)$

(2)l_1 与 l_2 平行$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2-A_2B_1=0,\text{而}B_1C_2-C_1B_2\neq 0\text{或} \\ A_2C_1-A_1C_2\neq 0; \\ \text{或}\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq 0). \end{cases}$

(3)l_1 与 l_2 重合$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1=\lambda A_2, B_1=\lambda B_2, C_1=\lambda C_2(\lambda\neq 0); \\ \text{或}\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq 0). \end{cases}$

当直线 l_1 与 l_2 的斜率存在时，设斜率分别为 k_1，k_2，截距分别为 b_1，b_2，则

l_1 与 l_2 相交$\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；

$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$；

l_1 与 l_2 重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1=b_2$.

5．两条直线垂直的条件

设直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

当直线 l_1 与 l_2 的斜率存在时，设斜率分别为 k_1，k_2，则 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

6．点到直线的距离

点 $P(x_1，y_1)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 d 的计算公式 $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$．

【复习要求】

1．理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式．根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式：点斜式、两点式及一般式，体会斜截式与一次函数的关系．

2．掌握两条直线平行与垂直的条件，点到直线的距离公式．能够根据直线的方程判断两条直线的位置关系，能用解方程组的方法求两直线的交点坐标．

【例题分析】

例 1(1)直线 $x+\sqrt{2}y-8=0$ 的斜率是______，倾斜角为______；

(2)设 $A(2，3)$，$B(-3，2)$，$C(-1，-1)$，过点 C 且斜率为 k 的直线 l 与线段 AB 相交，则斜率 k 的取值范围为______．

略解：(1)直线 $x+\sqrt{2}y-8=0$ 可以化简为 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{8\sqrt{2}}{2}$，

所以此直线的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，倾斜角 $\alpha=\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(2)如图 8－2－1，设直线 AC 的倾斜角为α，

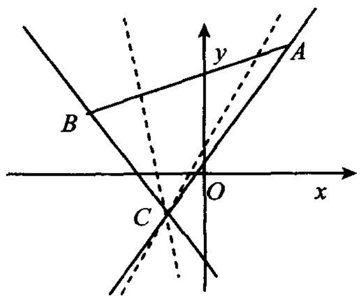


图 8－2－1

因为此直线的斜率为 $k_{AC}=\dfrac{3+1}{2+1}=\dfrac{4}{3}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$;

设直线 BC 的倾斜角为β，因为此直线的斜率为 $k_{BC}=\dfrac{2+1}{-3+1}=-\dfrac{3}{2}$,

所以 $\tan\beta=-\frac{3}{2}\cdot$

因为直线 l 与线段 AB 相交，所以直线 l 的倾斜角 θ 满足 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，

由正切函数图象，得 $\tan\theta\geqslant\tan\alpha$ 或 $\tan\theta\leqslant\tan\beta$,

故 l 斜率 k 的取值范围为 $k\in[\frac{4}{3},+\infty]\cup[-\infty,\frac{3}{2}]$.

【评析】(1)求直线的斜率常用方法有三种：

①已知直线的倾斜角 α，当 $\alpha\neq90^\circ$ 时，$k=\tan\alpha$;

②已知直线上两点的坐标 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，当 $x_1\neq x_2$ 时，$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；

③已知直线的方程 $Ax+By+C=0$，当 $B\neq0$ 时，$k=-\frac{A}{B}$.

(2)已知直线的斜率 k 求倾斜角 α 时，要注意当 $k>0$ 时，$\alpha=\arctan k$；当 $k<0$ 时，$\alpha=\pi-\arctan|k|$.

例 2　根据下列条件求直线方程：

(1)过点 $A(2, 3)$，且在两坐标轴上截距相等；

(2)过点 $P(-2, 1)$，且点 $Q(-1, -2)$到直线的距离为 1.

解：(1)设所求直线方程为 $y-3=k(x-2)$，或 $x=2$(舍)，

令 $y=0$，得 $x=2-\frac{3}{k}(k\neq0)$；令 $x=0$，得 $y=3-2k$，

由题意，得 $2-\frac{3}{k}=3-2k$，解得 $k=\frac{3}{2}$ 或 $k=-1$，

所以，所求直线方程为 $3x-2y=0$ 或 $x+y-5=0$；

(2)设所求直线方程为 $y-1=k(x+2)$或 $x=-2$，

当直线为 $y-1=k(x+2)$，即 $kx-y+(2k+1)=0$ 时，

由点 $Q(-1, -2)$到直线的距离为 1，得 $\frac{|-k+2+2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=-\frac{4}{3}$，

所以，直线$-\frac{4}{3}x-y-\frac{5}{3}=0$，即 $4x+3y+5=0$ 符合题意；

当直线为 $x=-2$ 时，检验知其符合题意．

所以，所求直线方程为 $4x+3y+5=0$ 或 $x=-2$．

【评析】求直线方程，应从条件出发，合理选择直线方程的形式，并注意每种形式的适应条件．特别地，在解题过程中要注意“无斜率”，“零截距”的情况．

例 3　已知直线 l_1：$(m-2)x+(m+2)y+1=0$，l_2：$(m^2-4)x—my-3=0$，

(1)若 $l_1 /\!/ l_2$，求实数 m 的值；

(2)若 $l_1\perp l_2$，求实数 m 的值．

解法一：(1)因为 $l_1 /\!/ l_2$，所以$(m-2)(-m)=(m+2)(m^2-4)$，

解得 $m=2$ 或 $m=-1$ 或 $m=-4$，

验证知两直线不重合，

所以 $m=2$ 或 $m=-1$ 或 $m=-4$ 时，$l_1 /\!/ l_2$；

(2)因为 $l_1\perp l_2$，所以$(m-2)(m^2-4)+(-m)(m+2)=0$，

解得 $m=-2$ 或 $m=1$ 或 $m=4$．

解法二：当 l_1 斜率不存在，即 $m=-2$ 时，代入直线方程，知 $l_1\perp l_2$；

当 l_2 斜率不存在，即 $m=0$ 时，代入直线方程，知 l_1 与 l_2 既不平行又不垂直；

当 l_1，l_2 斜率存在，即 $m\neq 0$，$m\neq -2$ 时，

可求 l_1, l_2, 如的斜率分别为 $k_1=-\frac{m-2}{m+2}$，$k_2=\frac{m^2-4}{m}$，截距 $b_1=-\frac{1}{m+2}$，$b_2=-\frac{3}{m}$，

若 $l_1 /\!/ l_2$，由 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$ 或 $m=-4$，

若 $l_1\perp l_2$，由 $k_1k_2=-1$，解得 $m=1$ 或 $m=4$

综上，(1)当 $m=2$ 或 $m=-1$ 或 $m=-4$ 时，$l_1 /\!/ l_2$；

(2)当 $m=-2$ 或 $m=1$ 或 $m=4$ 时，$l_1\perp l_2$．

【评析】两条直线平行与垂直的充要条件有几个，但各有利弊．简洁的(如解法一)相互之间易混淆，好记的要注意使用条件(如解法二，易丢“无斜率”的情况)，解题过程中要注

意正确使用．

例 4 已知直线 l 过两直线 l_1：$3x-y-1=0$ 与 l_2：$x+y-3=0$ 的交点，且点 $A(3，3)$和 $B(5，2)$到 l 的距离相等，求直线 l 的方程．

【分析】所求直线 l 有两种情况：一是 l 与 AB 平行；二是点 A，B 在 l 的两侧，此时 l 过线段 AB 的中点．

解：解方程组 $\begin{cases}3x-y-1=0\\x+y-3=0\end{cases}$ 得交点(1，2)，

由题意，当①l 与 AB 平行；或②l 过 A，B 的中点时．可以使得点 A，B 到 l 的距离相等．

①当 $l// AB$ 时，因为 $k_{AB}=\dfrac{3-2}{3-5}=-\dfrac{1}{2}$，此时 $l: y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-5=0$；

②当 l 过 AB 的中点时，因为 AB 的中点坐标为 $M(4,\dfrac{5}{2})$，所以 $l:\dfrac{y-2}{\dfrac{5}{2}-2}=\dfrac{x-1}{4-1}$，

即 l：$x-6y+11=0$．

综上，所求的直线 l 的方程为 $x+2y-5=0$ 或 l：$x-6y+11=0$．

例 5 已知直线 l_1：$y=kx+2k$ 与 l_2：$x+y=5$ 的交点在第一象限，求实数 k 的取值范围．

解法一：解方程组 $\begin{cases}y=kx+2k\\x+y=5\end{cases}$，得交点 $(\dfrac{5-2k}{k+1},5-\dfrac{5-2k}{k+1})$，

由题意，得 $\begin{cases}\dfrac{5-2k}{k+1}>0\\5-\dfrac{5-2k}{k+1}>0\end{cases}$，解得 $0<k<\dfrac{5}{2}$．

解法二：如图 8－2－2，由 l_1：$y=k(x+2)$，知 l_1 过定点 $P(-2，0)$，

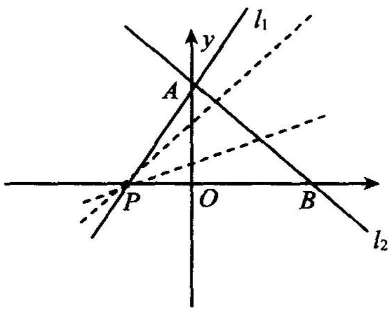


图 8－2－2

由 l_2：$x+y=5$，知 l_2 坐标轴相交于点 $A(0，5)$，$B(5，0)$，

因为 $k_{AP}=\dfrac{5-0}{0+2}=\dfrac{5}{2},k_{BP}=0,$

由题意，得 $0<k<\dfrac{5}{2}\cdot$

【评析】在例 4，例 5 中，要充分利用平面几何知识解决问题，体会数形结合的思想与方法；要会联立两个曲线(直线)的方程，解方程得到曲线的交点，体会方程思想.

例 6　如图 8－2－3，过点 $P(4，4)$的直线 l 与直线 l_1：$y=4x$ 相交于点 A(在第一象限)，与 x 轴正半轴相交于点 B，求△ABO 面积的最小值.

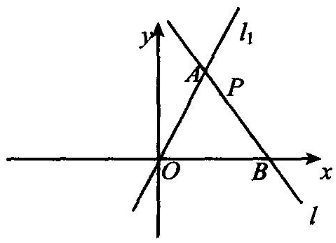


图 8－2－3

解：设 $B(a，0)$，则 $l:y-4=\dfrac{4-0}{4-a}(x-4),$

将 $y=4x$ 代入直线 l 的方程，

得点 A 的坐标为 $(\dfrac{a}{a-3},\dfrac{4a}{a-3})(a>3),$

则△ABO 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{4a}{a-3}=\dfrac{2}{-3(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{6})^2+\dfrac{1}{12}},$

所以当 $a=6$ 时，△ABO 的面积 S 取到最小值 24.

练习 8－2

一、选择题

1．若直线 l 的倾斜角的正弦为 $\dfrac{3}{5}$，则 l 的斜率 k 是(　　)

A．$-\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$-\dfrac{3}{4}$或$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{4}{3}$或$-\dfrac{4}{3}$

2．点$P(a+b，ab)$在第二象限内，则$bx+ay-ab=0$直线不经过的象限是(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．“$m=\dfrac{1}{2}$”是“直线$(m+2)x+3my+1=0$与直线$(m-2)x+(m+2)y-3=0$相互垂直”的(　　)

A．充分必要条件　　B．充分而不必要条件

C．必要而不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．若直线l：$y=kx-\sqrt{3}$与直线$2x+3y-6=0$的交点位于第一象限，则l的倾角的取值范围(　　)

A．$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$　　B．$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$　　C $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$.　　D．$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$

二、填空题

5．已知两条直线l_1：$ax+3y-3=0$，l_2：$4x+6y-1=0$，若$l_1 /\!/ l_2$，则$a=$_______.

6．已知点$A(3，0)$，$B(0，4)$，则过点B且与A的距离为3的直线方程为_______.

7．若点$P(3，4)$，$Q(a，b)$关于直线$x-y-1=0$对称，则$a+2b=$_______.

8．若三点$A(2，2)$，$B(a，0)$，$C(0，b)$，$(ab\neq 0)$共线，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的值等于_______.

三、解答题

9．已知点P在直线$2x+3y-2=0$上，点$A(1，3)$，$B(-1，-5)$.

(1)求$|PA|$的最小值；

(2)若$|PA|=|PB|$，求点P坐标.

10．若直线l夹在两条直线l_1：$x-3y+10=0$与l_2：$2x+y-8=0$之间的线段恰好被点$P(0，1)$平分，求直线l的方程.

11．已知点 P 到两个定点 $M(-1，0)$、$N(1，0)$距离的比为 $\sqrt{2}$，点 N 到直线 PM 的距离为 1．求直线 PN 的方程．

§8－3　简单的线性规划问题

【知识要点】

1．二元一次不等式(组)所表示的平面区域

(1)一般地，二元一次不等式 $Ax+By+C>0$ 在平面区域中表示直线 $Ax+By+C=0$ 某一侧的所有点组成的平面区域(开半平面)，且不含边界线．不等式 $Ax+By+C\geqslant 0$ 所表示的平面区域包括边界线(闭半平面)．

(2)由几个不等式组成的不等式组所表示的平面区域，是指各个不等式组所表示的平面区域的公共部分．

(3)可在直线 $Ax+By+C=0$ 的某一侧任取一点，一般地取特殊点$(x_0，y_0)$，从 Ax_0+By_0+C 的正(或负)来判断 $Ax+By+C>0$(或 $Ax+By+C<0$)所表示的区域．当 $C\neq 0$ 时，常把原点(0，0)作为特殊点．

(4)也可以利用如下结论判断区域在直线哪一侧：

①$y>kx+b$ 表示直线上方的半平面区域；$y<kx+b$ 表示直线下方的半平面区域．

②当 $B>0$ 时，$Ax+By+C>0$ 表示直线上方区域，$Ax+By+C<0$ 表示直线下方区域．

2．简单线性规划

(1)基本概念

目标函数：关于 x，y 的要求最大值或最小值的函数，如 $z=x+y$，$z=x^2+y^2$ 等．

约束条件：目标函数中的变量所满足的不等式组．

线性目标函数：目标函数是关于变量的一次函数．

线性约束条件：约束条件是关于变量的一次不等式(或等式)．

线性规划问题：在线性约束条件下，求线性目标函数的最大值或最小值问题．

最优解：使目标函数达到最大值或最小值的点的坐标，称为问题的最优解．

可行解：满足线性约束条件的解(x，y)叫可行解．

可行域：由所有可行解组成的集合叫可行域．

(2)用图解法解决线性规划问题的一般步骤：

①分析并将已知数据列出表格；

②确定线性约束条件；

③确定线性目标函数；

④画出可行域；

⑤利用线性目标函数，求出最优解；

⑥实际问题需要整数解时，应适当调整确定最优解．

【复习要求】

1．了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组．

2．能从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决．

【例题分析】

例 1　(1)若点(3，1)在直线 $3x-2y+a=0$ 的上方，则实数 a 的取值范围是______；

(2)若点(3，1)和(－4，6)在直线 $3x-2y+a=0$ 的两侧，则实数 a 的取值范围是______．

解：(1)将直线化为 $y=\frac{3}{2}x+\frac{a}{2}$,

由题意，得 $1>\frac{3}{2}\times 3+\frac{a}{2}$，解得 $a<-7$．

(2)由题意，将两点代入直线方程的左侧所得符号相反，

则 $(3\times 3-2+a)[3\times(-4)-12+a]<0$，即 $(a+7)(a-24)<0$，

所以，实数 a 的取值范围是 $(-7，24)$．

例 2　(1)如图 8－3－1，写出能表示图中阴影部分的不等式组；

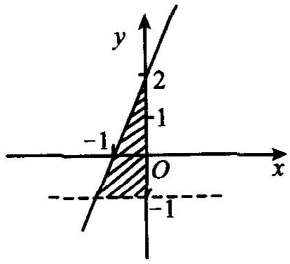


图 8－3－1

(2)如果函数 $y=ax^2+bx+a$ 的图象与 x 轴有两个交点，试在 aOb 坐标平面内画出点(a, b)表示的平面区域.

略解：(1)$\begin{cases}x\le 0\\ y>-1\\ 2x-y+2\ge 0\end{cases}$

(2)由题意，得 $b^2-4a^2>0$，即$(2a+b)(2a-b)<0$，

所以$\begin{cases}2a+b>0\\ 2a-b<0\end{cases}$或$\begin{cases}2a+b<0\\ 2a-b>0\end{cases}$，点$(a, b)$表示的平面区域如图 8－3－2.

