

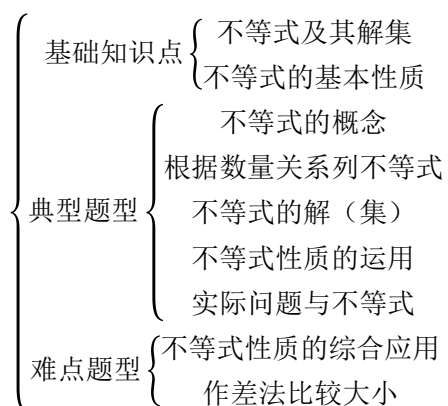
专题 05 不等式与不等式组专题详解

专题 05 不等式与不等式组专题详解.....	1
9.1 不等式.....	3
知识框架.....	3
一、基础知识点.....	3
知识点 1 不等式及其解集.....	3
知识点 2 不等式的基本性质.....	4
二、典型题型.....	5
题型 1 不等式的概念.....	5
题型 2 根据数量关系列不等式.....	5
题型 3 不等式的解（集）.....	5
题型 4 不等式性质的运用.....	6
题型 5 实际问题与不等式.....	6
三、难点题型.....	7
题型 1 不等式性质的综合应用.....	7
题型 2 用作差法比较大小.....	7
9.2 一元一次不等式.....	8
知识框架.....	8
一、基础知识点.....	8
知识点 1 一元一次不等式的解法.....	8
知识点 2 列不等式解应用题.....	8
二、典型题型.....	10
题型 1 一元一次不等式的判定.....	10
题型 2 解一元一次不等式.....	10
题型 3 列不等式，求取值范围.....	10
题型 4 一元一次不等式的应用.....	10
三、难点题型.....	11
题型 1 含参数的不等式.....	11

题型 2 不等式的整数解.....	11
题型 3 方程与不等式.....	11
题型 4 含绝对值的不等式.....	11
9.3 一元一次不等式组.....	12
知识框架.....	12
一、基础知识.....	12
知识点 1 一元一次不等式组及解集的定义.....	12
知识点 2 一元一次不等式组解集的确定及解法.....	12
知识点 3 双向不等式及解法.....	13
二、典型题型.....	14
题型 1 一元一次不等式组的判定.....	14
题型 2 一元一次不等式组的解集.....	14
题型 3 解一元一次不等式组.....	14
题型 4 一元一次不等式组的应用.....	15
一、用不等式组解决实际问题.....	15
二、方案设计.....	15
三、最值问题.....	15
三、难点题型.....	17
题型 1 由不等式组确定字母的取值.....	17
题型 2 不等式组中的数学思想.....	17
一、整体思想.....	17
二、数形结合.....	17
三、分类讨论.....	17
题型 3 不等式的应用.....	18
题型 4 不等式的综合.....	18

9.1 不等式

知识框架



一、基础知识点

知识点 1 不等式及其解集

1) 不等式：用不等符号表示不等关系的式子。

常用不等符号有： $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ 、 $\neq$

2) 不等式的解：对于一个含有未知数的不等式，任何一个使不等式成立的未知数的值，都叫做这个不等式的解。

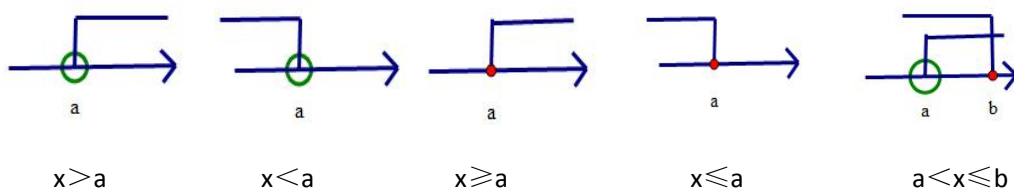
不等式的解集：一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解集。

注：①当未知数取某些值时，不等式左右两边（不等号）符号所表示的大小关系依旧成立，我们就说这个值使不等式成立。

②一般情况下，不等式的解集是一个范围

③不等式的解集必须包含不等式的所有解，不能少一个，同时也不能多一个。

3) 在数轴上表示不等式：



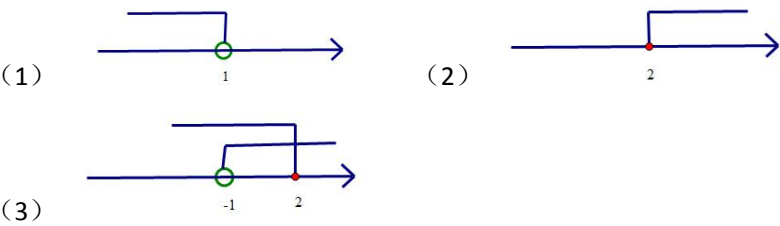
注：在数轴上表示“ $>$ ”、“ $<$ ”时，用空心点表示，在数轴上表示“ $\geq$ ”、“ $\leq$ ”时，用实心点表示。

