2019-2020 学年八年级数学下册同步必刷题闯关练（人教版）

第十八章《平行四边形》

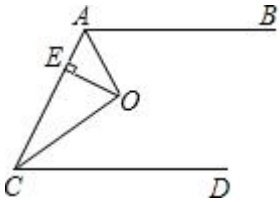
18.1 平行四边形



必刷基础题

知识点 1：平行线之间的距离

【例 1】（2019 秋•田家庵区期中）如图，已知 $AB//CD$，OA、OC 分别平分 $\angle BAC$ 和 $\angle ACD$，$OE\perp AC$ 于点 E，且 $OE=2$，则 AB、CD 之间的距离为(　　)



A．2　　B．4　　C．6　　D．8

【解析】作 $OF\perp AB$，延长 FO 与 CD 交于 G 点，

$\because AB//CD$，$\therefore FG$ 垂直 CD，

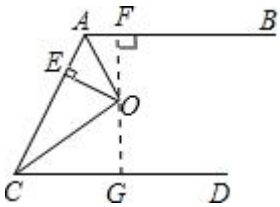
$\therefore FG$ 就是 AB 与 CD 之间的距离．

$\because \angle ACD$ 平分线的交点，$OE\perp AC$ 交 AC 于 E，

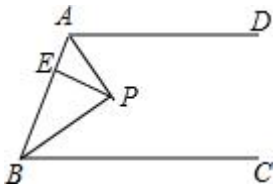
$\therefore OE=OF=OG$，

$\therefore AB$ 与 CD 之间的距离等于 $2OE=4$．

故选：B．



【变式 1-1】（2017•沈河区一模）如图，$AD//BC$，$\angle ABC$ 的角平分线 BP 与 $\angle BAD$ 的角平分线 AP 相交于点 P，作 $PE\perp AB$ 于点 E．若 $PE=2$，则两平行线 AD 与 BC 间的距离为(　　)



A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【解析】过点 P 作 $MN \perp AD$，

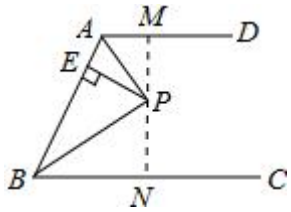
$\because AD//BC$，$\angle ABC$ 的角平分线 BP 与 $\angle BAD$ 的角平分线 AP 相交于点 P，$PE \perp AB$ 于点 E，

$\therefore AP \perp BP$，$PN \perp BC$，

$\therefore PM = PE = 2$，$PE = PN = 2$，

$\therefore MN = 2 + 2 = 4$；

故选：A．



【变式 1-2】（2019•合浦县二模）如图，$AD//BC$，$\angle A = \angle D = 90°$，$AB = 1$，$AD = 2$，那么 AD，BC 间的距离为__1__．



【解析】$\because AD//BC$，$\angle A = \angle D = 90°$，

$\therefore \angle B = \angle C = 90°$

$\therefore AB = CD$ 即为 AD，BC 间的距离

$\because AB = 1$，$AD = 2$，

$\therefore$ 那么 AD，BC 间的距离为 1．

故答案为：1．

【变式 1-3】（2014 春•高密市期中）直线 a，b，c 是三条平行线，已知 a 与 b 的距离为 5 厘米，b 与 c 的距离为 2 厘米，则 a 与 c 的距离为__7 厘米或 3 厘米__．

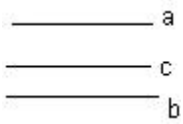
【解析】应分两种情况：

①如图：



a 与 c 的距离为：$5+2=7$（厘米）；

②如图：

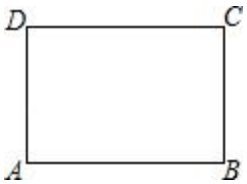


a 与 c 的距离为：$5-2=3$（厘米）.

综上所述，a 与 c 的距离为 7 厘米或 3 厘米.

故答案为：7 厘米或 3 厘米.

【变式 1-4】如图，长方形 $ABCD$ 中，$AB=6cm$，长方形的面积为 $24cm^2$，求 AB 与 CD 之间的距离.