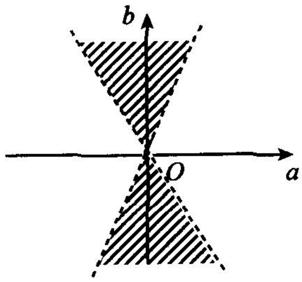


图 8－3－2

【评析】除了掌握二元一次不等式表示平面区域外，还应关注给定平面区域如何用不等式表示这个逆问题.

例 3　已知 x，y 满足$\begin{cases}2x+y-2\ge 0,\\ x-2y+4\ge 0,\\ 3x-y-3\le 0.\end{cases}$求：

(1)$z_1=x+y$ 的最大值；

(2)$z_2=x-y$ 的最大值；

(3)$z_3=x^2+y^2$ 的最小值；

(4) $z_4=\dfrac{y}{x-1}$ 的取值范围($x\neq1$).

略解：如图 8－3－3，作出已知不等式组表示的平面区域.

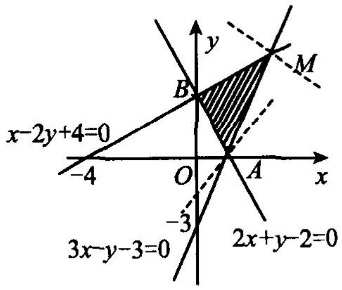


图 8－3－3

易求得 $M(2，3)$，$A(1，0)$，$B(0，2)$.

(1)作直线 $x+y=0$，通过平移，知在 M 点，z_1 有最大值 5；

(2)作直线 $x-y=0$，通过平移，知在 A 点，z_2 有最大值 1；

(3)作圆 $x^2+y^2=r^2$，显然当圆与直线 $2x+y-2=0$ 相切时，r_2 有最小值 $(\dfrac{2}{\sqrt{5}})^2$，即 z_3 有最小值 $\dfrac{4}{5}$；

(4) $\dfrac{y}{x-1}$ 可看作(1，0)与(x，y)两点连线的斜率，所以 z_4 的取值范围是$(-\infty，-2]\cup[3，+\infty)$.

【评析】对于非线性目标函数在线性约束条件下的最值问题，要充分挖掘其目标函数 z 的几何意义．z 的几何意义常见的有：直线的截距、斜率、圆的半径等.

例 4　某公司招收男职员 x 名，女职员 y 名，x 和 y 须

满足约束条件$\begin{cases}5x-11y\geq-22,\\2x+3y\geq9,\\2x\leq11.\end{cases}$　则 $z=10x+10y$ 的最大值是(　　)

(A)80　　(B)85　　(C)90　　(D)95

略解：由题意，根据已知不等式组及$\begin{cases}x\geq0\\y\geq0\end{cases}$可得到点($x$，$y$)的可行域.

如图 8－3－4.

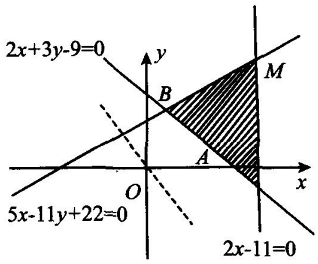


图 8－3－4

作直线 $x+y=0$，通过平移，知在 M 点，$z=10x+10y$ 有最大值，易得 $M(\frac{11}{2},\frac{9}{2})$,

又由题意，知 x，$y\in N$，作适当调整，知可行域内点(5，4)可使 z 取最大值，

所以，$z_{\max}=10\times5+10\times4=90$，选 C.

【评析】实际问题中，要关注是否需要整数解.

例 5 某工厂用两种不同原料生产同一产品，若采用甲种原料，每吨成本 1000 元，运费 500 元，可得产品 90 千克；若采用乙种原料，每吨成本 1500 元，运费 400 元，可得产品 100 千克．今预算每日原料总成本不得超过 6000 元，运费不得超过 2000 元，问此工厂每日采用甲、乙两种原料各多少千克，才能使产品的日产量最大?

解：设此工厂每日需甲种原料 x 吨，乙种原料 y 吨，则可得产品 $z=90x+100y$(千克).

由题意，得 $\begin{cases}1000x+1500y\le 6000\ ,\\ 500x+400y\le 2000\ ,\\ x\ge 0, y\ge 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y\le 12,\\ 5x+4y\le 20,\\ x\ge 0, y\ge 0.\end{cases}$

上述不等式组表示的平面区域如图 8－3－5 所示，阴影部分(含边界)即为可行域.

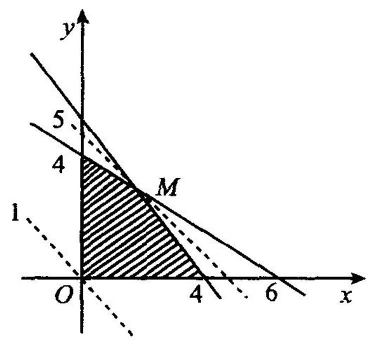


图 8－3－5

作直线 l：$90x+100y=0$，并作平行于直线 l 的一组直线与可行域相交，其中有一条直

线经过可行域上的 M 点，且与直线 l 的距离最大，此时目标函数达到最大值．这里 M 点是直线 $2x+3y=12$ 和 $5x+4y=20$ 的交点，容易解得 $M(\frac{12}{7},\frac{20}{7})$，此时 z 取到最大值 $90\times\frac{12}{7}+100\times\frac{20}{7}=440$.

答：当每天提供甲原料 $\frac{12}{7}$ 吨，乙原料 $\frac{20}{7}$ 吨时，每日最多可生产 440 千克产品．

例 6 设函数 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$．

(1)在平面直角坐标系 aOb 中，画出点$(a，b)$所表示的区域；

(2)试利用(1)所得的区域，求 $f(-2)$的取值范围．

解：(1)∵$f(-1)=a-b$，$f(1)=a+b$，

$$\therefore \begin{cases}1\le a-b\le 2,\\ 2\le a+b\le 4.\end{cases} \text{即} \begin{cases}a-b\ge 1,\\ a-b\le 2,\\ a+b\ge 2,\\ a+b<4.\end{cases}$$

如图 8－3－6，在平面直角坐标系 aOb 中，作出满足上述不等式组的区域，阴影部分(含边界)即为可行域．

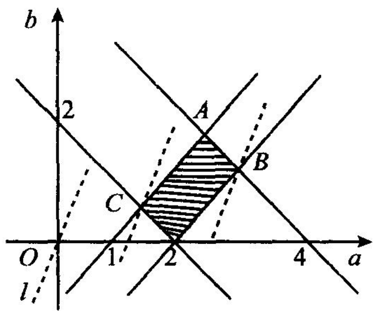


图 8－3－6

(2)目标函数 $f(-2)=4a-2b$．

在平面直角坐标系 aOb 中，作直线 l：$4a-2b=0$，并作平行于直线 l 的一组直线与可行域相交，其中有一条直线经过可行域上的 B 点，且与直线 l 的距离最大，此时目标函数达到最大值．

这里 B 点是直线 $a-b=2$ 和 $a+b=4$ 的交点，容易解得 $B(3，1)$，

此时 $f(-2)$取到最大值 $4\times3-2\times1=10$．

同理，其中有一条直线经过可行域上的 C 点，此时目标函数达到最小值．这里 C 点是直线 $a-b=1$ 和 $a+b=2$ 的交点，容易解得 $C(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$,

此时 $f(-2)$取到最小值 $4\times\frac{3}{2}-2\times\frac{1}{2}=5.$

所以 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$．

【评析】线性规划知识是解决“与二元一次不等式组有关的最值(或范围)问题”的常见方法之一．

练习 8－3

一、选择题

1．原点(0，0)和点(1，1)在直线 $x+y-a=0$ 的两侧，则 a 的取值范围是（　　）

A．$a<0$ 或 $a>2$　　B．$a=0$ 或 $a=2$　　C．$0<a<2$　　D．$0\leqslant a\leqslant 2$

2．若 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，且 $x+y\leqslant 1$，则 $z=x-y$ 的最大值是(　　)

A．-1　　B．1　　C．2　　D．-2

3．已知 x 和 y 是正整数，且满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leq 10,\\ x-y\leq 2,\\ 2x\geq 7.\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最小值是(　　)

A．24　　B．14　　C．13　　D．11.5

4．根据程序设定，机器人在平面上能完成下列动作：先从原点 O 沿正东偏北 α $(0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2})$ 方向行走一段时间后，再向正北方向行走一段时间，但 α 的大小以及何时改变方向不定．如图 8－3－7．假定机器人行走速度为 10 米/分钟，设机器人行走 2 分钟时的可能落点区域为 S，则 S 可以用不等式组表示为(　　)

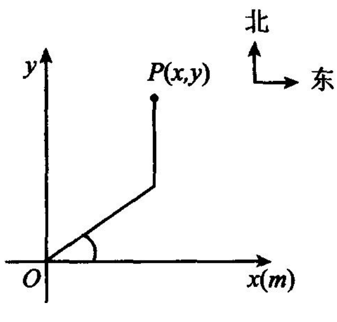


图 8－3－7

A． $\begin{cases}0\le x\le 20\\0\le y\le 20\end{cases}$　　B． $\begin{cases}x^2+y^2\le 400\\x+y\ge 20\end{cases}$

C． $\begin{cases}x^2+y^2\le 400\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$　　D． $\begin{cases}x+y\ge 20\\x\le 20\\y\le 20\end{cases}$

二、填空题

5．在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases}x+y-2\ge 0\\x-y+2\ge 0\\x\le 2\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是______．

6．若实数 x、y 满足 $\begin{cases}x-y+1\le 0\\x>0\\x\le 2\end{cases}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是______．

7．点 $P(x，y)$在直线 $4x+3y=0$ 上，且满足 $-14\leqslant x-y\leqslant 7$，则点 P 到坐标原点距离的取值范围是______．

8．若当实数 x，y 满足 $\begin{cases}x-y+5\ge 0\\x+y\ge 0\\x\le a\end{cases}$ 时，$z=x+3y$ 的最小值为-6，则实数 a 等于______．

三、解答题

9．如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\ge 0\\x+y-2\le 0\\x+y-1\ge 0\end{cases}$ 内，点 $Q(2，2)$，求$|PQ|$的最小值．

10．制定投资计划时，不仅要考虑可能获得的盈利，而且要考虑可能出现的亏损．某投资人打算投资甲、乙两个项目，根据预测，甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100％和 50％($\text{盈利率}=\dfrac{\text{盈利额}}{\text{投资额}}\times 100\%$)，可能的最大亏损率分别为 30％和 10％($\text{亏损率}=\dfrac{\text{亏损额}}{\text{投资额}}$

$\times 100\%$)，投资人计划投资金额不超过 10 万元，要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元．问投资人对甲、乙两个项目各投多少万元，才能使可能的盈利最大?

11．设 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $b(a+b+1)<0$，$b(a+b-1)<0$．

(1)在平面直角坐标系 aOb 中，画出点$(a，b)$所表示的区域；

(2)试利用(1)所得的区域，指出 a 的取值范围．

§8－4　圆的方程

【知识要点】

1．圆的方程

(1)标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，其中点$(a，b)$为圆心，r 为半径．

(2)一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，其中圆心为$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

2．点和圆的位置关系

设圆的半径为 r，点到圆的圆心距离为 d，则

$d>r\Leftrightarrow$ 点在圆外；

$d=r\Leftrightarrow$ 点在圆上；

$d<r\Leftrightarrow$ 点在圆内．

3．直线与圆的位置关系

(1)代数法：联立直线与圆的方程，解方程组，消去字母 y，得关于 x 的一元二次方程，则

$\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程组有两解 $\Leftrightarrow$ 直线和圆相交；

$\Delta=0\Leftrightarrow$ 方程组有一解 $\Leftrightarrow$ 直线和圆相切；

$\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程组无解 $\Leftrightarrow$ 直线和圆相离．

(2)几何法(重点)：计算圆心到直线的距离 d，设圆的半径为 r，则

$d<r\Leftrightarrow$ 直线和圆相交；

$d=r\Leftrightarrow$ 直线和圆相切；

$d>r\Leftrightarrow$ 直线和圆相离．

4．圆与圆的位置关系

设两圆的半径分别为 R，$r(R\geqslant r)$，两圆的圆心距为 $d(d>0)$，则

$d>R+r\Leftrightarrow$ 两圆相离；

$d=R+r\Leftrightarrow$ 两圆外切；

$R-r<d<R+r\Leftrightarrow$ 两圆相交；

$d=R-r\Leftrightarrow$ 两圆内切；

$d<R-r\Leftrightarrow$ 两圆内含．

【复习要求】

1．掌握圆的标准方程与一般方程，能根据条件，求出圆的方程．

2．能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系，解决一些简单问题．

【例题分析】

例 1 根据下列条件，求圆的方程：

(1)一条直径的端点是 $A(3，2)$，$B(-4，1)$；

(2)经过两点 $A(1，-1)$和 $B(-1，1)$，且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上；

(3)经过两点 $A(4，2)$和 $B(-1，3)$，且在两坐标轴上的四个截距之和为 2．

【分析】求圆的方程，可以用待定系数法．若已知条件与圆心、半径有关，则设圆的标准方程，如第(2)问．若已知条件与圆心、半径关系不大，则设圆的一般方程，如第(3)问．

解：(1)由题意圆心为 AB 的中点 $M(\frac{3-4}{2},\frac{2+1}{2})$，即 $M(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，

因为 $|AB|=\sqrt{(3+4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{50}$,

所以圆的半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{\sqrt{50}}{2}$.

所以，所求圆的方程为 $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{2}$.

(2)方法一：设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，则

$\begin{cases}a+b-2=0\\(1-a)^2+(-1-b)^2=r^2\\(-1-a)^2+(1-b)^2=r^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=1\\r=2\end{cases}$，

所以，所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

方法二：由圆的几何性质可知，圆心一定在弦 AB 的垂直平分线上．易得 AB 的垂直平分线为 $y=x$.

由题意，解方程组$\begin{cases}y=x\\x+y-2=0\end{cases}$，得圆心 C 为(1，1)，

于是，半径 $r=|AC|=2$，

所以，所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

(3)设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

因为圆过点 A，B，所以

$4D+2E+F+20=0$，①

$-D+3E+F+10=0$，②

在圆的方程中，令 $y=0$，得 $x^2+Dx+F=0$，

设圆在 x 轴上的截距为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-D$.

在圆的方程中，令 $x=0$，得 $y^2+Ey+F=0$，

设圆在 y 轴上的截距为 y_1，y_2，则 $y_1+y_2=-E$.

由题意，得$-D+(-E)=2$，③

解①②③，得 $D=-2$，$E=0$，$F=-12$，

所以，所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-12=0$．

【评析】①以 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$为一直径端点的圆的方程是$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$．②求圆的方程时，要注意挖掘题中圆的几何意义(如第(2)问)；③待定系数法求圆的方程时，要恰当选择的圆的方程(如第(3)问)，这样有时能大大减少运算量．

例 2　(1)点 $P(a, b)$在圆 C：$x^2+y^2=r^2(r>0)$上，求过点 P 的圆的切线方程；

(2)若点 $P(a, b)$在圆 C：$x^2+y^2=r^2(r>0)$内，判断直线 $ax+by=r^2$ 与圆 C 的位置关系．

解：(1)方法一：因为切线 l 与半径 OP 垂直，又可求出直线 OP 的斜率，所以可得切线 l 的斜率，再由点斜式得到切线方程．但要注意斜率是否存在(详细过程略)．

方法二：设 $Q(x, y)$为所求切线上任一点，则 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，即$(x-a, y-b)\cdot(a, b)=0$．

整理得 $ax+by=a^2+b^2$，

又因为 P 在圆上，所以 $a^2+b^2=r^2$，

故所求的切线方程为 $ax+by=r^2$．

(2)由已知，得 $a^2+b^2<r^2$，

则圆心 $O(0, 0)$到直线 $ax+by=r^2$ 的距离 $d=\dfrac{|r^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}>\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r$.