例 1. 用不等式表示：

(1) a 与 1 的和是正数

- (2) x 的 $\frac{1}{2}$ 与 y 的 $\frac{1}{3}$ 的差是非负数
- (3) x 的 2 倍与 1 的和大于 3
- (4) a 的一半与 4 的差的绝对值不小于 a

例 2.如图所示，用代数式表示的形式写出下列各数轴上所表示的不等式的解。



知识点 2 不等式的基本性质

1) 不等式与等式的性质对比：

	等式性质	不等式性质
加减法	若 $a=b$ ，则 $a \pm c = b \pm c$	若 $a>b$ ，则 $a \pm c > b \pm c$
乘除法	若 $a=b$ ，则 $a \times c=b \times c$ $a \div c = b \div c \ (c \neq 0)$	若 $a>b$ ，且 $a>0$ ，则 $a \times c > b \times c \ (c \neq 0)$ $a \div c > b \div c \ (c \neq 0)$
		若 $a>b$ ，且 $a<0$ ，则 $a \times c < b \times c$ $a \div c < b \div c \ (c \neq 0)$
传递性	若 $a=b, b=c$ ，则 $a=c$	若 $a>b, b>c$ ，则 $a > c$

注：不等式的性质需要与等式的性质共同理解记忆。

- ①乘除法中，等式依旧成立；不等式若乘除数为负数时，不等式不要变号。其他性质，等式与不等式完全类似。
- ②等式和不等式中，除数必须不能为 0；等式中乘法可以为 0，不等式依旧不能为 0。

例 1.若 $x>y$ ，则下列式子错误的是（ ）

- A. $x-3>y-3$
B. $-3x>-3y$
C. $x+3>y+3$
D. $\frac{x}{3}>\frac{y}{3}$

二、典型题型

题型 1 不等式的概念

解题技巧：判断不等式，只需要抓住一点，即式子中含有不等符号。哪怕不等符号表示的是错误的不等关系，也是不等式，只是不成立的不等式。

例 1.下列式子中，① $a+b=3$ ；② $2<1$ ；③ $x>5$ ；④ $2m+5mn>0$ ；⑤ $2x+3y$ ，不等式有：

例 2.写出 2 个含有 x 的不等式：

题型 2 根据数量关系列不等式

解题技巧：常见不等式的基本语言有：

① x 是正数，即 $x>0$ ； x 是负数，即 $x<0$ ；

② x 是非正数，即 $x\leq 0$ ； x 是非负数，即 $x\geq 0$ ；

③ x 大于 y ，即 $x-y>0$ ； x 小于 y ，即 $x-y<0$ ；

④ x 不大于 y ，即 $x-y\leq 0$ ； x 不小于 y ，即 $x-y\geq 0$ ；

⑤ x 、 y 同号，即 $xy>0$ 或 $\frac{x}{y}>0$ ； x 、 y 异号，即 $xy<0$ 或 $\frac{x}{y}<0$ （其中 x 、 y 均不为 0）

