2019-2020 学年七年级数学下册同步闯关练（人教版）

第十六章《二次根式》

16.1 16.2 二次根式及二次根式的乘除



必刷提高题

知识点 1：二次根式的定义

【例 1】（2013 秋•武威校级期中）下列各式中，一定是二次根式的个数为（　　）

$\sqrt{3}$，$\sqrt{m}$，$\sqrt{x^2+1}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt{-m^2-1}$，$\frac{\sqrt{a}}{3}(a\geq 0)$，$\sqrt{2a+1}(a<\frac{1}{2})$

A．3 个　　B．4 个　　C．5 个　　D．6 个

【解析】$\sqrt{3}$ 一定是二次根式；

当 $m<0$ 时，$\sqrt{m}$ 不是二次根式；

对于任意的数 m，$m^2+1>0$，则 $\sqrt{x^2+1}$ 一定是二次根式；

$\sqrt[3]{4}$ 是三次方根，不是二次根式；

$-m^2-1<0$，则 $\sqrt{-m^2-1}$ 不是二次根式；

$\frac{\sqrt{a}}{3}$ 是二次根式；

当 $a<\frac{1}{2}$ 时，$2a+1$ 可能小于 0，不是二次根式．

故选：A．

【变式 1-1】如果 a 为任意实数，那么下列各式中正确的是（　　）

A．$\sqrt{a}\geq 0$　　B．$\sqrt{-a}\geq 0$　　C．$(\sqrt{a})^2\geq 0$　　D．$\sqrt{|a|}\geq 0$

【解析】A、a 小于 0 时，无意义，故 A 错误；

B、a 大于 0 时，根式无意义；

C、a 是负数时，根式无意义；

D、a 是任何实数都有意义，故 D 正确；

故选：D．

【变式 1-2】（2017 春•宝坻区期中）已知 n 是正整数，$\sqrt{27n}$ 是整数，则 n 的最小值是__3__．

【解析】$\sqrt{27n}=\sqrt{9\times 3n}=3\sqrt{3n}$，

$\because \sqrt{27n}$ 是整数，

$\therefore n$ 的最小值是 3，

故答案为：3．

【变式 1-3】（2011 秋•白云区期中）当 a 取什么值时，代数式 $\sqrt{2a+1}+1$ 取值最小？并求出这个最小值．

【解析】$\because \sqrt{2a+1}\geq 0$，

$\therefore$ 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{2a+1}$ 有最小值，是 0．

则 $\sqrt{2a+1}+1$ 的最小值是 1．

【变式 1-4】当 $x=7$ 时，求代数式 $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x-1}$ 的值．

【解析】$x=7$ 时，$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x-1}$

$=\sqrt{7+5}+\sqrt{7-4}-\sqrt{4\times 7-1}$

$=\sqrt{12}+\sqrt{3}-\sqrt{27}$

$=2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=0$．

知识点 2：二次根式有意义的条件

【例 2】（2019•丰泽区校级模拟）若代数式 $\frac{\sqrt{3x-2}}{|x|-3}$ 有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A．$x>\frac{2}{3}$ 且 $x\neq 3$　　B．$x\geq\frac{2}{3}$　　C．$x\geq\frac{2}{3}$ 且 $x\neq 3$　　D．$x\leq\frac{2}{3}$ 且 $x\neq -3$

【解析】$\because$ 代数式 $\frac{\sqrt{3x-2}}{|x|-3}$ 有意义，

$\therefore 3x-2\geq 0$，$|x|-3\neq 0$，

解得：$x\geq\frac{2}{3}$ 且 $x\neq 3$．

故选：C．

【变式 2-1】（2019 秋•沙坪坝区期末）若二次根式 $\sqrt{2-m}$ 有意义，且关于 x 的分式方程 $\frac{m}{1-x}+2=\frac{3}{x-1}$ 有正数解，则符合条件的整数 m 的和是（　　）