所以此直线与圆 C 相离．

【评析】随着点 $P(a, b)$与圆 C：$x^2+y^2=r^2$ 的位置关系的变化，直线 l：$ax+by=r^2$ 与圆 C 的位置关系也在变化．①当点 P 在圆 C 上时，直线 l 与圆 C 相切；②当点 P 在圆 C 内时，直线 l 与圆 C 相离；③当点 P 在圆外时，直线 l 与圆 C 相交．

例 3　已知点 $A(a, 3)$，圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$．

(1)设 $a=3$，求过点 A 且与圆 C 相切的直线方程；

(2)设 $a=4$，直线 l 过点 A 且被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程；

(3)设 $a=2$，直线 l_1 过点 A，求 l_1 被圆 C 截得的线段的最短长度，并求此时 l_1 的方程．

解：(1)如图 8－4－1，此时 $A(3, 3)$，

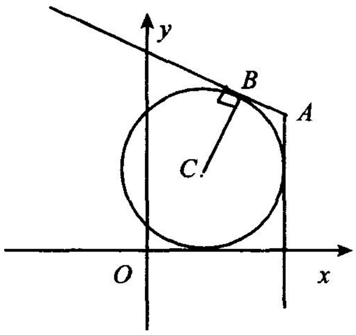


图 8－4－1

设切线为 $y-3=k(x-3)$ 或 $x=3$，

验证知 $x=3$ 符合题意；

当切线为 $y-3=k(x-3)$，即 $kx-y-3k+3=0$ 时，

圆心(1，2)到切线的距离 $d=\dfrac{|k-2-3k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=2,$

解得 $k=-\dfrac{3}{4},$

所以，切线方程为 $3x+4y-21=0$ 或 $x=3$.

(2)如图 8－4－2，此时 $A(4，3)$，

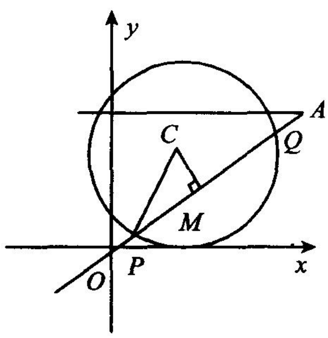


图 8－4－2

设直线 l 为 $y-3=k(x-4)$ 或 $x=4$(舍)，

设弦 PQ 的中点为 M，则 $|PM|=\sqrt{3}$，$|CP|=r=2$，

所以 $|CM|=\sqrt{|CP|^2-|PM|^2}=1$,，即圆心到直线 l 的距离为 1，

于是 $d=\dfrac{|k-2-4k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $\dfrac{3}{4}$，

所以，直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x$ 或 $y=3$.

(3)如图 8－4－3，此时 $A(2，3)$，设所截得的线段为 DE，圆心到直线 l_1 的距离为 d，

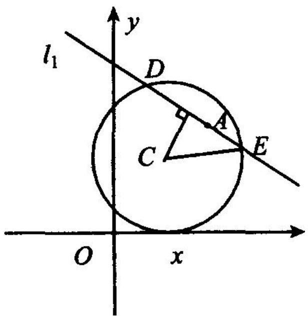


图 8－4－3

则 $(\dfrac{1}{2}|DE|)^2+d^2=r^2$，即 $|DE|=2\sqrt{4-d^2}$,

因为直线 l_1 过点 A，

所以圆心到直线 l_1 的距离为 $d\leqslant|CA|=\sqrt{2}$,

故当 $d=\sqrt{2}$ 时，$|DE|_{\min}=2\sqrt{2}$，

此时 $AC\perp l_1$，因为 $k_{AC}=\dfrac{3-2}{2-1}=1$,

所以 $k_{l_1}=-1$，

故直线 l_1 方程为 $y-3=-(x-2)$，即 $x+y-5=0$.

【评析】(1)用点斜式设直线方程时，要注意斜率是否存在；

(2)涉及直线与圆的位置关系问题时，用与圆有关的几何意义解题较为方便，常见的有：①比较圆心到直线的距离与半径的大小；②如图 8－4－2，在由弦心距、半径及弦组成的 Rt△CMP 中，有 $|CM|^2+|MP|^2=|CP|^2$，$CM\perp MP$ 等；③如图 8－4－1，由切线段、半径组成的 Rt△ABC.

例 4　已知圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线 l：$mx+y+m=0$．求证：不论 m 取何值，直线 l 与圆 C 恒交于两点.

【分析】要证明直线 l 与圆 C 恒交于两点，可以用圆心到直线的距离小于半径，也可以联立直线和圆的方程，消去 y 后用判别式大于零去证明，但此题这两种方法计算量都很大．如果能说明直线 l 恒过圆内一定点，那么直线 l 与圆 C 显然有两个交点．

解：因为直线 l：$mx+y+m=0$ 可化为 $y=-m(x+1)$，

所以直线 l 恒过点 $A(-1，0)$，

又圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 的圆心为(1，2)，半径为 5，

且点 A 到圆 C 的圆心的距离等于 $\sqrt{(-1-1)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}<5,$

所以点 A 为圆 C 内一点，则直线 l 恒过圆内一点 A，

所以直线 l 与圆 C 恒交于两点．

例 5　四边形 $ABCD$ 的顶点 $A(4，3)$，$B(0，5)$，$C(-3，-4)$，$D(2\sqrt{6},1)$．O 为坐标原点．

(1)此四边形是否有外接圆，若有，求出外接圆的方程，若没有，请说明理由；

(2)记△ABC 的外接圆为 W，过 W 上的点 $E(x_0，y_0)(x_0>0，y_0>0)$作圆 W 的切线 l，设 l 与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于点 P、Q，求△OPQ 面积的最小值．

【分析】判断四点是否共圆，初中的方法是证明一组对角之和为 180°，此题此法不易做．如何用所学知识解决问题是此题的关键，如果想到三点共圆，那么可以求出过三点的圆的方程，然后再判断第四点是否在圆上，问题就迎刃而解．

解：(1)设△ABC 的外接圆为 W，圆心 $M(a，b)$，半径为 $r(r>0)$．

则 W 为：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．

由题意，得$\begin{cases}(4-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(0-a)^2+(5-b)^2=r^2\\(-3-a)^2+(-4-b)^2=r^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=0\\b=0\\r=5\end{cases}$，所以 W：$x^2+y^2=25$．

将点 D 的坐标代入 W 的方程，适合．

所以点 D 在△ABC 的外接圆 W 上，

故四边形 $ABCD$ 有外接圆，且外接圆的方程为 $x^2+y^2=25$．

(2)设切线 l 的斜率为 k，直线 ME(即 OE)的斜率为 k_1，

∵圆的切线 l 垂直于过切点的半径，∴ $k=-\dfrac{1}{k_1}$,

∵ $k_1=\dfrac{y_0}{x_0}, \therefore k=-\dfrac{x_0}{y_0}$,

∴切线 $l: y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，整理得而 $x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$，

∵点 $E(x_0, y_0)$在圆 W 上，即 $x_0^2+y_0^2=25$，∴切线 l：$x_0x+y_0y=25$.

在 l 的方程中，令 $x=0$，得 $y=\dfrac{25}{y_0}, \therefore Q(0,\dfrac{25}{y_0})$，同理 $P(\dfrac{25}{x_0},0)$.

∴△OPQ 的面积 $S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{25}{x_0}\cdot\dfrac{25}{y_0}=\dfrac{625}{2x_0y_0}$,

∵ $x_0^2+y_0^2=25\geq 2x_0y_0$，(其中 $x_0>0$，$y_0>0$)

∴ $S_{\Delta OPQ}=\dfrac{625}{2x_0y_0}\geq\dfrac{625}{25}=25$. 当且仅当 $x_0=y_0=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ 时，等号成立.

即当 $E(\dfrac{5}{2}\sqrt{2},\dfrac{5}{2}\sqrt{2})$ 时，△OPQ 的面积有最小值 25.

练习 8－4

一、选择题

1．以点(2，－1)为圆心且与直线 $3x-4y+5=0$ 相切的圆的方程为(　　)

A．$(x-2)^2+(y+1)^2=3$　　B．$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

C．$(x-2)^2+(y+1)^2=9$　　D．$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

2．圆 $x^2+y^2-4x+4y+6=0$ 截直线 $x-y-5=0$ 所得的弦长等于(　　)

A．$\sqrt{6}$　　B．$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．5

3．若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点，则(　　)

A．$a^2+b^2\leqslant 1$　　B．$a^2+b^2\geqslant 1$　　C．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\le 1$　　D．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge 1$

4．圆$(x+2)^2+y^2=5$关于点(1，2)对称的圆的方程为(　　)

A．$(x+4)^2+(y-2)^2=5$　　B．$(x-4)^2+(y-4)^2=5$

C．$(x+4)^2+(y+4)^2=5$　　D．$(x+4)^2+(y+2)^2=5$

二、填空题

5．由点$P(-1，4)$向圆$x^2+y^2-4x-6y+12=0$所引的切线长是______.

6．若半径为 1 的圆分别与 y 轴的正半轴和射线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x\ge 0)$ 相切，则这个圆的方程为______.

7．圆$x^2+y^2+2x+4y-3=0$上到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的点共有______个.

8. 若不等式$x^2+2x+a\geqslant -y^2-2y$对任意的实数$x$、$y$都成立，则实数$a$的取值范围是______.

三、解答题

9．已知直线l：$x-y+2=0$与圆C：$(x-a)^2+(y-2)^2=4$相交于A、B两点.

(1)当$a=-2$时，求弦AB的垂直平分线方程；

(2)当l被圆C截得弦长为$2\sqrt{3}$时，求a的值.

10．已知圆满足以下三个条件：①截y轴所得的弦长为 2；②被x轴分成两段圆弧，其弧长的比为 3∶1；③圆心到直线l：$x-2y=0$的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$．求该圆的方程.

11．已知圆C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线l：$mx+y+m=0$．求直线l被圆C截得的线段的最短长度，以及此时l的方程.

§8－5　曲线与方程

【知识要点】

1．轨迹方程

一般地，一条曲线可以看成动点运动的轨迹，曲线的方程又常称为满足某种条件的点的轨迹方程．

2．曲线与方程

在平面直角坐标系中，如果曲线 C 与方程 $F(x，y)=0$ 之间有如下关系：

(1)曲线 C 上点的坐标都是方程 $F(x，y)=0$ 的解；

(2)以方程 $F(x，y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上．

那么，曲线 C 叫做方程 $F(x，y)=0$ 的曲线，方程 $F(x，y)=0$ 叫做曲线 C 的方程．

3．曲线的交点

已知两条曲线 C_1 和 C_2 的方程分别是 $F(x，y)=0$，$G(x，y)=0$，那么求两条曲线 C_1 和 C_2 的交点坐标，只要求方程组 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ 的实数解就可以得到．

【复习要求】

1．了解曲线与方程的对应关系，体会数形结合的思想、方程思想．

2．会求简单的轨迹方程；能根据方程研究曲线的简单性质．

【例题分析】

例 1　已知点 $A(-1，0)$，$B(2，0)$，动点 P 到点 A 的距离与它到点 B 的距离之比为 2，求动点 P 的轨迹方程．

解：设 $P(x，y)$，则 $\frac{|PA|}{|PB|}=2$，即 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=2,$

化简得 $x^2+y^2-6x+5=0$，所以动点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2-6x+5=0$．

【评析】动点轨迹法是求轨迹方程的重要方法，其一般步骤是：①建立平面直角坐标系；②设所求动点的坐标为(x，y)；③找出动点满足的几何关系；④几何关系代数化，并将其化简；⑤检验以方程的解为坐标的点是否都在所求轨迹上.

例 2　已知 P 为抛物线 $y=x^2+1$ 上一动点，$A(2，3)$，P 关于 A 的对称点为点 P'，求动点 P' 的轨迹方程.

解：设 $P'(x，y)$，$P(x_0，y_0)$，由题意，得 $\frac{x_0+x}{2}=2,\frac{y_0+y}{2}=3,$

所以 $x_0=4-x$，$y_0=6-y$，

因为点 $P(x_0，y_0)$在抛物线 $y=x^2+1$ 上，所以 $6-y=(4-x)^2+1$，

即动点 P'的轨迹方程为 $y=-(x-4)^2+5$.

例 3　已知直角坐标平面上点 $Q(2,0)$和圆 C:$x^2+y^2=1$,动点 M 到圆 C 的切线长与$|MQ|$的比等于常数 2．求动点 M 的轨迹方程，并说明轨迹的形状.

解：如图 8－5－1，设直线 MN 切圆于 N，

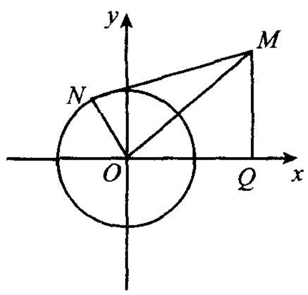


图 8－5－1

则动点 M 组成的集合是：$P=\{M|\ |MN|=2|MQ|\}$，

因为圆的半径$|ON|=1$，所以$|MN|^2=|MO|^2-|ON|^2=|MO|^2-1$.

设点 M 的坐标为(x，y)，则 $\sqrt{x^2+y^2-1}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

整理得 $3x^2+3y^2-16x+17=0$，化简得 $(x-\frac{8}{3})^2+y^2=\frac{13}{9}\cdot$

即动 M 的轨迹方程为 $(x-\frac{8}{3})^2+y^2=\frac{13}{9}$，它是以 $(\frac{8}{3},0)$ 为圆心，以 $\frac{\sqrt{13}}{3}$ 径的圆.

【评析】求轨迹方程的方法有多种，常见的有：动点轨迹法，相关点法，几何法等．但不论用何种方法求轨迹方程，其最终是要找出所求动点的横纵坐标 x，y 满足的方程.

例 4　已知曲线 C：$|xy|=1$．

(1)画出曲线 C 的图象，并研究其对称性；

(2)讨论圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$与 C 的交点情况．

解：(1)图象如图 8－5－2．图象关于 x 轴、y 轴、原点、直线 $y=x$，直线 $y=-x$ 都对称．

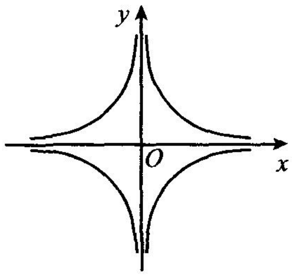


图 8－5－2

(2)由 $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ |xy|=1 \end{cases}$，得 $x^4-r^2x^2+1=0$，则 $\Delta=r^4-4$，

当 $\Delta=r^4-4<0$，即 $0<r<\sqrt{2}$ 时，圆与曲线 C 无交点；

当 $\Delta=r^4-4=0$，即 $r=\sqrt{2}$ 时，结合图象对称性，得圆与曲线 C 有四点；

当 $\Delta=r^4-4>0$，即 $r>\sqrt{2}$ 时，结合图象对称性，得圆与曲线 C 有八点．

【评析】利用方程思想可以研究图象交点的个数，但有时较复杂，若能结合图象常常可以使问题得到简化．

练习 8－5

一、选择题

1．到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是(　　)

A．$x-y=0$　　B．$x+y=0$　　C．$|x|-y=0$　　D．$|x|-|y|=0$

2．下列方程的曲线关于 $x=0$ 对称的是(　　)

A．$x^2-x+y^2=1$　　B．$x^2-y^2=1$　　C．$x-y=1$　　D．$x^2y+xy^2=1$

3．已知等腰△ABC 的底边两端点的坐标分别为 $B(4，0)$，$C(0，-4)$，则顶点 A 的轨迹方程

是(　　)

A．$y=x$　　B．$y=x(x\neq 2)$　　C．$y=-x$　　D．$y=-x(x\neq 2)$

4．直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|(k\in\mathbf{R}，k\neq 0)$ 的公共点的个数为(　　)

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

二、填空题

5．曲线 $x+y-7=0$ 与 $xy=10$ 的交点坐标是______.

6．曲线 $(x-2)^2+x(y-2)=0$ 关于点 $A(1，1)$ 的对称曲线方程是______.

7．与直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 和直线 $y=4$ 距离相等的点的轨迹方程为______.

8．已知⊙O 的方程是 $x^2+y^2-2=0$，⊙O' 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$，由动点 P 向⊙O 和⊙O' 所引的切线长相等，则动点 P 的轨迹方程是______.

三、解答题

9．已知两圆 C_1：$(x-2)^2+(y-2)^2=9$，C_2：$x^2+y^2=16$．圆 C 过圆 C_1，C_2 的两个交点，且过点(7，7)，求圆 C 的方程.

10．已知曲线 C：$y^2=x+1$，定点 $A(3，1)$，B 为曲线 C 上任一点，点 P 在线段 AB 上且有 $|BP|:|PA|=1:2$，当 B 在曲线 C 上运动时，求点 P 的轨迹方程.

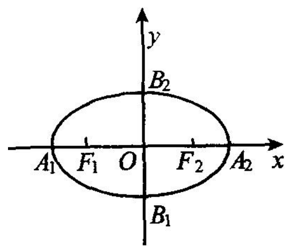
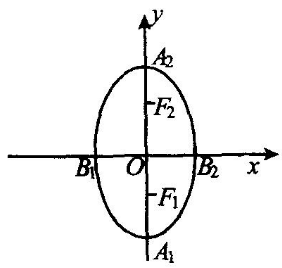
11．设动点 P 在直线 $x=1$ 上，O 为坐标原点．以 OP 为直角边，点 O 为直角顶点作等腰 Rt△OPQ，求动点 Q 的轨迹方程.