⑥ x 、 y 都是正数，即 $xy>0$ 且 $x+y>0$ ； x 、 y 都是负数，即 $xy>0$ 且 $x+y<0$

例 1.用不等式表示：

(1) a 小于 b ；

(2) a 不小于 2；

(3) x 是非负数；

(4) x 的 5 倍不大于 3。

例 2.用不等式表示：

(1) a 的绝对值是非负数；

(2) x 的 3 倍与 2 的差是负数；

(3) m 、 n 的平方和不小于 m 与 n 的积的 2 倍；

(4) x 比 y 的 2 倍还大。

题型 3 不等式的解（集）

解题技巧：注意区分，不等式的解和解集是两个不同的概念。

解：只要 x 的值满足不等式，这个值就是不等式的解；

解集：必须是所有满足不等式的值的集合。

即解集通常是一个取值范围，解可以是单个的值，且不唯一。

求解集方法：按照不等式的性质，解不等式获得；

求解的方法：方法一：将结果代入不等式，若不等式成立，则这个值时不等式的解；

方法二：求解出不等式的解集，若这个数再解集的范围，则这个值是不等式的解。

例 1.下列数值中，哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解？这个不等式的解集又是什么？

−4； −2； 0； 3； 3.01； 4； 6； 100

例 2.在 0， 1， 2 中，是不等式 $2x-1>2$ 的解的是：

例 3.下列判断正确的有：

① $x>5$ 是不等式 $x+4>8$ 的解集；②不等式 $x+4\leq 5$ 有一个正整数解；③ $x=2$ 是不等式 $x+1>2$ 的解集；④不等式 $x+3\leq 4$ 的解有无数个；⑤ $x>0$ 是不等式 $x+4>3$ 的解集。

题型 4 不等式性质的运用

解题技巧：不等式的性质，需要和等式的性质一起理解。，基本类似。有 2 个地方需要着重注意：①若不等式两边同时乘或除负数，则不等号需要变号；②不等号两边同乘 0，不等式不再成立；同除 0，无意义。

例 1.判断正误：

(1) 若 $a>b$ ，则 $ac^2>bc^2$

(2) 若 $ac^2>bc^2$ ，则 $a>b$

(3) 若 $ab>c$ ，则 $a>\frac{c}{b}$

(4) 若 $a-b>a$ ，则 $b>0$

(5) 若 $ab>0$ ，则 $a>0$ ， $b>0$ 。

例 2.用等号填空

(1) 若 $a<b$ ， c 为任意数，则 $a-c$ ____ $b-c$ ；

(2) 若 $a<b$ ， $c>0$ ，则 ac ____ bc ；

(3) 若 $a < b$, $c < 0$, 则 ac ____ bc ;

(4) 若 $a > b$, $c > 0$, 则 $a+c$ ____ $b+c$

题型 5 实际问题与不等式

解题技巧：利用不等式解决简单的应用题，需要我们从题干中提取不等关系，然后列写不等式。方法与方程的应用类似，围绕提取出的不等关系设未知数和列不等式，完成应用题。

例 1.导火线的燃烧速度是 0.5cm/s ，爆破员点燃后跑开的速度是 5m/s ，为了点火后能跑到 130m 外的安全地带，问导火线的长度应该大于多少？

例 2.铁路部门规定旅客免费携带行李的长宽高之和不能超过 160cm ，某厂家生产符合规定的行李箱，已知行李箱的高为 30cm ，长与宽之比为 $3:2$ ，求该行李箱长度最大值。

三、难点题型

题型 1 不等式性质的综合应用

解题技巧：不等式性质的应用中，主要考察特殊情况：不等号两边同乘（除）一个负数时，要变号。在求解含有字母的不等式时，先按照普通不等式进行求解。当遇到乘除变换时，则需要考虑正负，从而考虑变号的问题。

例 1.如果关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{3} = \frac{4x+b}{5}$ 的解不是负值，求 a 与 b 的关系。

例 2.如果 $(a+1)x > a+1$ 的解集是 $x < 1$ ，求 a 的取值范围。

例 3.已知关于 x 的不等式， $(2a-b)x + a - 5b > 0$ 的解集是 $x < \frac{10}{7}$ ，求 $ax + b < 0$ 的解集。

题型 2 用作差法比较大小

解题技巧：两个数的大小可以通过它们的差来判断。若两个数 a 和 b 比较大小，则：

当 $a > b$ 时，一定有 $a - b > 0$ ；当 $a = b$ 时，一定有 $a - b = 0$ ；当 $a < b$ 时，一定有 $a - b < 0$

反之：若 $a - b > 0$ ，则 $a > b$ ；

若 $a - b = 0$ ，则 $a = b$ ；

若有 $a - b < 0$ 则 $a < b$ 时

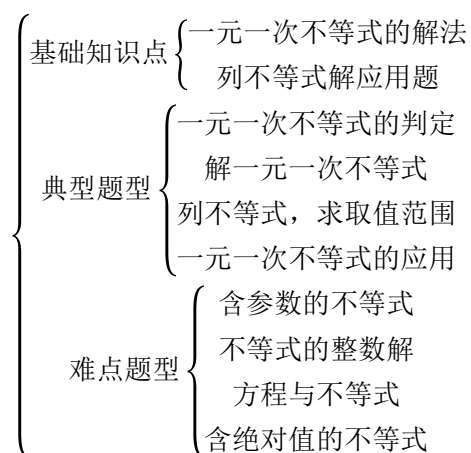
因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正、负来判断对象的大小。