A．-7　　B．-6　　C．-5　　D．-4

【解析】去分母得，$-m+2(x-1)=3$，

解得，$x=\frac{m+5}{2}$，

$\because$关于x的分式方程$\frac{m}{1-x}+2=\frac{3}{x-1}$有正数解，

$\therefore \frac{m+5}{2}>0$，

$\therefore m>-5$，

又$\because x=1$是增根，当$x=1$时，$\frac{m+5}{2}=1$，即$m=-3$

$\therefore m\neq -3$，

$\because \sqrt{2-m}$有意义，

$\therefore 2-m\geq 0$，

$\therefore m\leq 2$，

因此$-5<m\leq 2$且$m\neq -3$，

$\because m$为整数，

$\therefore m$可以为-4，-2，-1，0，1，2，其和为-4，

故选：D．

【变式 2-2】（2018 秋•遂宁期末）已知x，y为实数，且$y=\sqrt{x-9}-\sqrt{9-x}+4$，则$\sqrt{x}+\sqrt{y}=$__5__．

【解析】依题意得：$\begin{cases}x-9\geq 0\\9-x\geq 0\end{cases}$，

解得$x=9$，

所以$y=4$

故$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3+2=5$．

故答案是：5．

【变式 2-3】（2019 春•上思县期中）若x，y是实数，且$y=\sqrt{4x-1}+\sqrt{1-4x}+3$，求$3\sqrt{\frac{x}{y}}$的值．

【解析】由题意得，$4x-1\geq 0$，$1-4x\geq 0$，

解得，$x=\frac{1}{4}$，

则$y=3$，

则$3\sqrt{\frac{x}{y}}=3\times\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

【变式 2-4】（2018 春•凤阳县期中）若实数 a，b，c 满足 $|a-\sqrt{2}|+\sqrt{b-2}=\sqrt{c-3}+\sqrt{3-c}$．

（1）求 a，b，c；

（2）若满足上式的 a，c 为等腰三角形的两边，求这个等腰三角形的周长．

【解析】（1）由题意可得：$c-3\geq 0$，$3-c\geq 0$，

解得：$c=3$，

$\therefore |a-\sqrt{2}|+\sqrt{b-2}=0$，

则 $a=\sqrt{2}$，$b=2$；

（2）当 a 是腰长，c 是底边时，等腰三角形的腰长之和：$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}<3$，舍去；

当 c 是腰长，a 是底边时，等腰三角形的周长为：$\sqrt{2}+3+3=\sqrt{2}+6$，

综上，这个等腰三角形的周长为：$\sqrt{2}+6$．

【变式 2-5】（2018•邵阳县模拟）已知 $\sqrt{a-17}+\sqrt{17-a}=b+8$

（1）求 a 的值；

（2）求 a^2-b^2 的平方根．

【解析】（1）$\sqrt{a-17}+\sqrt{17-a}=b+8$，

$\therefore a-17\geq 0$ 且 $17-a\geq 0$，

解得：$a=17$；

（2）$\because a=17$，

$\therefore b+8=0$，

$\therefore b=-8$，

$\therefore a^2-b^2$ 的平方根是 $\pm\sqrt{17^2-(-8)^2}=\pm 15$．

知识点 3：二次根式的性质与化简

【例 3】（2019 秋•浦东新区校级月考）若 $2<a<3$，则 $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{(a-3)^2}$ 等于（　　）

A．$5-2a$　　B．$1-2a$　　C．$2a-5$　　D．$2a-1$

【解析】$\because 2<a<3$，

$\therefore \sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{(a-3)^2}$

$=a-2-(3-a)$

$=a-2-3+a$

$=2a-5$.

故选：C.

【变式 3-1】（2019 秋•恩阳区 月考）已知$-1<a<0$，化简$\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}$的结果为(　　)

A．$2a$　　B．$2a+\frac{2}{a}$　　C．$\frac{2}{a}$　　D．$-\frac{2}{a}$

【解析】$\because -1<a<0$，

$\therefore \sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}$

$=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2-4}+\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+4}$

$=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}+\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}$

$=a-\frac{1}{a}-(a+\frac{1}{a})$

$=-\frac{2}{a}$.

故选：D.

【变式 3-2】（2019 秋•娄底期末）$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$，…观察下列各式：请你找出其中规律，并将第$n(n..1)$个等式写出来__$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$__.

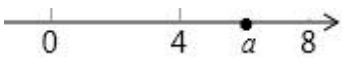
【解析】由$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$，…得

$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$，

故答案为：$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

【变式 3-3】（2019 春•安陆市期中）实数a在数轴上的位置如图所示，则$\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a-10)^2}$化简后为

__7__.



【解析】由数轴可得，

$4<a<8$，

$\therefore \sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a-10)^2}$

$=a-3+10-a$

$=7$，

故答案为：7.