§8－6　椭　圆

【知识要点】

1．椭圆定义：平面内与两定点 F_1，F_2 的距离之和等于定长(大于｜F_1F_2｜)的点的轨迹叫做椭圆．这两个定点 F_1，F_2 叫做椭圆的焦点，两焦点的距离｜F_1F_2｜叫做椭圆的焦距．

2．椭圆的标准方程和几何性质(如下表所示)：

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="7">性
质</td><td>焦点</td><td>$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$</td><td>$F_1(0，-c)$，$F_2(0，c)$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="2">｜F_1F_2｜$=2c$，(其中 $c^2=a^2-b^2$，$c>0$)</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>｜x｜$\le a$，｜y｜$\le b$</td><td>｜x｜$\le b$，｜y｜$\le a$</td></tr>
<tr><td>对称</td><td colspan="2">关于 x 轴、y 轴和原点对称</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$(\pm a，0)$，$(0，\pm b)$</td><td>$(0，\pm a)$，$(\pm b，0)$</td></tr>
<tr><td>轴</td><td colspan="2">长轴长 $2a$，短轴长 $2b$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$</td></tr>
</table>

3．对于椭圆的两种标准方程应注意如下几点：

(1)在两种标准方程中，总有 $a>b>0$；

(2)椭圆的焦点总在长轴上；

(3)在方程 $Ax^2+By^2=C$ 中，只要 A、B、C 同号，且 $A\ne B$ 就是椭圆方程；

(4)在求椭圆的标准方程时，如果明确了焦点所在的坐标轴，方程只有一种形式；如果不明确焦点所在的坐标轴，方程有两种形式.

【复习要求】

掌握椭圆的定义，标准方程和椭圆的简单几何性质，了解椭圆性质的初步应用

【例题分析】

例 1 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1)过点(3，－2)且与椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 有相同焦点；

(2)长轴与短轴长之和为 20，焦距为 $4\sqrt{5}$；

(3)以边长为 4 的正△ABC 的顶点 B、C 为焦点，经过顶点 A.

解：(1)化简椭圆方程 $4x^2+9y^2=36$，得 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，所以其焦点在 x 轴上，

故可设所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且 $c^2=a^2-b^2$，

由题意，$c^2=9-4=5$，所以 $a^2-b^2=5$， ①

因为点(3，－2)在椭圆上，所以 $\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,$ ②

由①②，解得 $a^2=15$，$b^2=10$，所以所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.

(2)当焦点在 x 轴上时，设所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),$，

由题意，得 $\begin{cases}2a+2b=20\\2c=4\sqrt{5}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=6\\b=4\\c=2\sqrt{5}\end{cases}$．所以焦点在 x 轴上的椭圆方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$，

同理，可求焦点在 y 轴上的椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$，因此，所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 和 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

(3)以 BC 所在直线为 x 轴，BC 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系.

设所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由椭圆的定义，

得$|BC|=2c$，$|AB|+|AC|=2a$，即$2c=4$，$2a=8$，

因为$a^2=b^2+c^2$，所以$b^2=a^2-c^2=12$，所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$,

同理，可求焦点在y轴上的椭圆方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$, 因此，所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$和$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$.

【评析】求椭圆的标准方程，常用方法是待定系数法，其一般步骤是：①根据焦点所在位置设椭圆的标准方程(要注意标准方程有两个)；②由已知条件求出待定的系数a、b；③将求得的系数a、b代入所设方程，即得所求椭圆的标准方程.

例 2　已知椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{m-2}=1$,

(1)求实数m的取值范围；

(2)若椭圆C的离心率为$e=\frac{1}{2}$，求实数m的值.

解：(1)由椭圆的方程知$m-2>0$且$m-2\neq 8$，所以$m\in(2,10)\cup(10,+\infty)$.

(2)当$2<m<10$时，椭圆C的焦点在x轴上，

此时$a^2=8$，$b^2=m-2$，$c^2=a^2-b^2=10-m$，

所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{10-m}{8}=\frac{1}{4}$，解得$m=8$；

当$m>10$时，椭圆C的焦点在y轴上，

此时$a^2=m-2$，$b^2=8$，$c^2=a^2-b^2=m-10$，所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{m-10}{m-2}=\frac{1}{4}$，解得$m=\frac{38}{3}$.

综上，可得$m=8$或$m=\frac{38}{3}$.

【评析】这是一个含有参数的问题．曲线$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$表示椭圆的充要条件是$\begin{cases} m>0 \\ n>0 \\ m\neq n \end{cases}$；表示焦点在$x$轴上的椭圆的充要条件是$\begin{cases} m>n \\ n>0 \end{cases}$；表示焦点在$y$轴上的椭圆的充要条件

是$\begin{cases}n>m\\m>0\end{cases}$.

例 3 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-3，0)$，$B(3，0)$，动点 P 满足$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=10$,，设动点 P 的轨迹为 C.

(1)求轨迹 C 的方程；

(2)若 C 上有一点 M 满足$\angle AMB=30°$，求$\triangle MAB$ 的面积.

解：(1)由椭圆定义，得动点 P 的轨迹是以 A、B 为焦点，长轴长为 10 的椭圆，

设轨迹 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则 $a=5$，$c=3$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=4$,

所以轨迹 C 的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)在$\triangle MAB$ 中，由余弦定理，

得$|AB|^2=|MA|^2+|MB|^2-2|MA|\cdot|MB|\cos\angle AMB$，

即 $36=|MA|^2+|MB|^2-\sqrt{3}|MA|\cdot|MB|$

$=(|MA|+|MB|)^2-2|MA|\cdot|MB|-\sqrt{3}|MA|\cdot|MB|$，

因为$|MA|+|MB|=10$，

所以 $36=100-2|MA|\cdot|MB|-\sqrt{3}|MA|\cdot|MB|$，

解得$|MA|\cdot|MB|=64(2-\sqrt{3})$，

所以$\triangle MAB$ 的面积$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}|MA|\cdot|MB|\sin\angle AMB=16(2-\sqrt{3})$.

[评析]要关注圆锥曲线定义在求曲线方程和“焦点三角形”(如本题中的$\triangle MAB$)中的应用.

例 4 如图 8－6－1，已知圆$(x+2)^2+y^2=36$ 的圆心为 M，设 A 为圆上任一点，$N(2，0)$，线段 AN 的垂直平分线为 l，垂足 B，l 交 MA 于点 P．则

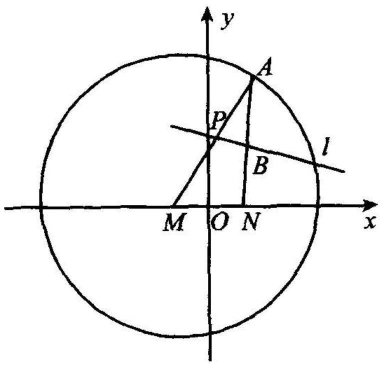


图 8－6－1

(1)点 B 曲轨迹方程是______；

(2)点 P 的轨迹方程是______.

解：(1)如图 8－6－2，在△AMN 中，

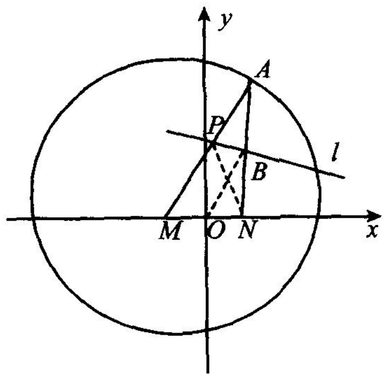


图 8－6－2

因为｜AB｜＝｜BN｜，｜OM｜＝｜ON|，所以$|OB|=\dfrac{1}{2}|AM|=3$,

所以点 B 在以 O 为圆心，半径为 3 的圆上，即其轨迹方程为 $x^2+y^2=9$.

(2)如图 8－6－2，因为 PB 为线段 AN 的垂直平分线，所以|PA｜＝|PN｜，

所以｜PM|＋|PN|＝｜PM|＋｜PA|＝6，

由椭圆定义，得点 P 的轨迹是以 M、N 为焦点，长轴长为 6 的椭圆，其轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

【评析】①要关注数形结合思想．数形结合思想不仅仅是画图，还要在图中标出及利用平面几何知识找出线线间的位置和数量关系，常用的初中平面几何知识有：中垂线性质、三角形中位线性质、等腰三角形三线合＝等．

②在求轨迹方程、研究圆锥曲线性质时，常常要结合圆锥曲线的定义、基本性质.

例 5 已知直线 l：$y=x+1$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交于 A、B 两点.

(1)求 AB 的中点坐标；

(2)求｜AB｜.

解：设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=x+1 \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，消去 y 得 $3x^2+4x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{4}{3}$，

因为点 A、B 在直线 $y=x+1$ 上，所以 $y_1=1$，$y_2=-\frac{1}{3}$，

所以交点 $A(0，1)$，$B(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$，所以(1)$AB$ 的中点坐标为 $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$；

(2) $|AB|=\sqrt{(0+\frac{4}{3})^2+(1+\frac{1}{3})^2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$

【评析】方程思想常常是解决圆锥曲线综合问题的关键.通过将直线与曲线的方程联立，可以得到它们的交点坐标. 如直线或曲线的方程中含有参数，联立它们的方程可以得到交点横坐标(或纵坐标)满足的关系，这些都为研究圆锥曲线综合问题提供方便.

例 6 已知椭圆 $C:x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 过点 $M(0，1)$的直线 l 与椭圆 C 相交于两点 A、B.

(1)若 l 与 x 轴相交于点 P，且 P 为 AM 的中点，求直线 l 的方程；

(2)设点 $N(0,\frac{1}{2})$，求 $|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}|$ 的最大值.

解：(1)设 $A(x_1，y_1)$，

因为 P 为 AM 的中点，且 P 的纵坐标为 0，M 的纵坐标为 1，

所以 $\frac{y_1+1}{2}=0$，解得 $y_1=-1$，

又因为点 $A(x_1，y_1)$在椭圆 C 上，所以 $x_1^2+\frac{y_1^2}{4}=1$，即 $x_1^2+\frac{1}{4}=1$，解得 $x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则点 A 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$ 或 $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$，

所以直线 l 的方程为 $4\sqrt{3}x-3y+3=0$，或 $4\sqrt{3}x+3y-3=0$．

(2)设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $\overrightarrow{NA}=(x_1,y_1-\frac{1}{2}),\overrightarrow{NB}=(x_2,y_2-\frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=(x_1+x_2,y_1+y_2-1)$,

则 $|\overrightarrow{NA}+|\overrightarrow{NB}|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2-1)^2}$,

当直线 AB 的斜率不存在时，其方程为 $x=0$，$A(0，2)$，$B(0，-2)$，此时 $|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}|=1$;

当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+1$，

由题设可得 A、B 的坐标是方程组 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 的解，

消去 y 得 $(4+k^2)x^2+2kx-3=0$，

所以 $\Delta=(2k)^2+12(4+k^2)=16k^2+48>0$，

$$x_1=\frac{-2k+\sqrt{16k^2+48}}{2(4+k^2)},x_2=\frac{-2k-\sqrt{16k^2+48}}{2(4+k^2)}$$

则 $x_1+x_2=\frac{-2k}{4+k^2},y_1+y_2=(kx_1+1)+(kx_2+1)=\frac{8}{4+k^2}$,

所以 $|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}|^2=(\frac{-2k}{4+k^2})^2+(\frac{8}{4+k^2}-1)^2=\frac{-12k^2}{(4+k^2)^2}+1\le 1$,

当 $k=0$ 时，等号成立，即此时 $|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}|$ 取得最大值 1．

综上，当直线 AB 的方程为 $x=0$ 或 $y=1$ 时，$|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}|$ 有最大值 1．

【评析】①关注函数思想的应用．构造函数求最值是解析几何中的一种常见方法；②设点而不求点，通过代入化简解决问题是解析几何问题的重要方法和手段．

练习 8－6

一、选择题

1．已知 $F(c，0)$是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，设 $b=c$，则椭圆的离心率为(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

2．如果方程 $x^2+my^2=2$ 表示焦点在 y 轴的椭圆，那么实数 m 的取值范围是(　　)

A．(0，＋∞)　　B．(0，2)　　C．(1，＋∞)　　D．(0，1)

3．已知椭圆的焦点为 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，P 是椭圆上一点，且｜F_1F_2｜是|PF_1｜与｜PF_2｜的等差中项，则该椭圆的方程为(　　)

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

4．设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上任一点，记△PF_1F_2 的内切圆为⊙M，则点 P 到⊙M 的切线长为(　　)

A．$2\sqrt{3}$　　B．2　　C．4　　D．$\sqrt{3}$

二、填空题

5．长轴长为 4，短轴长为 2，且焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程为______.

6．在平面α 内，有一条线段｜AB｜＝4，P 为α 内一个动点，满足｜PA｜＋｜PB｜＝6．设 M 为 AB 的中点，则｜PM｜的最大值为______，最小值为______.

7．椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为椭圆上的动点，则当 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}<0$ 时，点 P 的横坐标的取值范围是______.

8．设 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点，$A(4，4)$，点 P 为椭圆 C 上任意一点，则｜PF｜－｜PA｜的最大值为______.

三、解答题

9．已知△ABC 的两个顶点为 $B(-2，0)$，$C(2，0)$，周长为 12．

(1)求顶点 A 的轨迹方程；

(2)若直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与点 A 的轨迹交于 M，N 两点，求△BMN 的面积．

10．设 F_1、F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上的一点．已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点，且｜PF_1｜＞｜PF_2｜，求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值．

11．已知点 P 为椭圆 $x^2+2y^2=98$ 上一点，$A(0，5)$，求｜PA｜的最值．

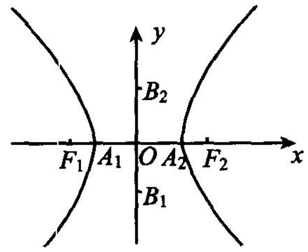
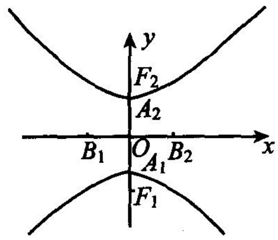
§8－7　双曲线

【知识要点】

1．双曲线定义：平面内与两定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值是常数(小于|F_1F_2｜)的点的轨迹叫做双曲线．这两个定点 F_1，F_2 叫做双曲线的焦点，两焦点的距离|F_1F_2｜叫做双曲线的焦距．

2．双曲线的标准方程和几何性质(如下表所示)：

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

图形			
性质	焦点	$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$	$F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$
	焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$，(其中 $c^2=a^2+b^2$，$c>0$)	
	范围	$\lvert x\rvert\geq a$，$y\in\mathbf{R}$	$\lvert y\rvert\geq a$，$x\in\mathbf{R}$
	对称	关于 x 轴、y 轴和原点对称	
	顶点	$(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$	$(0,\ -a)$，$(0,\ a)$
	轴	实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$	
	离心率	$e=\dfrac{c}{a}(e>1)$	

【复习要求】

了解双曲线的定义，几何图形和标准方程，知道它的简单几何性质，并了解其性质的初步应用.

【例题分析】

例 1　求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1)虚轴长为 12，离心率为 $\dfrac{5}{4}$；

(2)顶点间的距离为 6，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$.

解：(1)当焦点在 x 轴上时，设所求的双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

由题意，得 $\begin{cases}2b=12\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=8\\ b=6\\ c=10\end{cases}$，

所以焦点在 x 轴上时，双曲线的方程为 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

同理，可求得当焦点在 y 轴上时双曲线的方程为 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$.

因此所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 或 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$.

(2)方法一：当焦点在 x 轴上时，设所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

由题意，得 $\begin{cases}2a=6\\ \frac{b}{a}=\frac{3}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=3\\ b=\frac{9}{2}\end{cases}$，所以焦点在 x 轴上时，双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{81}{4}}=1$.

同理，可求得当焦点在 y 轴上时双曲线的方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

因此所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{81}{4}}=1$ 或 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

方法二：设以 $y=\pm\frac{3}{2}x$ 为渐近线的双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda\neq 0)$,

当 $\lambda>0$ 时，由题意得 $2\sqrt{4\lambda}=6$，解得 $\lambda=\frac{9}{4}$，此时双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{81}{4}}=1$;

当 $\lambda<0$ 时，由题意得 $2\sqrt{-9\lambda}=6$，解得 $\lambda=-1$，此时双曲线方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

因此所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{81}{4}}=1$ 或 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

【评析】(1)求双曲线的标准方程，常用方法是待定系数法，其一般步骤是：①根据焦点所在位置设双曲线的标准方程(要注意标准方程可能有两个)；②由已知条件求出待定的系数 a、b；③将求得的系数 a、b 代入所设方程，即得所求双曲线的标准方程.