例 1.比较 $x^4 + 2x^2 + 1$ 与 $x^4 + x^2 + 1$ 的大小。

例 2.设 $x > y$ ，比较 $-(8-10x)$ 与 $-(8-10y)$ 的大小。如果较大的代数式为正数，则使这个代数式为正数的 x 的最小整数是多少？

9.2 一元一次不等式

知识框架



一、基础知识点

知识点 1 一元一次不等式的解法

- 1) 一元一次不等式：含有一个未知数，未知数的次数是 1 的不等式
- 2) 解一元一次不等式：利用不等式的性质，将不等式最终转换为 $x > a$ ($x \geq a$) 或 $x < a$ ($x \leq a$) 的形式。
- 3) 解一元一次不等式的步骤：

a.去分母； b.去括号； c.移项； d.合并同类项； e.系数化为 1

注：①解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程完全一样。唯一不同点在于，若不等式两边同乘或除负数，则不等号需要变号。

例： $-\frac{2+x}{2} \geq -\frac{2x-1}{3}$

$$-3(2+x) \geq -2(2x-1) \quad \text{去分母}$$

$$-6-3x \geq -4x+2 \quad \text{去括号}$$

$$-6-2 \geq -4x+3x \quad \text{移项}$$

$$-8 \geq -x \quad \text{合并同类项}$$

$$8 \leq x \quad \text{系数化为 1，不等式两边同乘 } (-1)，\text{不等号变号}$$

$$x \geq 8$$

例 1.解下列不等式。

$$(1) 3(1-x) < 2(x+9)$$

$$(2) -\frac{6x-7}{4} + 1 \geq \frac{2x-1}{-2} + \frac{2x+5}{3}$$

例2. 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来。

(1) $5-2x>3$

(1) $7x-8\leq 2x+7$

知识点 2 列不等式解应用题

1) 不等式的应用题，与等式应用题类似，主要思路为：

a.根据题意，列写不等关系式；

b.设未知数，使之方便表示不等关系式；

c.根据不等关系，列写不等关系式；

d.解不等式求解问题。

例 1.班级篮球赛，胜一场 3 分，平一场 1 分，负一场 0 分。某班 28 场比赛要想至少得 43 分，那么他们最少要胜多少场？

例 2.某商品的进价是 500 元，标价为 750 元，商店要求以利润率不低于 5%的售价打折出售。售货员最低可以打几折？

二、典型题型

题型 1 一元一次不等式的判定

解题技巧：一元一次不等式需同时满足 3 个条件：① 1 个未知数（一元），且未知数前面的系数不为 0；② 未知数的次数为 1（一次），且是整数（未知数不能出现在字母中）；③ 含有不等符号

例 1.下列不等式中是一元一次不等式的是（ ）

A. $x+1=0$ B. $x+y>1$ C. $x>0$ D. $x^2-1>0$

例 2.若 $x^{2m+1}-1>0$ 时关于 x 的一元一次不等式，求 m 的值。

题型 2 解一元一次不等式

解题技巧：一元一次不等式的解法与一元一次方程的解法类似，主要步骤有：去分母、去括号、移项、合并同类项和系数化为 1。这些步骤中，不等式乘除负数时需要变号，这是唯一一点与解一元一次方程不同地方，其余地方完全相同。还需要注意的点：① 移项要变号；② 去分母需要所有项都乘最小公倍数；③ 去括号，若括号前有系数，括号中每一项都要乘系数；若括号前时负号，括号中每一项都要变号。

例 1.解下列不等式。

(1) $3(x+1)>2(1-x)$ (2) $4(x-2)>5(x+1)-6$

例 2.解下列不等式。

(1) $\frac{x+2}{2}-\frac{x-1}{6}\geq 1$ (2) $\frac{2x-5}{6}\leq \frac{3x+2}{4}-2$

题型 3 列不等式，求取值范围

解题技巧：该类题型，先按照题意，写出不等式；再通过求解不等式得到取值范围。

例 1.当 x _____ 时， $x-4$ 的值大于 $\frac{1}{2}x+4$ 的值。

题型 4 一元一次不等式的应用

解题技巧：建议对应用题解答不熟悉者，严格按照应用题的 3 步走：

- ① 根据题意，列写等量（不等）关系式；
- ② 以等量（不等）关系表达方便为原则，设未知数；

③根据等量（不等）关系式，列方程解决问题

读者按照此步骤，独立完成几道题目后，即能培养出解应用题能力，后续可跳过步骤 1.