【变式 3-4】（2019 秋•来宾期末）已知：a、b、c 是 ΔABC 的三边长，化简 $\sqrt{(a+b+c)^2}-\sqrt{(b+c-a)^2}+\sqrt{(c-b-a)^2}$.

【解析】$\because a$、b、c 是 ΔABC 的三边长，

$\therefore a+b>c$，$b+c>a$，$b+a>c$，

$\therefore$ 原式 $=|a+b+c|-|b+c-a|+|c-b-a|$

$=a+b+c-(b+c-a)+(b+a-c)$

$=a+b+c-b-c+a+b+a-c$

$=3a+b-c$.

【变式 3-5】（2018 秋•邵阳县期末）设 a，b，c 为 ΔABC 的三边，化简：

$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-a-c)^2}-\sqrt{(c-b-a)^2}$.

【解析】根据 a，b，c 为 ΔABC 的三边，得到 $a+b+c>0$，$a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$，

则原式 $=|a+b+c|+|a-b-c|+|b-a-c|+|c-b-a|=a+b+c+b+c-a+a+c-b-a-b+c=4c$.

【变式 3-6】（2019 春•利辛县期末）观察下列各式：

$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$；$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1\frac{1}{6}$；

$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1\frac{1}{12}$，…

请你根据以上三个等式提供的信息解答下列问题

①猜想：$\sqrt{1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}}=$__$1+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$__$=$____；

②归纳：根据你的观察，猜想，请写出一个用 n(n 为正整数）表示的等式：____；

③应用：计算 $\sqrt{\frac{82}{81}+\frac{1}{100}}$.

【解析】①猜想：$\sqrt{1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}}=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=1\frac{1}{56}$；

故答案为：$1+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$，$1\frac{1}{56}$；

②归纳：根据你的观察，猜想，写出一个用 n(n 为正整数）表示的等式：

$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$；

③应用：$\sqrt{\frac{82}{81}+\frac{1}{100}}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{81}+\frac{1}{100}}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}}$

$=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

$=1\frac{1}{90}$.

知识点 4：最简二次根式

【例 4】（2011 春•云溪区校级期末）在根式$\sqrt{15}$、$\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$、$\sqrt[3]{ab}$、$\frac{1}{3}\sqrt{6}$、$\frac{1}{a}\sqrt{2a^2b}$中，最简二次根式有(　　)

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【解析】$\sqrt{15}$、$\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$、$\frac{1}{3}\sqrt{6}$都是最简二次根式；

$\sqrt[3]{ab}$不是二次根式；$\frac{1}{a}\sqrt{2a^2b}=\pm\sqrt{2b}$，可化简；

最简二次根式有 3 个，故选C.

【变式 4-1】下列各式中，不能化简的二次根式是(　　)

A．$\sqrt{\frac{1}{2}}$　　B．$\sqrt{0.3}$　　C．$\sqrt{30}$　　D．$\sqrt{18}$

【解析】A、$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，被开方数含有分母，不是最简二次根式；

B、$\sqrt{0.3}=\frac{\sqrt{30}}{10}$，被开方数含有小数，不是最简二次根式；

D、$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，被开方数含有能开得尽方的因数，不是最简二次根式；

所以，这三个选项都不是最简二次根式.

故选：C.

【变式 4-2】（2019 秋•新化县期末）若二次根式$\sqrt{5a+3}$是最简二次根式，则最小的正整数a为__2__.

【解析】若二次根式$\sqrt{5a+3}$是最简二次根式，则最小的正整数a为 2，

故答案为：2.

【变式 4-3】（2016 秋•南阳期末）在二次根式$\sqrt{30}$，$\sqrt{45a}$，$\sqrt{0.5}$，$\sqrt{2\frac{1}{2}}$，$\sqrt{40b^2}$，$\sqrt{54}$，$\sqrt{17(x^2+y^2)}$中，最简二次根式有__2__个.

【解析】$\sqrt{30}$，$\sqrt{17(x^2+y^2)}$是最简二次根式，

故答案为：2.