(2)已知渐近线方程为 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1$ 时，可借助于共渐近线双曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$

来求双曲线的标准方程.

例 2 设 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则的 $|\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}|$ 值等于______.

解：因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$ 则 $|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2=(2|F_1F_2|)^2=20$,

由双曲线定义，知 $||\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}||=4$,

所以 $|\overrightarrow{PF_1}|^2-2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|+|\overrightarrow{PF_2}|^2=16$,

所以 $|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=2$.

例 3 如图 8—7—1，从双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ 的左焦点 F_1 引圆 $x^2+y^2=9$ 的切线，切点为 T，延长 F_1T 交双曲线右支于 P 点．设 M 为线段 F_1P 的中点，O 为坐标原点，则 $|TF_1|=$_______；$|MO|-|MT|$_______.

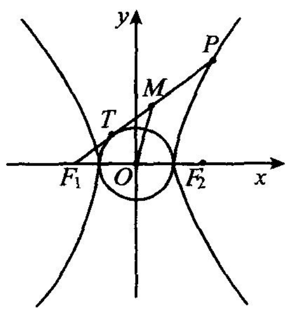


图 8—7—1

解：连接 OT，设此双曲线的实半轴、虚半轴，半焦距的长分别为 a，b，c，

则 $|OF_1|=c$，$|OT|=a$，

又 $OT\perp F_1T$，所以 $|TF_1|=\sqrt{c^2-a^2}=b=5$;

因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_1|=2|MF_1|$，$2|MO|=|PF_2|$，

所以 $|MF_1|-|MO|=a$，即 $|MT|+|TF_1|-|MO|=a$，

则 $|MO|-|MT|=|TF_1|-a=2$.

【评析】①圆锥曲线的定义反映了它的本质属性，灵活巧妙地利用它可简捷地解决一些问题．②要关注数形结合思想．数形结合思想不仅仅是画图，还要在图中标出及利用平面几何知识找出线线间的位置和数量关系，常用的初中平面几何知识有：中垂线性质、三角形中位线性质、等腰三角形三线合一等．

例 4　已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A，B 两点的距离之差的绝对值为 2．记点 C 的轨迹为 W.

(1)求轨迹 W 的方程；

(2)设 W 与直线 $y=x-2$ 交于两点 D，E，求线段 DE 的长度．

解：(1)设 $C(x，y)$，则 $||CA|-|CB||=2$，

所以点 C 的轨迹 W 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

且 $2a=2$，$2c=|AB|=2\sqrt{3}$，则 $a=1$，$b^2=c^2-a^2=2$，

所以轨迹 W 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)由 $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{2}=1 \\ y=x-2 \end{cases}$，得 $x^2+4x-6=0$，

因为 $\Delta>0$，所以直线与双曲线有两个交点，

设 $D(x_1，y_1)$，$E(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=-6$，

故 $|DE|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{5}$.

【评析】方程思想常常是解决圆锥曲线综合问题的关键．通过将直线与曲线的方程联立，可以得到它们的交点坐标，或利用韦达定理得交点横坐标(或纵坐标)满足的关系，这些都为研究圆锥曲线综合问题提供方便．

例 5　如图 8－7－2，$\triangle AOB$ 的顶点 A 在射线 l：$y=\sqrt{3}x(x>0)$ 上，A，B 两点关于 x 轴对称，O 为坐标原点，且线段 AB 上有一点 M 满足 $|AM|\cdot|MB|=3$．当点 A 在 l 上移动时，记点 M 的轨迹为 W.

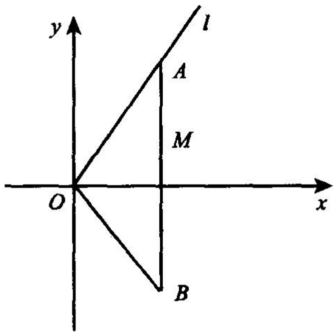


图 8－7－2

(1)求轨迹 W 的方程;

(2)设 $P(m，0)$为 x 轴正半轴上一点，求｜PM|的最小值 $f(m)$.

解：(1)因为 A，B 两点关于 x 轴对称，

所以 AB 边所在直线与 y 轴平行.

设 $M(x，y)$，由题意，得 $A(x，\sqrt{3}x)$，$B(x，-\sqrt{3}x)$

所以｜AM｜＝$\sqrt{3}x-y$，｜MB｜＝$y+\sqrt{3}x$，

因为｜AM｜•｜MB｜＝3，

所以$(\sqrt{3}x-y)\times(y+\sqrt{3}x)=3$，即 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$,

所以点 M 的轨迹 W 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\ (x\geqslant1)$.

(2)设 $M(x，y)$，则 $|MP|=\sqrt{(x-m)^2+y^2}$,

因为点 M 在 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x\geq1)$，所以 $y^2=3x^2-3$，

所以 $|MP|=\sqrt{(x-m)^2+3x^2-3}=\sqrt{4x^2-2mx+m^2-3}=\sqrt{4(x-\dfrac{m}{4})^2+\dfrac{3m^2}{4}-3}$,

若 $\dfrac{m}{4}<1$，即 $m<4$，则当 $x=1$ 时，$|MP|_{\min}=|m-1|$,

若 $\dfrac{m}{4}\geq1$，即 $m\geqslant4$，则当 $x=\dfrac{m}{4}$ 时，$|MP|_{\min}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3m^2-12}$.

所以，$|PM|$ 的最小值 $f(m)=\begin{cases}|m-1|, 0<m<4,\\ \frac{1}{2}\sqrt{3m^2-12}, m\geq 4.\end{cases}$

【评析】①关注函数思想的应用．构造函数求最值是解析几何中的一种常见方法；

②设点而不求点，通过代入化简解决问题是解析几何问题的重要方法和手段．

练习 8－7

一、选择题

1．已知双曲线的离心率为 2，焦点是(－4，0)，(4，0)，则双曲线方程为(　　)

A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　C．$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$　　D．$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$

2．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则双曲线的离心率为(　　)

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是(　　)

A．a　　B．b　　C．$\sqrt{ab}$　　D．$\sqrt{a^2+b^2}$

4．设 F_1，F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点．若点 P 在双曲线上，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 等于(　　)

A．$\sqrt{10}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{10}$　　D．$2\sqrt{5}$

二、填空题

5．设 F_1、F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，若其实轴的两个顶点将线段 F_1F_2 三等分，则此双曲线的渐近线方程为______．

6．与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 共渐近线，且过点 $A(2\sqrt{3},-3)$ 的双曲线的方程______．

7．设双曲线 $x^2+my^2=1$ 的离心率 $e>2$，则实数 m 的取值范围是______.

8. 设 P 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{12}=1$ 上的一点，F_1，F_2 是该双曲线的两个焦点，若｜PF_1｜：｜PF_2｜＝3∶2，则△PF_1F_2 的面积为______.

三、解答题

9．已知 F_1、F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点，过 F_2 作垂直于 x 轴的直线交双曲线于点 P，且∠PF_1F_2＝30°．求双曲线的渐近线方程.

10．如图 8－7－3，已知双曲线 C 的两条渐近线过坐标原点，且渐近线与以点 $A(\sqrt{2},0)$ 为圆心，1 为半径的圆相切，双曲线 C 的一个顶点 A' 与点 A 关于直线 $y=x$ 对称．设直线 l 过点 A，斜率为 k.

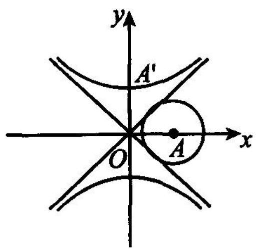


图 8－7－3

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)当 $k=1$ 时，在双曲线 C 的上支上求点 B，使其与直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$.

11．设 A、B 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 上的两点，点 $N(1，2)$是线段 AB 的中点.

(1)求直线 AB 的方程；

(2)如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C、D 两点，那么 A、B、C、D 四点是否共圆，为什么?

§8－8　抛物线

【知识要点】

1．抛物线定义：平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线．点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线．

2．抛物线的标准方程和几何性质(见下页表所示)：

3．几点注意

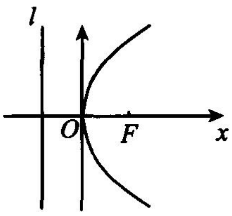
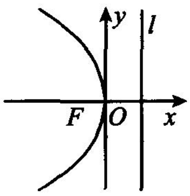
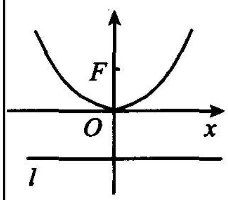
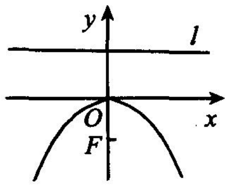
(1)p 的几何意义：焦参数 p 是焦点到准线的距离，所以 p 恒为正数．

(2)标准方程的左边是二次项，右边是一次项，且二次项的系数为 1．通过 x，y 的范围可以判定抛物线的开口方向．

(3)抛物线的焦点弦具有很多重要性质，且应用广泛．

【复习要求】

了解双曲线的定义，几何图形和标准方程，知道它的简单几何性质，并了解其性质的初步应用．

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$y^2=2px(p>0)$</td><td>$y^2=-2px(p>0)$</td><td>$x^2=2py(p>0)$</td><td>$x^2=-2py(p>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">性质</td><td>焦点</td><td>$F(\frac{p}{2},0)$</td><td>$F(-\frac{p}{2},0)$</td><td>$F(0,\frac{p}{2})$</td><td>$F(0,-\frac{p}{2})$</td></tr>
<tr><td>准线</td><td>$x=-\frac{p}{2}$</td><td>$x=\frac{p}{2}$</td><td>$y=-\frac{p}{2}$</td><td>$y=\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>$x\geq0$，$y\in\mathbf{R}$</td><td>$x\leq0$，$y\in\mathbf{R}$</td><td>$x\in\mathbf{R}$，$y\geq0$</td><td>$x\in\mathbf{R}$，$y\leq0$</td></tr>
<tr><td>轴</td><td colspan="2">关于 x 轴对称</td><td colspan="2">关于 y 轴对称</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td colspan="4">(0，0)</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="4">$e=1$</td></tr>
</table>

【例题分析】

例 1　(1)求以原点为顶点，坐标轴为对称轴，且过点 $A(2，-4)$的抛物线的方程；

(2)平面内一个动点 P 到点 $F(4，0)$的距离比它到直线 l：$x=-6$ 的距离小 2 个单位，求动点 P 的轨迹方程.

解：(1)由于点 $A(2，-4)$在第四象限，且坐标轴为对称轴，

所以设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$或 $x^2=-2py(p>0)$，

将 A 点的坐标代入，分别得 $p=4$ 或 $p=\frac{1}{2}$,

所以所求的抛物线方程为 $y^2=8x$ 或 $x^2=-y$.

(2)方法一：设动点 $P(x，y)$，

所以点 P 到直线 l：$x=-6$ 的距离为 $d=|x+6|$，

由题意得 $|PF|=d-2$，即 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|x+6|-2$,

当 $x>-6$ 时，上式化为 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=x+4$，即 $y^2=16x$；

当 $x\leqslant -6$ 时，上式化为 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=-x-8$，

因为 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}\geq\sqrt{(x-4)^2}=4-x>-x-8$,

所以符合 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=-x-8$ 的点 P 不存在.

所以动点 P 的轨迹方程为 $y^2=16x$.

方法二：由图象易分析出点 P 不可能在 y 轴左侧(在此略)，

设直线 l_1：$x=-4$，则 y 轴右侧的点 P 到直线 l_1 的距离比它到直线 l：$x=-6$ 的距离小 2，

由题意，P 到点 $F(4，0)$的距离等于它到直线 l_1：$x=-4$ 的距离，

根据抛物线的定义，知动点 P 的轨迹方程为 $y^2=16x$.

【评析】求圆锥曲线的方程时，要注意：①其标准方程的不唯一性；②灵活使用圆锥曲线的定义常常可以使问题简化.

例 2　已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 $P(m，n)$在抛物线上.

(1)求 $|PF|$ 的值(用 m，p 表示)；

(2)设点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$在抛物线上，且 $2m=x_1+x_2$，求证：$2|PF|=|P_1F|+|P_2F|$；

(3)设过 F 的直线 l 与 C 相交于两点 A，B，判断以 AB 为直径的圆与 y 轴的位置关系，并说明理由.

(1)解：抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的准线为 $x=-\dfrac{p}{2}$,

由抛物线的定义，知 $|PF|$ 等于 P 到准线 $x=-\dfrac{p}{2}$,的距离，所以 $|PF|=m+\dfrac{p}{2}$·

(2)证明：由(1)知 $|PF|=m+\dfrac{p}{2},|P_1F|=x_1+\dfrac{p}{2},|P_2F|=x_2+\dfrac{p}{2}$,

所以 $2|PF|=2m+p$，$|P_1F|+|P_2F|=x_1+x_2+p$，

因为 $2m=x_1+x_2$，

所以 $2|PF|=|P_1F|+|P_2F|$.

(3)结论：以 AB 为直径的圆与 y 轴相交，理由如下：设 $A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$，则 AB 的

中点为 $M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$，

由(1)知，$|AB|=|AF|+|BF|=x_A+x_B+p$，

所以以 AB 为直径的圆的半径为 $r=\frac{x_A+x_B+p}{2}$

因为 AB 的中点 M 到 y 轴的距离为 $\frac{x_A+x_B}{2}<r$，

所以以 AB 为直径的圆与 y 轴相交.

【评析】求抛物线的焦点弦长，利用定义比利用弦长公式更为简便．即：已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 相交于两点 A，B．设 $A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$，则有 $|AB|=x_A+x_B+p$.

例 3　设 F 为抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，点 P 为抛物线 C 上一点，若点 P 到点 F 的距离等于点 P 到直线 l：$x=-1$ 的距离.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)设过点 P 的直线 l_1 与抛物线 C 的另一交点为 Q 点，且线段 PQ 的中点坐标为(3，2)，求 $|PQ|$.

解：(1)由抛物线定义知：抛物线 C 的准线方程为 $x=-1$.

因为抛物线方程为标准方程，所以 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$，

所以抛物线 C 的标准方程是 $y^2=4x$.

(2)设直线 PQ：$y-2=k(x-3)$或 $x=3$(舍去)，$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，

解方程组 $\begin{cases} y^2=4x \\ y-2=k(x-3) \end{cases}$，

消去 y，得 $k^2x^2-(6k^2-4k+4)x+(3k-2)^2=0$，

由题意 $k\neq0$，得 $x_1+x_2=\frac{6k^2-4k+4}{k^2}, x_1\cdot x_2=\frac{(3k-2)^2}{k^2}$.

$\Delta=(6k^2-4k+4)^2-4\times k^2\times(3k-2)^2>0$　　(*)

因为线段 PQ 的中点坐标为(3，2)，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3k^2-2k+2}{k^2}=3$,

解得 $k=1$，验证知(*)成立．

所以 $x_1+x_2=6$，$x_1\cdot x_2=1$，

所以 $|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8$.

【评析】方程思想常常是解决圆锥曲线综合问题的关键．通过将直线与曲线的方程联立，可以得到它们的交点坐标，或利用韦达定理得交点横坐标(或纵坐标)满足的关系，这些都为研究圆锥曲线综合问题提供方便．

例 4　已知抛物线 C：$y^2=4x$，设 $B(3，0)$，对 C 上的动点 M，求 $|BM|$ 的最小值．

【分析】建立距离的目标函数，转化为研究函数的最值问题．

解：设动点 M 的坐标为$(x_0，y_0)$，

$\therefore |BM|=\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{x_0^2-6x_0+9+y_0^2}$.

$\because y_0^2=4x_0$，

$\therefore |BM|=\sqrt{x_0^2-2x_0+9}=\sqrt{(x_0-1)^2+8}$.

$\because x_0\geqslant 0$，

$\therefore$当 $x_0=1$ 时，$|BM|_{\min}=2\sqrt{2}$.

即 M 的坐标为$(1，\pm 2)$时，$|BM|$ 取到最小值 $2\sqrt{2}$.