例 1.小明用 100 元钱购得笔记本和钢笔共 30 件，已知每本笔记本 2 元，每只钢笔 5 元，那么小明最多能买多少只钢笔？

例 2.某工人加工 300 个零件，若每小时加工 50 个就可以按时完成；但他加工 2 小时候，因事停工 40 分钟。那么这个工人为了按时或提前完成任务，后面的时间每小时至少要加工多少个零件？

三、难点题型

题型 1 含参数的不等式

解题技巧：在不等式中，未知数含有参数时，将参数当作常数进行求解，但是需注意分类讨论（不等式乘除变换时的正负性）。

例 1.解关于 x 的不等式： $a^2(x-3)<2a+4x+2$

例 2.若不等式 $\frac{2x-a}{3} > \frac{a}{2} - 1$ 与 $\frac{x}{a} < 5$ 同解，求 a 的值

题型 2 不等式的整数解

解题技巧：先求出不等式的解集，再根据解集确定整数解

例 1.求不等式 $\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) \geq \frac{1}{6}(x-2)$ 的正整数解

例 2.如果关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 3x-m \geq 0 \\ 5x-n < 0 \end{cases}$ 的整数解仅为 4、5、6，那么适合这个不等式组的整数对 (m, n) 共有多少对？

题型 3 方程与不等式

解题技巧：先消去部分未知数，利用剩余未知数范围，求出题干要求取值范围

例 1. m 为何值时，方程 $x + \frac{1}{2}(2x+7m) - \frac{1}{5}(3x+m) = 3 - \frac{1}{2}(x-6m)$ 有负数解。

例 2.求适合 $6x-y>x+y$ ，且 y 满足方程 $3y-5=2y+5x$ 的 x 的取值范围。

例 3. x, y, z 为非负数，且满足： $3y+2z=3+x$ ， $3y+z=4-3x$ ，求 $w=3x-3y+4z$ 的取值范围。

题型 4 含绝对值的不等式

解题技巧：去绝对值：若 $a>0$ ，则 $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ ， $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ 或 $x \leq -a$ ；

方法一：采用“零点分段法”，去绝对值，具体见例 1；

方法二：“数形结合”， $|x-a|$ 表示 x 与 a 点的距离，具体见例 2.