知识点 5：二次根式的乘除法

【例 5】（2019•鄂州模拟）把$m\sqrt{-\frac{1}{m}}$根号外的因式移入根号内得(　　)

A．$\sqrt{m}$　　B．$\sqrt{-m}$　　C．$-\sqrt{m}$　　D．$-\sqrt{-m}$

【解析】$\because m\sqrt{-\frac{1}{m}}$成立，

$\therefore -\frac{1}{m}>0$，即$m<0$，

$\therefore$原式$=-\sqrt{(-m)^2(-\frac{1}{m})}=-\sqrt{-m}$.

故选：D.

【变式 5-1】（2012 春•雨山区校级期中）等式$\sqrt{\frac{x}{x-3}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$成立的条件是(　　)

A．$x..0$且$x\neq 3$　　B．$x\neq 3$　　C．$x..0$　　D．$x>3$

【解析】根据二次根式的意义，有$x..0$，且$x-3>0$，

解得$x>3$.

故选：D.

【变式 5-2】（2019 秋•唐河县期中）若$ab>0$，$a+b<0$．那么下面各式：①$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$；②$\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=1$；③$\sqrt{ab}\div\sqrt{\frac{a}{b}}=-b$；④$\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=a$，其中正确的是__②③__（填 序号）

【解析】 因为若$ab>0$，$a+b<0$，

所以$a<0$，$b<0$.

由于$a<0$，$b<0$，$\sqrt{a}$与$\sqrt{b}$无意义， 所以①的变形错误；

$\because \sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=1$，故②正确；

$\because \sqrt{ab}\div\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab\div\frac{a}{b}}=\sqrt{ab\times\frac{b}{a}}=\sqrt{b^2}=|b|$，由于$b<0$，$\therefore$原式$=-b$，故③正确；

$\because \sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab\cdot\frac{a}{b}}=\sqrt{a^2}=|a|$，由于$a<0$，$\therefore$原式$=-a$，故④计算错误．

故答案为②③

【变式 5-3】（2017 秋•新野县期末）计算：$\sqrt{18}\div\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=$__$\sqrt{2}$__.

【解析】原式$=\sqrt{18\div3\times\frac{1}{3}}=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$．

【变式 5-4】（2019•鄂州模拟）已知$\sqrt{\frac{9-x}{x-6}}=\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$，且$x$为偶数，求$(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$的值.

【解析】$\because \sqrt{\frac{9-x}{x-6}}=\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$，

$\therefore 6<x\leqslant 9$，

$\because x$为偶数，

$\therefore x=8$，

则$(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}=(1+x)\sqrt{\frac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)}}=\sqrt{(x-4)(x+1)}=\sqrt{36}=6$．

【变式 5-5】（2018 春•铁西区期中）（1）探索：先观察并计算下列各式，在空白处填上“＞”、“＜”或“＝”，并完成后面的问题.

$\sqrt{4}\times\sqrt{16}$__=__$\sqrt{4\times16}$，$\sqrt{49}\times\sqrt{9}$_____$\sqrt{49\times9}$，$\sqrt{\frac{9}{25}}\times\sqrt{25}$_____$\sqrt{\frac{9}{25}\times25}$，$\sqrt{\frac{16}{9}}\times\sqrt{\frac{4}{25}}$_____$\sqrt{\frac{16}{9}\times\frac{4}{25}}$…

用$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{ab}$表示上述规律为：_____；

（2）利用（1）中的结论，求$\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$的值

（3）设$x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{6}$试用含x，y的式子表示$\sqrt{54}$.

【解析】（1）$\because \sqrt{4}\times\sqrt{16}=2\times4=8$，$\sqrt{4\times16}=\sqrt{64}=8$，

$\therefore \sqrt{4}\times\sqrt{16}=\sqrt{4\times16}$，

$\sqrt{49}\times\sqrt{9}=\sqrt{49\times9}$，

$\sqrt{\frac{16}{9}}\times\sqrt{\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{16}{9}\times\frac{4}{25}}$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，

故答案为：=，=，=，=，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a..0,b..0)$；

（2）$\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{8\times\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{4}$

$=2$；

（3）$\because x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{6}$，

$\therefore\sqrt{54}=\sqrt{3\times3\times6}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

$=x\cdot x\cdot y$

$=x^2y$.

【变式 5-6】（2016 秋•长春月考）你能找出规律吗？

（1）计算：$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$__6__，$\sqrt{4\times9}=$_____，$\sqrt{16}\times\sqrt{25}=$_____，$\sqrt{16\times25}=$_____.