【评析】①关注函数思想的应用．构造函数求最值是解析几何中的一种常见方法；②设点而不求点，通过代入化简解决问题是解析几何问题的重要方法和手段．

练习 8－8

一、选择题

1．抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是(　　)

A．$x=-2$　　　B．$x=-4$　　　C．$y=-2$　　　D．$y=-4$

2．设 $a\neq 0$，$a\in\mathbf{R}$，则抛物线 $y=4ax^2$ 的焦点坐标为(　　)

A．(a，0)　　B．(0，a)　　C．$(0,\dfrac{1}{16a})$　　D．随 a 的符号而定

3．抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是(　　)

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{7}{5}$　　C．$\dfrac{8}{5}$　　D．3

4．过点(－1，0)作抛物线 $y=x^2+x+1$ 的切线，则其中一条切线为(　　)

A．$2x+y+2=0$　　B．$3x-y+3=0$　　C．$x+y+1=0$　　D．$x-y+1=0$

二、填空题

5．抛物线 $x^2=-4y$ 的焦点坐标是______，准线方程是______．

6．直线 $y=x-1$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得线段的中点坐标是______．

7．已知抛物线 $y^2=4x$，过点 $P(4,0)$的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是______．

8．以抛物线 $y^2=8x$ 上一点 A 为圆心，经过坐标原点 O，且与直线 $x+2=0$ 相切的圆的方程是______．

三、解答题

9．给定直线 l：$y=2x-16$，抛物线 C：$y^2=ax(a>0)$．

(1)当抛物线 C 的焦点在直线 l 上时，确定抛物线 C 的方程；

(2)若△ABC 的三个顶点都在(1)所确定的抛物线 C 上，且点 A 的纵坐标为 8，直线 BC 的方程为 $4x+y-40=0$，求△ABC 的重心的坐标．

10．给定抛物线 C：$y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 且斜率为 1 的直线 l 与 C 相交 A、B 两点，求以 AB 为直径的圆的方程．

11．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，A 是抛物线上横坐标为 4、且位于 x 轴上方的点，A 到抛物线准线的距离等于 5，过 A 作 AB 垂直 y 轴于点 B，设 OB 的中点为 M.

(1)求抛物线方程；

(2)过 M 作 $MN\perp FA$，垂足为 N，求点 N 的坐标.

§8－9　圆锥曲线综合问题

【知识要点】

1．在圆锥曲线的综合问题中，要关注数学思想与方法的渗透.

(1)数形结合思想不是简单的画图，而应该要分析图形中隐含的量及位置间的关系.

(2)直线与圆锥曲线联立不是方程思想的全部，它只是方程思想的一个重要形式.

2．直线与圆锥曲线.

设直线 $Ax+By+C=0$ 与圆锥曲线 $f(x，y)=0$ 相交于点 $A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$.

将直线 $Ax+By+C=0$ 与圆锥曲线 $f(x，y)=0$ 联立，得方程组$\begin{cases}Ax+By+C=0\\ f(x,y)=0\end{cases}$，

消去 y(或 x)，得到关于 x(或 y)的一元二次方程，记为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，

(1)应用判别式，则有①$\Delta>0\Leftrightarrow$ 有两个实数解(有两个交点)；

②$\Delta=0\Leftrightarrow$ 有一个实数解(有一个交点)；

③$\Delta<0\Leftrightarrow$ 没有实数解(没有交点).

对于双曲线和抛物线在考虑交点个数时，还应注意到形的问题.

(2)应用韦达定理，可得 $x_A+x_B=-\dfrac{b}{a},x_A\cdot x_B=\dfrac{c}{a}$.

在研究中点、弦长等问题时，利用韦达定理常可以使问题得到解决.

3．会求简单的轨迹方程问题.

4．关注解析几何与数列、向量等知识的综合，注意把握它们的内在联系.

【例题分析】

例 1 (1)平面内的直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 最多有______个交点；

(2)若平面内与 y 不平行的直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 不相交，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是

解：(1)设直线 l：$Ax+By+C=0$.

则交点满足方程组 $\begin{cases}Ax+Bx+C=0\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，消去 y，得关于 x 的方程，记为 $mx^2+nx+r=0$，

上述方程最多有两个解 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，代入直线 l：$Ax+By+C=0$，得两个交点，

所以直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 最多有两个交点.

(2)方法一：设直线 l：$y=kx+b$，

由 $\begin{cases}y=kx+b\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消去 y，得 $(9-16k^2)x^2-32kbx-16b^2-144=0$，

因为直线 l 与双曲线不相交，

所以 $\Delta=(32kb)^2+4(9-16k^2)(16b^2+144)<0$，

化简，得 $k^2>\frac{9}{16}+\frac{1}{16}b^2$，所以 $k^2>\frac{9}{16}+\frac{1}{16}b^2\geq\frac{9}{16}$，即 $|k|\geq\frac{3}{4}$，

故直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $k\in(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},+\infty)$.

方法二：数形结合可以得到 $k\in(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},+\infty)$.

【评析】研究两个曲线的交点个数问题，可以用判别式，也可以用数形结合方法.

例 2 已知两定点 $M(-1,0)$、$N(1,0)$，直线 l：$y=-2x+3$，在 l 上满足 $|PM|+|PN|=4$ 的点 P 有(　　)

A．0 个　　　B．1 个　　　C．2 个　　　D．3 个

【分析】若设 $P(x,y)$，利用 $|PM|+|PN|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$ 试图

解出点 P 的坐标，会发觉相当困难．如观察到$|PM|+|PN|=4$ 的几何意义，此题迎刃而解．

解： 因为定点 $M(-1，0)$、$N(1，0)$，且$|PM|+|PN|=4$，

所以点 P 在焦距为 2，长轴长为 4 的椭圆上，即在椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，

因为直线 l：$y=-2x+3$ 过点 $Q(\frac{3}{2},0)$，且点 Q 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 内一点，

所以直线 l 与椭圆 C 有两个交点，

即在 l 上满足$|PM|+|PN|=4$ 的点 P 有 2 个，选 C．

【评析】 数形结合思想是解析几何综合题常用的数学思想方法，利用它可以使问题得到简化，使用它时要关注圆锥曲线定义及性质的应用．

例 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F，过点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，并且线段 AB 的中点在直线 $x+y=0$ 上，求直线 AB 的方程．

解： 因为椭圆的左焦点 $F(-1，0)$，所以设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)(k\neq 0)$，

代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，整理得$(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$．

∵直线 AB 过椭圆的左焦点 F，∴方程有两个不等实根，

记 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，AB 中点 $N(x_0，y_0)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{2k^2+1},x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{2k^2}{2k^2+1},y_0=k(x_0+1)=\frac{k}{2k^2+1}$，

∵线段 AB 的中点 N 在直线 $x+y=0$ 上，

∴ $x_0+y_0=-\frac{2k^2}{2k^2+1}+\frac{k}{2k^2+1}=0$，解得 $k=0$，或 $k=\frac{1}{2}$．

当直线 AB 与 x 轴垂直时，线段 AB 的中点 F 不在直线 $x+y=0$ 上．

∴直线 AB 的方程是 $y=0$，或 $x-2y+1=0$．

【评析】 利用直线与圆锥曲线联立，可以解决一些与弦中点、弦长有关的综合问题．

例 4 已知双曲线 C：$3x^2-y^2=1$，过点 $M(0，-1)$的直线 l 与双曲线 C 交于 A、B 两点．

(1)若$|AB|=\sqrt{10}$，求直线 l 的方程；

(2)若点 A、B 在 y 轴的同一侧，求直线 l 的斜率的取值范围．

解：(1)设直线 l：$y=kx-1$ 或 $x=0$(舍去)，$A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，

联立$\begin{cases}3x^2-y^2=1,\\ y=kx-1.\end{cases}$

消去 y，得$(3-k^2)x^2+2kx-2=0$．

由题意，得 $3-k^2\neq0$，$\Delta=(2k)^2-4\cdot(3-k^2)\cdot(-2)=24-4k^2>0$，

且 $x_1+x_2=\dfrac{2k}{k^2-3},x_1x_2=\dfrac{2}{k^2-3}$,

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}.$$

即$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\dfrac{2k}{k^2-3})^2-4\times\dfrac{2}{k^2-3}}=\sqrt{10}$,

解得 $k=\pm1$，或$k=\pm\sqrt{\dfrac{33}{7}}$．

验证知 $3-k^2\neq0$ 且 $\Delta>0$，

所以直线 l 的方程为：$y=\pm x-1$，或$y=\pm\sqrt{\dfrac{33}{7}}x-1$.

(2)由 A、B 在 y 轴的同一侧，得$\begin{cases}3-k^2\neq0\\ x_1x_2=\dfrac{2}{k^2-3}>0\\ \Delta=24-4k^2>0\end{cases}$，

解得 $k\in(-\sqrt{6}，-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}，\sqrt{6})$.

【评析】在研究直线与双曲线的交点个数问题时，除了考虑判别式外，还应该注意到交点位置．一般地，如果联立消去 y 后，得到关于 x 的方程为 $ax^2+bx+c=0$，那么

①当直线与双曲线有两个交点时，则$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$;

②当直线与双曲线左支有两个交点时，则$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$;

③当直线与双曲线右支有两个交点时，则$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$;

④当直线与双曲线左右两支各交一点时，则$\begin{cases} a \neq 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases}$;

⑤当直线与双曲线有一个交点时，则$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$(即直线与双曲线相切)或 a＝0(即直线与渐近线平行)；

⑥当直线与双曲线无交点时，则$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

例 5　已知椭圆的中心在原点，一个焦点是 $F(2，0)$，且离心率 $e = \dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}(\lambda > 0)$.

(1)求椭圆的方程(用λ表示)；

(2)若存在过点 $A(1，0)$的直线 l，使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上，求λ的取值范围.

解:(1)因为$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}$, 且 c＝2, 所以 a＝$\sqrt{\lambda}$, 所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{\lambda} + \dfrac{y^2}{\lambda - 4} = 1(\lambda > 4)$.

(2)设点 F 关于直线 l 的对称点 $M(x_0，y_0)$，

设 l：$y＝k(x－1)$，

由点 M 在椭圆上，得$\dfrac{x_0^2}{\lambda} + \dfrac{y_0^2}{\lambda - 4} = 1$,　　①

由 $FM \perp l$，得 $\frac{y_0-0}{x_0-2}=-\frac{1}{k}$, ②

由 FM 的中点在对称轴 l 上，得 $\frac{y_0}{2}=k(\frac{x_0+2}{2}-1)$, ③

将③代入①②，消 y_0 得 $(\lambda-4)x_0^2+\lambda k^2x_0^2=\lambda(\lambda-4)$, ④

$$\frac{kx_0}{x_0-2}=-\frac{1}{k}, \quad ⑤$$

将⑤代入④，消 k 得 $4x_0^2-2\lambda x_0+\lambda(\lambda-4)=0$, ⑥

由 $\Delta=4\lambda^2-16\lambda(\lambda-4)\geqslant 0$，解得 $\lambda\le\frac{16}{3}$,

验证知⑥存在根 $x_0\in[-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}](\lambda>4)$,

所以 $4<\lambda\le\frac{16}{3}$.

【评析】方程思想是解决圆锥曲线综合问题的一种重要的思想方法，但直线与圆锥曲线联立不是方程思想的全部.

例 6 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A，C 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，对角线 BD 所在直线的斜率为 1.

(1)当直线 BD 过点(0，1)时，求直线 AC 的方程;

(2)当$\angle ABC=60°$ 时，求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

【分析】建立面积的目标函数，将问题转化为研究函数的最值问题.

解：(1)由题意，得直线 BD 的方程为 $y=x+1$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$.

于是可设直线 AC 的方程为 $y=-x+n$.

由 $\begin{cases}x^2+3y^2=4\\ y=-x+n\end{cases}$，得 $4x^2-6nx+3n^2-4=0$.

因为 A，C 在椭圆上，所以 $\Delta=-12n^2+64>0$，解得 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

设 A，C 两点坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

则 $x_1+x_2=\frac{3n}{2}, x_1x_2=\frac{3n^2-4}{4}, y_1=-x_1+n, y_2=-x_2+n$.

所以 $y_1+y_2=\frac{n}{2}$. 所以 AC 的中点坐标为 $(\frac{3n}{4},\frac{n}{4})$.

由四边形 $ABCD$ 为菱形可知，点 $(\frac{3n}{4},\frac{n}{4})$ 在直线 $y=x+1$ 上，

所以 $\frac{n}{4}=\frac{3n}{4}+1$, 解得 $n=-2$.

所以直线 AC 的方程为 $y=-x-2$，即 $x+y+2=0$.

(2)因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60°$，

所以 $|AB|=|BC|=|CA|$. 所以菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}|AC|^2$.

由(1)可得 $|AC|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{-3n^2+16}{2}$,

所以 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(-3n^2+16)(-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3})$.

所以当 $n=0$ 时，菱形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $4\sqrt{3}$.

【评析】要关注函数思想在圆锥曲线综合题中的应用.

例 7　如图 8—9—2，设离心率为 e 的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，斜率为 k 的直线过点 F，且与双曲线右支、y 轴及双曲线左支的交点依次为 P、Q、R. O 为坐标原点.

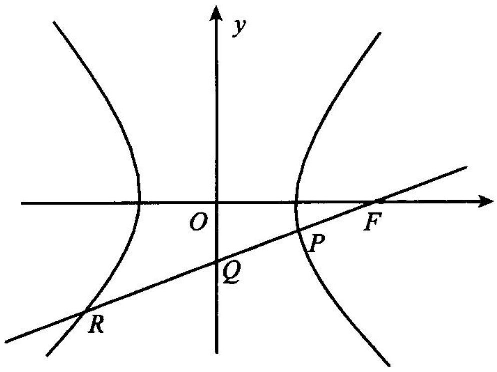


图 8－9－2

(1)试比较 e^2 与 $1+k^2$ 的大小；

(2)若 $ek=2$，且 $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}=\dfrac{5}{2}$，求双曲线 C 的方程.

解：(1)设过右焦点 $F(c，0)(c>0)$且斜率为 k 的直线为 $y=k(x-c)$，$P(x_1，y_1)$，$R(x_2，y_2)$，

解方程组$\begin{cases} y=k(x-c) \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，消去 y，

得$(b^2-a^2k^2)x^2+2ca^2k^2x-(a^2c^2k^2+a^2b^2)=0$，

∵直线与双曲线 C 的两支分别交于点 P、R，

∴$b^2-a^2k^2\neq 0$，且 $x_1x_2=-\dfrac{a^2c^2k^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}<0$,

∵$a^2c^2k^2+a^2b^2>0$，∴$b^2-a^2k^2>0$，

∴$c^2-a^2-a^2k^2>0$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}-1-k^2>0,\therefore e^2>1+k^2$.

(2)设 $Q(0，yQ)$，代入 $y=k(x-c)$，

得 $y_Q=-kc$，∵ $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$,

∴$(c，0)+(0，-kc)=2(x_1，y_1)$

∴ $x_1=\dfrac{c}{2},y_1=\dfrac{-kc}{2}$,即 $P(\dfrac{c}{2},\dfrac{-kc}{2})$,

把点 P 的坐标代入双曲线 C 的方程，得 $\frac{c^2}{4a^2}-\frac{k^2c^2}{4b^2}=1$,

即 $c^2(c^2-a^2)-a^2k^2c^2=4a^2(c^2-a^2)$，化简得 $e^4-5e^2-k^2e^2+4=0$，

$\because ek=2$，$\therefore e^4-5e^2=0$，解得 $e=\sqrt{5},k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\because \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{5}{2},\therefore (\frac{c}{2},\frac{-kc}{2})\cdot(c,0)=\frac{5}{2}$，解得 $c=\sqrt{5}$,

$\because e=\sqrt{5}$，$\therefore a=1$，$b=2$，

故双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

【评析】要关注解析几何与其他知识的综合，掌握其内在联系.

练习 8－9

一、选择题

1．设椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，右焦点与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点相同，则此椭圆的方程为(　　)

A．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　C．$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$　　D．$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

2．双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域，表示该区域的不等式组是(　　)

A．$\begin{cases}x-y\ge 0\\x+y\ge 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　　B．$\begin{cases}x-y\ge 0\\x+y\le 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　　C．$\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\le 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　　D．$\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\ge 0\\0\le x\le 3\end{cases}$

3．设斜率为 1 的直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于不同的两点 A、B，则使 $|AB|$ 为整数的直线 l 共有(　　)

A．4 条　　B．5 条　　C．6 条　　D．7 条

4．已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，满足 $\overrightarrow{MF_1}-\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆离

心率的取值范围是(　　)

A．(0，1)　　　　B．$(0,\dfrac{1}{2}]$　　　　C．$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　　　　D．$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

二、填空题

5．若直线 $ax-y+1=0$ 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，则实数 $a=$______.

6．已知圆 C：$x^2+y^2-6x-4y+8=0$．以圆 C 与坐标轴的交点分别作为双曲线的一个焦点和顶点，则适合上述条件的双曲线的标准方程为______.

7．在△ABC 中，∠$A=90°$，$\tan B=\dfrac{3}{4}$ 若以 A，B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 $e=$______.