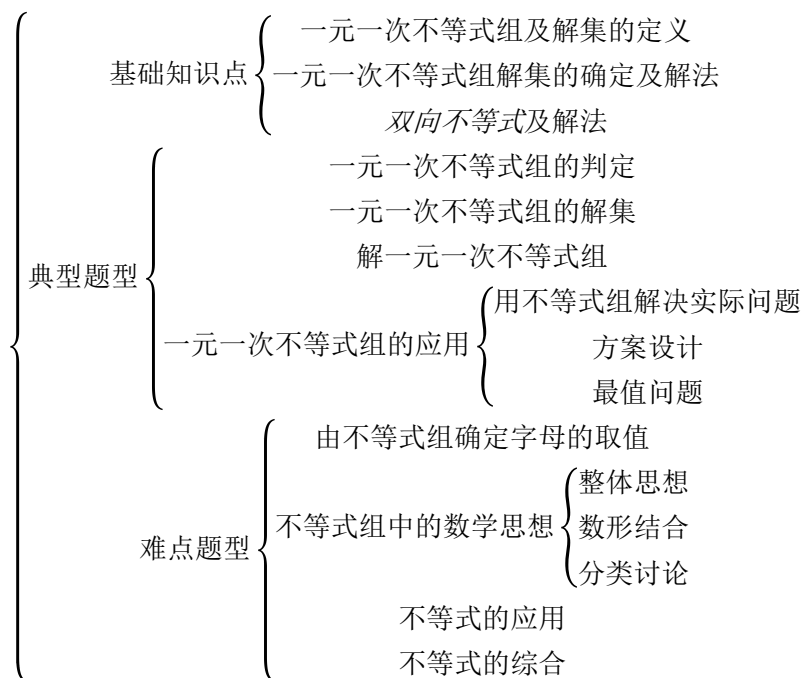
例 1.解不等式 $|x-5| - |2x-3| < 1$

例 2.解不等式 $|x + 8| - |x - 3| < 9$

注：采用“数形结合”法时，同一个不等式中，未知数 x 的系数必须相同

9.3 一元一次不等式组

知识框架



一、基础知识点

知识点 1 一元一次不等式组及解集的定义

1) 一元一次不等式组：多个一元一次不等式的组合（多为 2 个一元一次不等式）

注：①多个不等式，一般情况下为 2 个不等式，但不局限于 2 个不等式，也可能是更多个不等式的组合。

②所有不等式中，未知数应有且仅有相同的一个

2) 不等式组的解集：每个不等式，都会有自己解出来的解集。我们将不等式组的每个解集公共部分叫作不等式组的解集。

例 1. 判断下列各不等式是不是一元一次不等式组：

$$(1) \begin{cases} x + 2 < 3x \\ y > 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + 1 > 2x \\ x < 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 1 > 2x \\ x < -1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 < 0 \\ x - 3 > 3x - 1 \end{cases}$$

$$(5) 2x - 8 \leq 7 - x < 5$$

知识点 2 一元一次不等式组解集的确定及解法

1) 解集在数轴上表示的步骤：

a. 画数轴（特别注意数轴三要素）；

- b.描点（有等号有实心点，无等号用空心点）；
c.在数轴上标不等式方向（大于向右，即正方向；小于向左）；
d.标出重合区域，即为不等式的解集。

2) 通常情况下，解集有如下几种情况：



注：若 $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq a \end{cases} \Rightarrow x = a$ ；若 $\begin{cases} x < a \\ x > a \end{cases} \Rightarrow$ 无解

3) 解一元一次不等式组步骤：

a.分别求每个不等式解集；b.在坐标轴上画图，并找出公共部分；c.根据数轴公共部分，写出不等式组最终解集。

例 1.解下列不等式组：

$$(1) \begin{cases} 3x + 2 < x + 8 \\ \frac{x}{2} \leq \frac{x-1}{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x - 2 > x + 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \frac{x}{2} - 2(x + 3) \leq 11 \\ \frac{3x}{2} + 2(x + 3) \leq 3 \end{cases}$$

知识点 3 双向不等式及解法

1) 方法一（通用方法）：a.将双向不等式化为多个不等式（1 个双向不等式可以化为 2 个不等式）；b.按照不等式组的步骤求解。

2) 方法二：双向不等式中，仅当中间项有未知数，两边项无未知数时，可以直接将双向不等式按照普通不等式，根据不等式的性质进行化简求解。具体见例 1（2）。

例 1.解不等式：

$$(1) \frac{2x-8}{3} \leq \frac{7-x}{2} < 5 \quad (2) -2 \leq \frac{4-7x}{5} < 7$$

二、典型题型

题型 1 一元一次不等式组的判定

解题技巧：一元一次不等式组的判定需要抓住几点：

- ①每个不等式都是一元一次不等式；
- ②由多个不等式组成；
- ③多个不等式中的未知数是同一个未知数

例 1.下列是一元一次不等式组的是（ ）

A. $\begin{cases} x+1>2 \\ \frac{1}{x}+1>3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+3>2 \\ y+1>4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x>2 \\ x>1 \\ x+3<5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+1>2 \\ x^2+2<3 \end{cases}$

例 2. $\begin{cases} (n+1)x+1>2 \\ x^{m+3}+2<3 \end{cases}$ 是关于 x 的一元一次不等式组，求 m 、 n 的值。

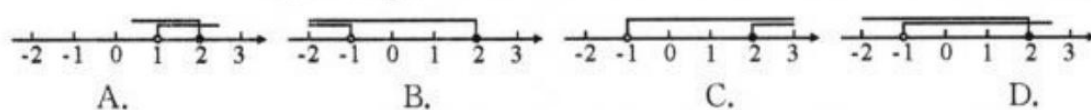
题型 2 一元一次不等式组的解集

解题技巧：口诀：①同大取大；②同小取小；③大小小大中间夹；④大大小小无解答

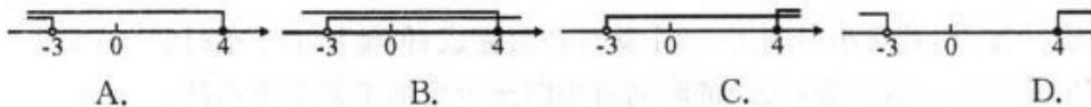
在确定不等式组的解集时，建议根据数轴来确定，即在数轴上标出各个不等式的解集，不等式组的解集即各个不等式解集的公共部分。