【解析】由题意得，$AB\cdot AD=24$，

$\because AB=6cm$，

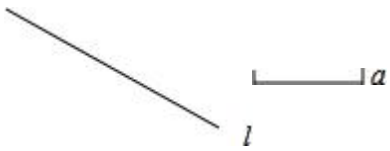
$\therefore 6\cdot AD=24$，

解得 $AD=4cm$，

$\therefore AB$ 与 CD 之间的距离是 $4cm$.

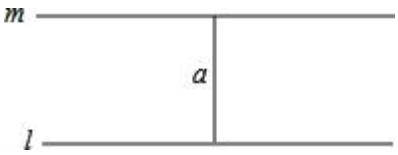
【变式 1-5】（2010 秋•鄞州区月考）作图题：

如图已知直线 l 和线段 a，现在要作一条直线 m，使 l 与 m 的距离为 a，这样的直线一共可以作几条？请你作出一条（不写作法，保留作图痕迹）.



【解析】两条.

如图所示：



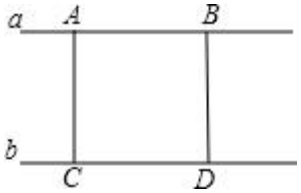
同理在 l 的另一侧还可以做一条，

故一共可以作两条直线 m .

【变式 1-6】已知直线 a ， b ， a 平行于 b ，过直线 a 上任意两点 A ， B 分别向直线 b 作垂线，交直线 b 于点 C ， D .

（1）线段 AC ， BD 所在的直线有怎样的位置关系？

（2）比较线段 AC ， BD 的长短.



【解析】（1）$\because AC \perp a$ ， $BD \perp a$ ，

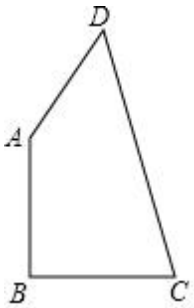
$\therefore AC // BD$ ；

（2）$\because a // b$ ， $AC \perp a$ ， $BD \perp a$ ，

$\therefore AC = BD$.

知识点 2：勾股定理的应用

【例 2】（2017 秋•黄岛区期中）有一块形状为四边形的零件，其中 $\angle B = 90°$ ，现测得它的各边长度为 $AB = 9cm$ ， $BC = 12cm$ ， $CD = 17cm$ ， $DA = 8cm$ ，求这个四边形零件的面积.



【解析】连接 AC ，

在 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 中， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 15$ ，

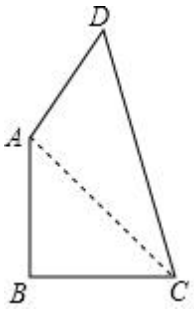
在 ΔADC 中， $\because AC^2 + AD^2 = 15^2 + 8^2 = 289$ ，

$DC^2=17^2=289$，

$\therefore AC^2+AD^2=DC^2$，

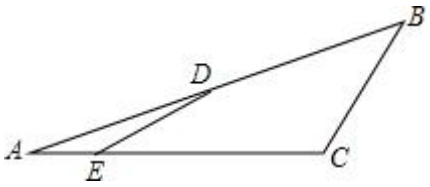
$\therefore \Delta ADC$ 为直角三角形，

$\therefore$ 这块钢板的面积 $=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AB\times BC+\frac{1}{2}AD\times AC=54+60=114$（平方厘米）.



知识点 3：三角形中位线定理

【例 3】（2020•龙岗区校级模拟）如图，ΔABC 中，D 是 AB 的中点，E 在 AC 上，且 $\angle AED=90°+\frac{1}{2}\angle C$，则 $BC+2AE$ 等于（　　）



A．AB　　B．AC　　C．$\frac{3}{2}AB$　　D．$\frac{3}{2}AC$

【解析】如图，过点 B 作 $BF//DE$ 交 AC 于点 F．则 $\angle BFC=\angle DEF$．

又∵点 D 是 AB 的中点，

$\therefore EF=AE$．

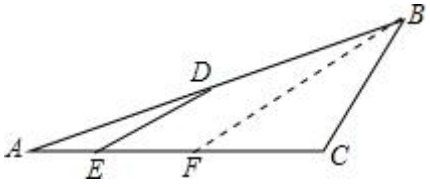
$\because \angle DEF=\angle BFC=180°-\angle AED=180°-(90°+\frac{1}{2}\angle C)=90°-\frac{1}{2}\angle C$，