8．已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，A，B 是 C 上的两个点，线段 AB 的中点为 $M(2，2)$，则△ABF 的面积等于______.

三、解答题

9．如图 8－9－2，在以点 O 为圆心，$|AB|=4$ 为直径的半圆 ADB 中，$OD\perp AB$，P 是半圆弧上一点，∠$POB=30°$，曲线 C 是满足$||MA|-|MB||$为定值的动点 M 的轨迹，且曲线 C 过点 P.

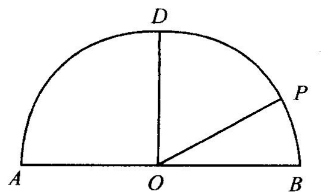


图 8－9－2

(1)建立适当的平面直角坐标系，求曲线 C 的方程；

(2)设过点 D 且斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E、F．求△OEF 的面积.

10．抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 $x+y=0$ 对称的两点，求 a 的取值范围.

11．已知椭圆$C:x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，过点$M(0，3)$的直线l与椭圆C相交于不同的两点A、B．

(1)若l与x轴相交于点N，且A是MN的中点，求直线l的方程；

(2)设P为椭圆上一点，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OP}$($O$为坐标原点)．求当$|AB|<\sqrt{3}$时．实数$\lambda$的取值范围．

习题8

一、选择题

1．直线$y=3x$绕原点逆时针旋转90°，所得到的直线为(　　)

A．$y=-\dfrac{1}{3}x$　　B．$y=\dfrac{1}{3}x$　　C．$y=3x-3$　　D．$y=-3x$

2．若过点$A(4,0)$的直线l与曲线$(x-2)^2+y^2=1$有公共点，则直线l的斜率的取值范围为(　　)

A．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　C．$[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

3．设变量x，y满足约束条件：$\begin{cases}y\ge x,\\x+2y\le 2,\\x\ge -2.\end{cases}$，则 $z=x-3y$的最小值(　　)

A．-2　　B．-4　　C．-6　　D．-8

4．已知点P是抛物线$y^2=2x$上的一个动点，则点P到点$(0，2)$的距离与P到该抛物线准线的距离之和的最小值为(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　B．3　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\dfrac{9}{2}$

5．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点$F$，$P$为$C$上任意一点．若$M$为线段$FP$

的中点，则动点 M 的轨迹是(　　)

A．焦距为 $2\sqrt{a^2+b^2}$ 的双曲线

B．焦距为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的双曲线

C．焦距为 $2\sqrt{a^2-b^2}$ 的双曲线

D．两条抛物线

二、填空题

6．已知双曲线 $\frac{x^2}{n}-\frac{y^2}{12-n}=1$ 的离心率是 $\sqrt{3}$．则 $n=$______．

7．已知椭圆中心在原点，一个焦点为 $F(-2\sqrt{3},0)$，且长轴长是短轴长的 2 倍，则该椭圆的标准方程是______．

8．将圆 $x^2+y^2=1$ 沿 x 轴正向平移 1 个单位后得到圆 C，则圆 C 的方程是______，若过点(3，0)的直线 l 和圆 C 相切，则直线 l 的斜率为______．

9．如图 8－1，F_1、F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆上，$\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，则 b^2 的值是______．

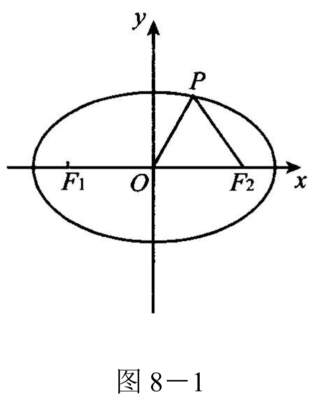


图 8－1

10．过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 的一条直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于______．

三、解答题

11．设直线 l 过点 $A(-1，3)$，且和直线 $3x+4y-12=0$ 平行．

(1)求直线 l 的方程；

(2)若点 $B(a，1)$到直线 l 的距离小于 2，求实数 a 的取值范围．

12．已知圆 C：$x^2+y^2-4x=0$，动圆 M 与 y 轴相切，又与圆 C 外切．

(1)若圆 M 过点 $A(4，4)$，求圆 M 的方程；

(2)求动圆圆心的轨迹方程．

13．在直角坐标系 xOy 中，点 P 到两点$(0，-\sqrt{3})$，$(0，\sqrt{3})$的距离之和等于 4，设点 P 的轨迹为 C，直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A，B 两点．

(1)写出 C 的方程；

(2)若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，求 k 的值．

14．已知抛物线 C：$y^2=4x$，点 $M(m，0)$在 x 轴的正半轴上，过 M 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，O 为坐标原点．

(1)若 $m=1$，l 的斜率为 1，求以 AB 为直径的圆的方程；

(2)若存在直线 l 使得$|AM|$，$|OM|$，$|MB|$成等比数列，求实数 m 的取值范围．

专题 08　解析几何参考答案

练习 8－1　直角坐标系

一、选择题

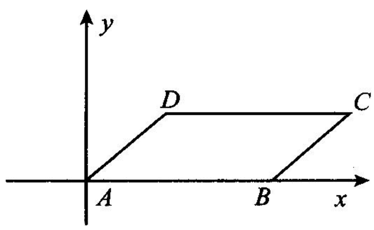
1．A　　2．D　　3．C　　4．B

二、填空题

5．$\{1, -5\}$，$\{x \mid x \geqslant 1$，或 $x \leqslant -5\}$　　6．$(-10, -1)$　　7．$\frac{5}{2}$　　8．$(3, 4, 2)$，$(\frac{3}{2}, 2, 1)$，$(\frac{9}{2}, 6, 3)$

三、解答题

9．证明：如图，以点 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，向右为正方向，过 A 作 AB 的垂线为 y 轴，向上为正方向．



设 $AB=a$，点 $D(m, n)$，则 $B(a, 0)$，$C(m+a, n)$，

所以 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=a^2+(\sqrt{m^2+n^2})^2+a^2+(\sqrt{m^2+n^2})^2$

$$=2(a^2+m^2+n^2),$$

又 $AC^2+BD^2=(\sqrt{(m+a)^2+n^2})^2+(\sqrt{(m-a)^2+n^2})^2=2(a^2+m^2+n^2)$,

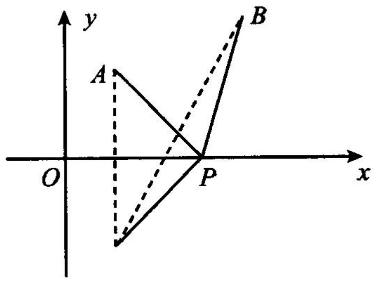
所以 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$．

10．证明：因为 $|AC|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}$,

$$|BC|=\sqrt{(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6},$$

所以 $|AC|=|BC|$，则△ABC 为等腰三角形．

11．解：如图，设 P 为 x 轴上任一点，点 A 关于 x 轴的对称点为 A'，



则 A' (1，－3)，

因为｜AP｜＝｜$A'P$｜，

所以｜AP｜＋｜BP｜＝｜$A'P$｜＋｜BP｜≥｜$A'B$｜(当且仅当 P 为 AB 与 x 轴的交点时取等号)，

因为｜$A'B$｜＝$\sqrt{(4-1)^2+(5+3)^2}=\sqrt{73}$，所以｜$AP$｜＋｜$BP$｜的最小值为$\sqrt{73}$.

练习 8－2　直线的方程

一、选择题

1．C　　2．A　　3．B　　4．C

二、填空题

5．2　　6．$7x+24y-96=0$ 或 $x=0$　　7．9　　8．$\dfrac{1}{2}$

三、解答题

9．(1)解：点 A 到直线 $2x+3y-2=0$ 的距离 d 即为｜PA｜的最小值．

所以，$|PA|_{\min}=\dfrac{|2+9-2|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{9\sqrt{13}}{13}$.

(2)解：因为｜PA｜＝｜PB｜，所以 P 点在 AB 的垂直平分线 l 上，

AB 的中点为(0，－1)，$k_{AB}=\dfrac{3+5}{1+1}=4$，所以 $k_l=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{4}$,

故 AB 的垂直平分线 $l: y=-\dfrac{1}{4}x-1$,

又点 P 在直线 $2x+3y-2=0$ 上，所以，解方程组 $\begin{cases}2x+3y-2=0\\ y=-\dfrac{1}{4}x-1\end{cases}$，得 $P(4，-2)$．

10．解：设直线 l 为：$y=kx+1$ 或 $x=0$(舍)，

设直线 l 与 l_1，l_2 分别相交于点 $A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$，

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ x-3y+10=0\end{cases}$，解得 $x_A=\dfrac{7}{3k-1}$,

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ 2x+y-8=0\end{cases}$，解得 $x_B=\dfrac{7}{k+2}$,

因为 $P(0，1)$是 AB 的中点，则 $\dfrac{7}{3k-1}+\dfrac{7}{k+2}=0$，解得 $k=-\dfrac{1}{4}$．

故所求直线方程为 $y=-\dfrac{1}{4}x+1$, 即 $x+4y-4=0$．

11．解：设点 P 的坐标为$(x，y)$，由题设有 $\dfrac{|PM|}{|PN|}=\sqrt{2}$,

即 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. 整理得 $x^2+y^2-6x+1=0$．①

因为点 N 到 PM 的距离为 1，$|MN|=2$，

所以$\angle PMN=30°$，则直线 PM 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 直线 PM 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.②

将②式代入①式整理得 $x^2-4x+1=0$．

解得 $x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$.

代入②式得点 P 的坐标为 $(2+\sqrt{3},1+\sqrt{3})$ 或 $(2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$;

$(2+\sqrt{3},-1-\sqrt{3})$ 或 $(2-\sqrt{3},1-\sqrt{3})$．

直线 PN 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$．

练习 8－3　简单的线性规划问题

一、选择题

1．C　　2．B　　3．B　　4．B

二、填空题

5．4　　6．$[\frac{3}{2},+\infty)$　　7．［0，10］　8．3

三、解答题

9．$\sqrt{2}$．

10．解：设投资人对甲、乙两个项目分别投资 x、y 万元，

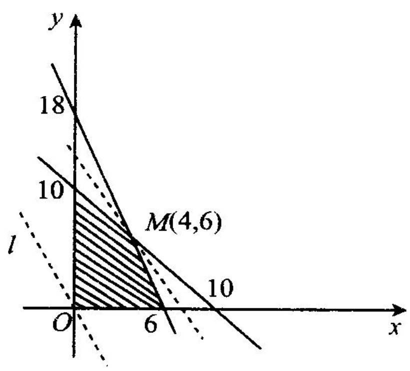
由题意知 $\begin{cases} x+y\le 10, \\ 0.3x+0.1y\le 1.8, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

目标函数为 $z=x+0.5y$，

上述不等式组表示的平面区域如右图所示，阴影部分(含边界)即为可行域．

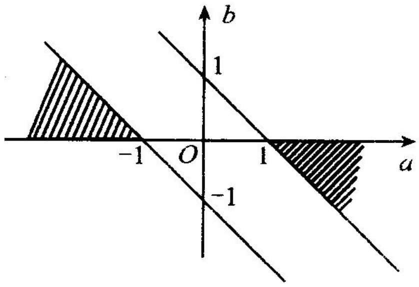
作直线 l：$x+0.5y=0$，并作平行于直线 l 的一组直线与可行域相交，其中有一条直线经过可行域上的 M 点，且与直线 l 的距离最大，此时目标函数达到最大值．这里 M 点是直线 $x+y=10$ 和 $0.3x+0.1y=1.8$ 的交点，容易解得 $M(4，6)$，此时 z 取到最大值 $1\times 4+0.5\times 6=7$．

答：投资人用 4 万元投资甲项目，用 6 万元投资乙项目，才能确保在可能的资金亏损不超过 1.8 万元的前提下，使可能的盈利最大．



11．(1)解：区域如图所示．

(2)由上述区域，可得｜a｜＞1．



练习 8－4　圆的方程

一、选择题

1．C　　2．A　　3．D　　4．B

二、填空题

5．3　　6．$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$　　7．3　　8．$a\geqslant 2$

三、解答题

9．(1)$x+y=0$；(2) $a=\pm\sqrt{2}$．

10．解：设所求圆的圆心 $D(a，b)$，半径为 r．

则 D 到 x 轴，y 轴的距离分别为｜b｜，｜a｜，

由题设知圆 D 截 x 轴所得劣弧所对的圆心角为 90°，知圆 D 截 x 轴所得弦长为 $\sqrt{2}r$，

故 $r^2=2b^2$，

由圆 D 截 y 轴所得弦长为 2，得 $r^2=a^2+1$，

由题意，得 $\begin{cases} r^2=a^2+1 \\ r^2=2b^2 \\ \dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ r=\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ r=\sqrt{2} \end{cases}$

所以，所求的圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$．

11．解：圆 C 的圆心 $C(1，2)$，半径为 5，

设点 C 到直线 l 的距离为 d，l 被圆 C 截得的线段的长度 z，

则 $(\frac{z}{2})^2+d^2=25$，即 $z^2=100-4d^2$，

因为直线 l：$mx+y+m=0$ 恒过定点 $P(-1，0)$，所以 $d\le|PC|=2\sqrt{2}$,

所以 $z^2=100-4d^2\ge 100-4\times(2\sqrt{2})^2=68$,

当且仅当 $d=2\sqrt{2}$ 时，上式取等号．此时 $PC\perp l$，因为 $k_{PC}=\frac{2-0}{1+1}=1$,

所以 $k_l=-1$，l 的方程为 $x+y+1=0$，

故当直线 l 的方程为 $x+y+1=0$ 时，l 被圆 C 截得的线段的长度最短，且为 $2\sqrt{17}$．

练习 8－5　曲线与方程

一、选择题

1．D　　2．B　　3．D　　4．D

二、填空题

5．(2，5)，(5，2)　　6．$x^2+xy-2y=0$　　7．$\sqrt{3}x-3y+9=0$ 或 $\sqrt{3}x+y+7=0$

8．$x=\frac{3}{2}$

三、解答题

9．解：两圆的一般方程分别是 C_1：$x^2+y^2-4x-4y-1=0$，C_2：$x^2+y^2-16=0$，

由题意，设圆 C 的方程为 $(x^2+y^2-4x-4y-1)+\lambda(x^2+y^2-16)=0$，

因为圆 C 过点(7，7)，

所以 $(7^2+7^2-4\times7-4\times7-1)+\lambda(7^2+7^2-16)=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$，

所以圆 C 的方程为 $(x^2+y^2-4x-4y-1)-\frac{1}{2}(x^2+y^2-16)=0$，

即圆 C：$x^2+y^2-8x-8y+14=0$．

10．解：设点 $P(x，y)$，$B(x_0，y_0)$，

由题知 $2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PA}$

则 $2(x-x_0,\ y-y_0)=(3-x,\ 1-y)$

所以 $\begin{cases} x_0=\dfrac{3}{2}x--\dfrac{3}{2} \\ y_0=\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

因为 $B(x_0,\ y_0)$为曲线 C 上一点

所以 $(\dfrac{3y-1}{2})^2=\dfrac{3x-3}{2}+1,$

故点 P 的轨迹方程 $3y^2-2x-2y+1=0$.

11．解：设 P、Q 点坐标分别为$(1,\ t)$，$(x,\ y)$，

$\because OP\perp OQ\ \therefore \dfrac{t}{1}\cdot\dfrac{y}{x}=-1$，得 $x+ty=0$　　　　①

$\because |OP|=|OQ|,\therefore \sqrt{1+t^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, 得 $x^2+y^2=t^2+1$　　②

由①得 $t=-\dfrac{x}{y}$, 将其代入②，得 $x^2+y^2=\dfrac{x^2}{y^2}+1,(x^2+y^2)(1-\dfrac{1}{y^2})=0.$

$\because x^2+y^2\neq 0,\therefore 1-\dfrac{1}{y^2}=0,$ 得 $y=\pm 1$.

∴动点 Q 的轨迹为 $y=\pm 1$，为两条平行线.

练习 8－6　椭圆

一、选择题

1．B　　2．D　　3．C　　4．B

二、填空题

5．$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　6．$3,\sqrt{5}$　7．$(-\frac{3}{5}\sqrt{5},\frac{3}{5}\sqrt{5})$　8．$10-4\sqrt{5}$

三、解答题

9．解：(1)顶点 A 的轨迹方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(y\neq 0)$.

(2)设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

则 M，N 是方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$的解，

解得$\begin{cases}x_1=2\sqrt{3}\\ y_1=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-2\sqrt{3}\\ y_2=-\sqrt{3}\end{cases}$，所以$M(2\sqrt{3},\sqrt{3}),N(-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

所以$|MN|=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{15}$,

又点 $B(-2，0)$到直线 MN：$y=\frac{1}{2}x$ 的距离为$d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以△BMN 的面积为$S=\frac{1}{2}\times|MN|\times d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{15}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{3}$.