（2）请按找到的规律计算：

①$\sqrt{5}\times\sqrt{20}$；

②$\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{29\frac{2}{5}}$.

（3）已知：$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，则$\sqrt{40}=$_____（用含a，b的代数式表示）.

【解析】（1）$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=6$，$\sqrt{4\times9}=6$，

$\sqrt{16}\times\sqrt{25}=20$，$\sqrt{16\times25}=20$，

总结出规律：$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a..0,b..0)$，

（2）$\because\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a..0,b..0)$，

$\therefore$①$\sqrt{5}\times\sqrt{20}=\sqrt{5\times20}=10$.

②$\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{29\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{147}{5}}=\sqrt{49}=7$.

（3）$\because a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，

$\therefore \sqrt{40}=\sqrt{2\times2\times10}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{10}=a^2b$，

故答案为：6，6，20，20；a^2b

知识点 6：分母有理化

【例 6】（2019 秋•桥西区校级月考）已知：$a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，$b=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，则 a 与 b 的关系是（　　）

A．$a-b=0$　　B．$a+b=0$　　C．$ab=1$　　D．$a^2=b^2$

【解析】分母有理化，可得 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$，

$\therefore a-b=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$，故 A 选项错误；

$a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$，故 B 选项错误；

$ab=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=4-3=1$，故 C 选项正确；

$\because a^2=(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$，$b^2=(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$，

$\therefore a^2\neq b^2$，故 D 选项错误；

故选：C．

【变式 6-1】（2009 秋•荆门期末）甲，乙两同学对代数式 $\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}(m>0,n>0)$ 分别作了如下变形：

甲：$\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$；

乙：$\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$．

关于这两种变形过程的说法正确的是（　　）

A．甲，乙都正确　　B．甲，乙都不正确

C．只有甲正确　　D．只有乙正确

【解析】甲的做法是先把分母有理化，再约分，如果 $m=n$ 则化简不成立；

乙的做法是先把分子分解因式，再约分，正确．故本题选 D．

【变式 6-2】（2018•苍南县校级自主招生）已知：对于正整数 n，有 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，若某个正整数 k 满足

$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，则 $k=$ __8__．

【解析】$\because \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

即$1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{3}$，

解得$k=8$．

故答案为：8．

【变式 6-3】（2017 春•宜兴市校级月考）观察下列等式：$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，请从上述等式中找出规律，并利用这一规律计算：$(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}})(\sqrt{2014}+\sqrt{2})=$ __2012__．

【解析】原式$=(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{2014}-\sqrt{2013})(\sqrt{2014}+\sqrt{2})$

$=(\sqrt{2014}-\sqrt{2})(\sqrt{2014}+\sqrt{2})$

$=2014-2$

$=2012$，

故答案为：2012．

【变式 6-4】（2019 秋•景泰县校级期中）阅读下面计算过程：

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$；

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$；

$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1\times(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2$．

求：（1）$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$的值．

（2）$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$（$n$为正整数）的值．

（3）$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$的值．

【解析】（1）$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{1\times(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$；

（2）$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

（3）$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\ldots+(10-\sqrt{99})=10-1=9$．

【变式 6-5】（2018 春•海淀区期末）已知 $x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，求：x^2+xy+y^2 的值．

【解析】$\because x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，

$\therefore x^2+xy+y^2$

$=x^2+2xy+y^2-xy$

$=(x+y)^2-xy$

$=(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

$=16-4+3$

$=15$．

【变式 6-6】（2019 春•商州区期中）阅读理解材料：把分母中的根号化掉叫做分母有理化，例如：①$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；②$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{2}+1$ 等运算都是分母有理化．根据上述材料，

（1）化简：$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

（2）计算：$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{9}}$．

【解析】（1）原式$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$；

（2）原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{10}-\sqrt{9}=\sqrt{10}-1$．

【变式 6-7】（2017 春•江汉区期中）已知 $x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，求下列式子的值：

（1）$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

（2）$(7+4\sqrt{3})x^2+xy+\sqrt{3}$

【解析】（1）$\because x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，

$\therefore x+y=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$，

$xy=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$，

则原式$=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{1}=4$；

（2）原式$=(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}$

$=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})+4-3+\sqrt{3}$

$=49-48+1+\sqrt{3}$

$=2+\sqrt{3}$．