注：可取得等号时，用实心点表示；不能取等号时，用空心点表示。

例 1.关于 x 的不等式组 $\begin{cases} -x<1 \\ x-2\leq 0 \end{cases}$ ，其解集在数轴上表示正确的是（ ）



例 2.不等式组 $\begin{cases} 3x\leq 2x+4 \\ \frac{3-x}{3}>2 \end{cases}$ 的解集，在数轴上表示正确的是（ ）



题型 3 解一元一次不等式组

解题技巧：首先分别求多个不等式的解集；然后将各个不等式的解集表示在数轴上；最后读取数轴上重叠部分，作为不等式组的最终解集。

例 1.解下列不等式组。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3 > 5 \\ 3x - 2 \leq 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 5 \leq 3(x + 2) \\ 3x - 1 \geq 2x \end{cases}$$

例 2.解下列不等式组。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3 < x + 11 \\ \frac{2x+5}{3} > 2 - x \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \geq 3(x - 2) + 4 \\ \frac{2x-1}{5} < \frac{x+1}{2} \end{cases}$$

题型 4 一元一次不等式组的应用

一元一次不等式组的应用 $\left\{ \begin{array}{l} \text{用不等式组解决实际问题} \\ \text{方案设计} \\ \text{最值问题} \end{array} \right.$

一、用不等式组解决实际问题

解题技巧：不等式组中的应用题，依旧是一元一次方程中的一些题型，如和差倍问题、积分问题、总分问题、配套问题等，此处不再赘述，遗忘者请复习一元一次方程的应用。在解决实际问题中，关键在于把握题干意思，提取去等量（不等）关系，列写方程。

例 1.在课外阅读课上，老师将 43 本书分给各个小组，每组 8 本，还有剩余；每组 9 本，却又不够，那么一共有几个小组？

例 2.某超市销售有甲、乙两种商品，甲商品每件进价 10 元，售价 15 元；乙商品每件进价 30 元，售价 40 元。若该超市要使两种商品共 80 件的购进费用不超过 1640 元，且总利润不少于 600 元。求该超市购进甲种商品件数最多是多少件？

二、方案设计

解题技巧：该类题型，会要提解题者提供符合条件的方案。解决此类问题，依旧先按照普通不等式组解决问题的题型进行，最终会得到一个取值范围。那么提出的方案只需要符合这个取值范围即可。

例 1.搭建板房，有板材 5600 m²，铝材 2210 m²，计划用这些材料搭建甲、乙两种规格板房共 100 间，需要的材料如下表：

板房规格	板材数量(m^2)	铝材数量(m^2)
甲型	40	30
乙型	60	20

请你根据以上信息，设计出甲、乙两种板房的搭建方案。

例 2.某企业新增了一个化工项目，为了节约资源，保护环境，该企业决定购买 A、B 两种型号的无水处理设备共 8 台，具体情况如下表：

	A 型	B 型
价格(万元/台)	12	10
月污水处理能力(吨/月)	200	160

经预算，企业最多支出 89 万元用来购买设备，且要求月处理无水能力不低于 1380 吨。该企业有哪些购买方案。

三、最值问题

解题技巧：最值问题是在方案问题上进一步深化，要求解题者求出利润（结果）最大（小）的方案。解题方法为：先按照方案问题，求解出所有合适的方案，在求出各个方案的利润（结果），比较得出最大（小）利润（结果）的方案。

例 1.服装店老板计划批发 A、B 两种品牌服装，调查得知，销售一件 A 品牌服装可获利 25 元，销售一件 B 品牌服装可获利 32 元。根据市场需求，该店老板购进 A 种服装比购进 B 种服装的 2 倍还多 4 件，且 A 种服装最多可进 48 件，若服装全部售出后，老板可获得的利润不少于 1740 元，请你提供一种获利最大的方案。

例 2.学校计划购进一批电脑和电子白板，已知每台电脑、每台电子白板各 0.5 万元和 1.5 万元。根据学校实际，需购进电脑和电子白板共 30 台，总费用不超过 30 万元，但不低于 28 万元。请你通过计算，提供一种费用最低的方案。