10．解：由已知，得$|PF_1|+|PF_2|=6,|F_1F_2|=2\sqrt{5}$,

根据直角的不同位置，分两种情况：

若$\angle PF_2F_1$为直角，则$|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2$，

即$|PF_1|^2=(6-|PF_1|)^2+20$，

得$|PF_1|=\frac{14}{3},|PF_2|=\frac{4}{3}$，故$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{7}{2}$;

若$\angle F_1PF_2$为直角，则$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$，

即$20=|PF_1|^2+(6-|PF_1|)^2$，

解得$|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，故$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$.

综上，$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$的值为$\frac{7}{2}$或2.

11．解：设$P(x，y)$，则$|PA|=\sqrt{x^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+y^2-10y+25}$,

因为点P为椭圆$x^2+2y^2=98$上一点，所以$x^2=98-2y^2$，$-7\leqslant y\leqslant 7$，

则$|PA|=\sqrt{98-2y^2+y^2-10y+25}=\sqrt{-(y+5)^2+148}$,

因为$-7\leqslant y\leqslant 7$，

所以，当$y=-5$时，$|PA|_{\max}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$; 当$y=7$时，$|PA|_{\min}=2$.

练习 8－7　双曲线

一、选择题

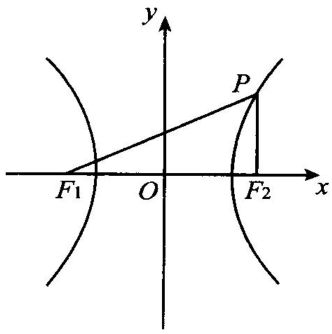
1．A　　2．D　　3．B　　4．C

二、填空题

5．$y=\pm 2\sqrt{2}x$　　6．$\frac{y^2}{\frac{9}{4}}-\frac{x^2}{4}=1$　　7．$m\in(-\frac{1}{3},0)$　　8．　12

三、解答题

9．解：如图，设$F_2(c，0)(c>0)$，$P(c，y_0)$，则$\frac{c^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$.



解得 $y_0=\pm\dfrac{b^2}{a}$，所以 $|PF_2|=\dfrac{b^2}{a}$,

在直角△PF_2F_1 中，$\angle PF_1F_2=30°$，所以 $|PF_1|=2|PF_2|$，

由双曲线定义可知 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，得 $|PF_2|=2a$.

因为 $|PF_2|=\dfrac{b^2}{a}$, 所以 $2a=\dfrac{b^2}{a}$，即 $b^2=2a^2$，所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$,

故所求双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

10．解：(1)设 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

因为点 A' 与点 A 关于直线 $y=x$ 对称，所以 $A'(0,\sqrt{2})$，则 $a=\sqrt{2}$.

设双曲线的渐近线方程为 $y=kx$，

由题意点 A 到 $y=kx$ 的距离为 1，即 $\dfrac{|\sqrt{2}k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm1$，

所以渐近线方程为 $y=\pm x$，

易得双曲线 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$.

(2)设 $B(x,\sqrt{x^2+2})$ 是双曲线 C 上到直线 $l:y=x-\sqrt{2}$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点，由点到直线距离公式有 $\dfrac{|x-\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

解得 $x=\sqrt{2}$，$y=2$，即 $B(\sqrt{2},2)$.

11．解：(1)依题意，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)+2$，

代入 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，整理得 $(2-k^2)x^2-2k(2-k)x-(2-k)^2-2=0$ ①

记 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 x_1、x_2 是方程①的两个不同的根，

所以 $2-k^2\neq0$，且 $x_1+x_2=\frac{2k(2-k)}{2-k^2}$，

由 $N(1，2)$是 AB 的中点，得 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1$,

所以 $k(2-k)=2-k^2$，

解得 $k=1$，所以直线 AB 的方程为 $y=x+1$.

(2)将 $k=1$ 代入方程①得 $x^2-2x-3=0$，解出 $x_1=-1$，$x_2=3$，

由 $y=x+1$ 得 $y_1=0$，$y_2=4$，

即 A、B 的坐标分别为$(-1，0)$和$(3，4)$，

由 CD 垂直平分 AB，得直线 CD 的方程为 $y=-(x-1)+2$，

即 CD：$y=3-x$，

代入双曲线方程，整理得 $x^2+6x-11=0$ ②

记 $C(x_3，y_3)$，$D(x_4，y_4)$，CD 的中点为 $M(x_0，y_0)$，

则 x_3、x_4 是方程②的两个根，所以 $x_3+x_4=-6$，$x_3x_4=-11$.

从而 $x_0=\frac{1}{2}(x_3+x_4)=-3$，$y_0=3-x_0=6$ 即 $M(-3，6)$.

$$|CD|=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}=\sqrt{2(x_3-x_4)^2}$$

$$=\sqrt{2[(x_3+x_4)^2-4x_3x_4]}=4\sqrt{10}.$$

所以 $|MC|=|MD|=\frac{1}{2}|CD|=2\sqrt{10}$.

又 $|MA|=|MB|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$.

即 A、B、C、D 四点到点 M 的距离相等，所以 A、B、C、D 四点共圆．

练习 8－8　抛物线

一、选择题

1．A　　2．C　　3．A　　4．D

二、填空题

5．(0，－1)，$y=1$　　6．(3，2)　　7．32　　8．$(x-1)^2+(y\pm 2\sqrt{2})^2=9$

三、解答题

9．解：(1)因为抛物线 C：$y^2=ax$ 的焦点在 x 轴上，

所以在直线 $y=2x-16$ 上令 $y=0$，得 $x=8$，

所以抛物线的焦点为(8，0)，则 $a=32$．

故抛物线的方程为 $y^2=32x$．

(2)由题意，得 $A(2，8)$，设 $B(x_1，y_1)$，$C(x_2，y_2)$，

点 B，C 满足方程组 $\begin{cases}4x-y-40=0\\ y^2=32x\end{cases}$，消去 y，

得 $x^2-22x+100=0$，则 $\Delta=84>0$，$x_1+x_2=22$，

所以 $y_1+y_2=(40-4x_1)+(40-4x_2)=-8$，

故△ABC 的重心为 $(\dfrac{x_1+x_2+2}{3},\dfrac{y_1+y_2+8}{3})$，即重心为(8，0)．

10．解法一：由题意，得 $F(1，0)$，直线 l 的方程为 $y=x-1$．

由 $\begin{cases}y=x-1\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $x^2-6x+1=0$，

设 A，B 两点坐标为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，AB 中点 M 的坐标为 $M(x_0，y_0)$，

则 $x_1=3+2\sqrt{2},x_2=3-2\sqrt{2},y_1=x_1-1=2+2\sqrt{2},y_2=x_2-1=2-2\sqrt{2}$，

故点 $A(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}),B(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$,

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=3, y_0=x_0-1=2,$

故圆心为 $M(3，2)$，直径 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=8,$

所以以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$．

解法二：由题意，得 $F(1，0)$，直线 l 的方程为 $y=x-1$．

由 $\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $x^2-6x+1=0$，

设 A，B 两点坐标为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，AB 中点 M 的坐标为 $M(x_0，y_0)$，

因为 $\Delta=6^2-4=32>0$，所以 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$，

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=3, y_0=x_0-1=2$，故圆心为 $M(3，2)$，

由抛物线定义，得 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+\frac{p}{2})+(x_2+\frac{p}{2})=x_1+x_2+p=8,$

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=8$(其中 $p=2$)．

所以以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$．

11．解：(1)因为抛物线 $y^2=2px$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，所以 $4+\frac{p}{2}=5$，则 $p=2$．

所以抛物线方程为 $y^2=4x$．

(2)由题意，得点 A 坐标是 $(4，4)$，$B(0，4)$，$M(0，2)$，

又因为 $F(1，0)$，所以 $k_{FA}=\frac{4}{3}, MN\perp FA$，则 $k_{MN}=-\frac{3}{4},$

则 FA 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$，MN 的方程为 $y-2=-\frac{3}{4}x,$

解方程组 $\begin{cases} y=\frac{4}{3}(x-1) \\ y-2=-\frac{3}{4}x \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$，所以 N 的坐标 $(\frac{8}{5},\frac{4}{5})$.

练习 8－9　圆锥曲线综合问题

一、选择题

1．B　　2．A　　3．C　　4．C

二、填空题

5．－1　　6．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　7．$\dfrac{1}{2}$　　8．2

三、解答题

9．(1)以 O 为原点．AB、OD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，向右向上分别为正方向建立平面直角坐标系，则 $A(-2，0)$，$B(2，0)$，$D(0，2)$，$p(\sqrt{3},1)$,

依题意，得

$$|MA|-|MB|=|PA|-|PB|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{2}<4$$

∴曲线 C 是以原点为中心，A、B 为焦点的双曲线．

设实半轴长为 a，虚半轴长为 b，半焦距为 c，

则 $c=2$，$2a=2\sqrt{2}$，∴$a^2=2$，$b^2=c^2-a^2=2$．

∴曲线 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)解：依题意，直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x+2$，

代入双曲线 C 的方程并整理得 $x^2+4\sqrt{2}x+6=0$.

设 $E(x_1，y_1)$，$F(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=-4\sqrt{2}$，x_1，$x_2=6$，

于是$|EF|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{6}.$$

而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

$\therefore S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}d\cdot|EF|=2\sqrt{2}.$

10．设 A、B 关于 $x+y=0$ 对称，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，AB 直线方程为 $y=x+b$，

由 $\begin{cases}y=x+b\\ y=ax^2-1\end{cases}$，消去 y，得 $ax^2-x-b-1=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{1}{a},x_1x_2=-\dfrac{b+1}{a}$,

$\Delta=1+4a(b+1)>0$，

因为 $x_{中}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2a},y_{中}=x_{中}+b=\dfrac{1}{2a}+b$，

因为 AB 的中点$(x_{中}，y_{中})$在直线 $x+y=0$ 上，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}+b=0$,

即 $b=-\dfrac{1}{a}$,代入 $\Delta=1+4a(-\dfrac{1}{a}+1)>0$,

解得 $a>\dfrac{3}{4}$.

11．(1)解：设 $A(x_1，y_1)$，

因为 A 为 MN 的中点，且 M 的纵坐标为 3，N 的纵坐标为 0，所以 $y_1=\dfrac{3}{2}$,

又因为点 $A(x_1，y_1)$在椭圆 C 上

所以 $x_1^2+\dfrac{y_1^2}{4}=1$，即 $x_1^2+\dfrac{9}{16}=1$，解得 $x_1=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

则点 A 的坐标为 $(\dfrac{\sqrt{7}}{4},\dfrac{3}{2})$ 或 $(-\dfrac{\sqrt{7}}{4},\dfrac{3}{2})$，

所以直线 l 的方程为 $6\sqrt{7}x-7y+21=0$ 或 $6\sqrt{7}x+7y-21=0$.

(2)解：设直线 AB 的方程为 $y=kx+3$ 或 $x=0$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$P(x_3，y_3)$，

当 AB 的方程为 $x=0$ 时，$|AB|=4>\sqrt{3}$，与题意不符.

当 AB 的方程为 $y=kx+3$ 时：

由题设可得 A、B 的坐标是方程组 $\begin{cases} y=kx+3 \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 的解，

消去 y 得 $(4+k^2)x^2+6kx+5=0$，

所以 $\Delta=(6k)^2-20(4+k^2)>0$，即 $k^2>5$，

则 $x_1+x_2=\frac{-6k}{4+k^2}, x_1\cdot x_2=\frac{5}{4+k^2}, y_1+y_2=(kx_1+3)+(kx_2+3)=\frac{24}{4+k^2}$，

因为 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\sqrt{3}$,

所以 $\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{-6k}{4+k^2})^2-\frac{20}{4+k^2}}<\sqrt{3}$，解得 $-\frac{16}{13}<k^2<8$,

所以 $5<k^2<8$.

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OP}$，即 $(x_1，y_1)+(x_2，y_2)=\lambda(x_3，y_3)$，

所以当 $\lambda=0$ 时，由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=0$，得 $x_1+x_2=\frac{-6k}{4+k^2}=0, y_1+y_2=\frac{24}{4+k^2}=0$,

上述方程无解，所以此时符合条件的直线 l 不存在；

当 $\lambda\neq0$ 时，$x_3=\frac{x_1+x_2}{\lambda}=\frac{-6k}{\lambda(4+k^2)}, y_3=\frac{y_1+y_2}{\lambda}=\frac{24}{\lambda(4+k^2)}$,

因为点 $P(x_3，y_3)$ 在椭圆上，

所以 $[\frac{-6k}{\lambda(4+k^2)}]^2+\frac{1}{4}[\frac{24}{\lambda(4+k^2)}]^2=1$，化简得 $\lambda^2=\frac{36}{4+k^2}$,

因为 $5<k^2<8$，所以 $3<\lambda^2<4$，则 $\lambda\in(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

综上，实数 λ 的取值范围为 $(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

习题 8

一、选择题

1．A　　2．C　　3．D　　4．A　　5．B

二、填空题

6．4　　7．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　8．$(x-1)^2+y^2=1,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　9．$2\sqrt{3}$　　10．4 a

三、解答题

11．解：(1)因为直线 $3x+4y-12=0$ 的斜率 $k=-\frac{3}{4}$，又直线 l 过点 $A(-1，3)$，

所以 l 的方程为 $y-3=-\frac{3}{4}(x+1)$，即 $3x+4y-9=0$．

(2)由点到直线距离公式，得 $d=\frac{|3a+4-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}<2$. 即 $|3a-5|<10$，解得 $-\frac{5}{3}<a<5$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a|-\frac{5}{3}<a<5\}$.

12．答：(1)圆 M 的方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$．

(2)x，y 满足的方程为 $y^2=8x$ 或 $y=0(x<0)$．

13．略解：(1)曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，其坐标满足 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+1.\end{cases}$

消去 y 并整理得 $(k^2+4)x^2+2kx-3=0$，

则 $\Delta=(2k^2)+12(k^2+4)>0$，故 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+4},x_1x_2=-\frac{3}{k^2+4}$.

因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以 $(x_1，y_1)\cdot(x_2，y_2)=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$．

而 $y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$，

于是 $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{k^2+4}-\frac{3k^2}{k^2+4}-\frac{2k^2}{k^2+4}+1=0,$

化简得$-4k^2+1=0$，所以$k=\pm\frac{1}{2}$.

14．解：(1)由题意，得$M(1,0)$，直线l的方程为$y=x-1$.

由$\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得$x^2-6x+1=0$，

设A，B两点坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB中点P的坐标为$P(x_0,y_0)$，

则$x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$，$y_1=x_1-1=2+2\sqrt{2}$，$y_2=x_2-1=2-2\sqrt{2}$，

故点$A(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$，$B(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$，所以

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=3, y_0=x_0-1=2,$

故圆心为$P(3,2)$，直径$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=8,$

所以以AB为直径的圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$.

(2)设A，B两点坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{MB}=\lambda\overrightarrow{AM}(\lambda>0)$.

则$\overrightarrow{AM}=(m-x_1,-y_1),\overrightarrow{MB}=(x_2-m,y_2),$

所以$\begin{cases} x_2-m=\lambda(m-x_1) \\ y_2=-\lambda y_1 \end{cases}$　　①

因为点A，B在抛物线C上，所以$y_1^2=4x_1, y_2^2=4x_2,$　　②

由①②，消去x_2，y_1，y_2得$\lambda x_1=m$.

若此直线l使得$|AM|$，$|OM|$，$|MB|$成等比数列，则$|OM|^2=|MB|\cdot|AM|$，

即$|OM|^2=\lambda|AM|\cdot|AM|$，所以$m^2=\lambda[(x_1-m)^2+y_1^2],$

因为$y_1^2=4x_1, \lambda x_1=m$，所以$m^2=\frac{m}{x_1}[(x_1-m)^2+4x_1],$

整理得 $x_1^2-(3m-4)x_1+m^2=0$, ③

因为存在直线 l 使得 $|AM|$，$|OM|$，$|MB|$ 成等比数列，

所以关于 x_1 的方程③有正根，

因为方程③的两根之积为 $m^2>0$，所以只可能有两个正根，

所以 $\begin{cases}3m-4>0\\ m^2>0\\ \Delta=(3m-4)^2-4m^2\geq 0\end{cases}$，解得 $m\geqslant 4$.

故当 $m\geqslant 4$ 时，存在直线 l 使得 $|AM|$，$|OM|$，$|MB|$ 成等比数列.