三、难点题型

题型 1 由不等式组确定字母的取值

解题技巧：将字母视为常数，按照不等式组的方法解不等式，得到的结果中必然含有字母；题型中，会告知方程组解的一些关系，根据这些关系，再来探究字母的取值。

例 1.已知方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5m + 6 \\ x - 2y = -17 \end{cases}$ 的解 x 、 y 都是正数，且 x 的值小于 y 的值，求 m 的取值范围。

例 2. k 为何值时，方程组 $\begin{cases} x + y = 2k \\ x - y = 4 \end{cases}$ 中的 $x > 1$ ， $y < 1$ ？

例 3.如果关于 x 的方程 (1) $\frac{x+2}{3} = \frac{m}{2}$ 的解也是不等式组 (2) $\begin{cases} \frac{1-x}{2} > x - 2 \\ 2(x-3) \leq x - 8 \end{cases}$ 的一个解，求 m 的取值范围。

题型 2 不等式组中的数学思想

不等式组中的数学思想 $\begin{cases} \text{整体思想} \\ \text{数形结合} \\ \text{分类讨论} \end{cases}$

一、整体思想

解题技巧：整体求解，往往会使得求解过程比较简洁，但不具有一般性。读者在学有余力的情况下，平时可多积累此类题型的经验。

例 1.已知方程组满足 $\begin{cases} x + y = -2k \\ x - 3y = k - 1 \end{cases}$ 的解满足 $x > y$ ，求 k 的取值范围。

例 2.已知 $\begin{cases} x + 2y = 4k \\ 2x + y = 2k + 3 \end{cases}$ ，且 $-1 < x + y < 0$ ，求 k 的取值范围。

二、数形结合

解题技巧：不等式组的解集通常是一个取值范围，可以在利用数轴进行表示。利用数形结合思想分析解集，能够更清晰表达解集之间的关系。最终结果能否取到等号，需要注重注意分析。

例 1.关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a \geq 0 \\ 9 - 2x > -1 \end{cases}$ 的整数解共有 5 个，求 a 的取值范围。

例 2.若不等式组 $\begin{cases} 5 - 2x \geq -1 \\ x - a > 0 \end{cases}$ 无解，求 a 的取值范围。

三、分类讨论

解题技巧：当不等数组中涉及到字母时，因无法确定每个不等式结果的大小关系，无法最终确定解集，会出现多解问题。此刻，我们要进行分类讨论。

例 1.不等式组 $\begin{cases} x > 2m + 1 \\ x > m + 2 \end{cases}$ 的解集是 $x > -1$ ，求 m 的值。

例 2.不等式组 $\begin{cases} x < 2m - 1 \\ x < 2 - m \end{cases}$ 的解集是 $x < 1$ ，求 m 的值。

题型 3 不等式的应用

解题技巧：在不等式的应用当中，遇到的是实际问题，要求解出的为整数解。

例 1.甲、乙两个粮库原来各存有整袋的粮食。如果从甲库调 90 袋到乙库，则乙库存粮是甲库的 2 倍；如果从乙库调若干袋到甲库，则甲库存粮是乙库的 6 倍。问甲库最少有多少粮食？

例 2.某宾馆底楼客房比二楼客房少 5 间，某旅游团 48 人，若全安排住在底楼，每间住 4 人，房间不够；每间住 5 人，有房间没有住满 5 人。又若全安排住二楼，每间住 3 人，房间不够；每间住 4 人，有房间没有住满 4 人。问该宾馆底楼有多少间客房？

例 3.8 人乘 2 车去车站（不包括司机）。其中一辆车在距车站 15km 处坏了，此时离检票停止还有 42min。已知车速为 60km/h，人速为 5km/h。什么方案用时最短，所有人能否准时赶到车站？

题型 4 不等式的综合

解题技巧：该题型技巧性较强，需要在日常中多积累方法与技巧

例 1.自然数 a 、 b 、 c 中， $a < b$ ，且满足 $a+b=2017$ ， $c-a=2017$ ，求 $a+b+c$ 的最大值。

例 2.设 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 的正整数，且满足： $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$ ，求 x_5 的最大值。

例 3.若 a 、 b 、 c 都是正数，且 $a < b$ ，求 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{b+c}{a+c}$ 的大小

例 4. 设 $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, 其中 A 为整数, a, b, c 均为正整数, 且 $a > b > c$, 求 a, b, c