$\therefore \angle FBC=\angle BFC$，

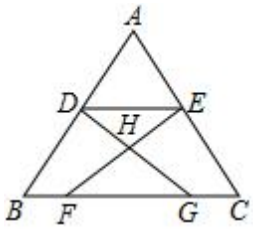
$\therefore BC=FC$，

$\therefore BC+2AE=AC$．

故选：B．



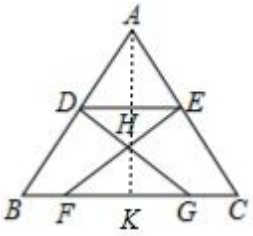
【变式 3-1】（2019 春•西湖区校级月考）如图所示，在 ΔABC 中，$AB=AC$，D，E 分别是 AB，AC 的中点，F，G 为 BC 上的点，连接 DG、EF，若 $AB=5cm$，$BC=8cm$，$FG=4cm$，则 ΔHFG 的面积为（ ）



A．$1cm^2$　　B．$1.5cm^2$　　C．$2cm^2$　　D．$3cm^2$

【解析】连接，作 $AK\perp BC$ 于 K．

$\because AB=AC$，



$\therefore BK=CK=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 8=4$，

在 RtΔABK 中，$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$\because D$、E 分别是 AB，AC 的中点，

$\therefore DE$ 是中位线，即平分三角形的高且 $DE=8\div 2=4$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC=FG$，

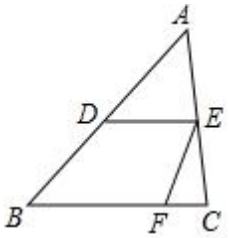
$\therefore \Delta DEH\cong\Delta GFH$，$H$ 也是 DG，EF 的中点，

$\therefore \Delta HFG$ 的高是 $\frac{1}{2}AK\div 2=1.5\div 2=0.75$，

$\therefore S_{\Delta HFG}=4\times 0.75\div 2=1.5$．

故选：B．

【变式 3-2】（2019 秋•儋州期末）如图，在 ΔABC 中，D、E 分别是 AB、AC 的中点，点 F 在 BC 上，ED 是 $\angle AEF$ 的平分线，若 $\angle C=80°$，则 $\angle EFB$ 的度数是__100°__.



【解析】∵在 ΔABC 中， D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点，

$\therefore DE$ 是中位线，

$\therefore DE//BC$ ，

$\therefore \angle AED=\angle C=80°$.

又 DE 是 $\angle AEF$ 的角平分线，

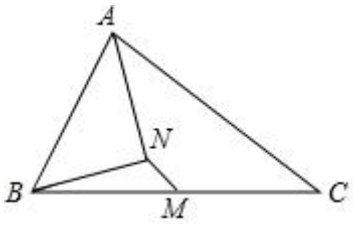
$\therefore \angle DEF=\angle AED=80°$ ，

$\therefore \angle FEC=20°$ ，

$\therefore \angle EFB=180°-\angle C-\angle FEC=100°$.

故答案为： $100°$.

【变式 3-2】（2019 春•福清市期中）如图所示， M 是 ΔABC 的边 BC 的中点， AN 平分 $\angle BAC$ ， $BN\perp AN$ 于点 N ，且 $BN=3$ ， $AN=4$ ， $MN=1$ ，则 AC 的长是__7__.



【解析】延长 BN 交 AC 于 D ，

∵ AN 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle NAB=\angle NAD$ ，

∵ $BN\perp AN$ ，

$\therefore \angle ANB=90°$ ，

在 ΔANB 和 ΔAND 中，

$$\begin{cases}\angle NAB=\angle NAD\\ AN=AN\\ \angle ANB=\angle AND=90°\end{cases},$$

$\therefore \Delta ANB\cong\Delta AND(ASA)$ ，

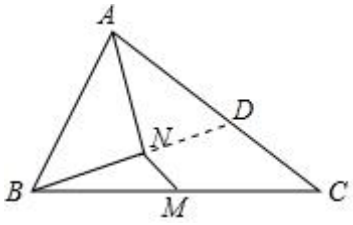
$\therefore AD=AB=5$ ， $BN=ND$ ，

∵ M 是 ΔABC 的边 BC 的中点，

$\therefore DC=2MN=2$ ，

$\therefore AC=AD+CD=2+5=7$ ；

故答案为：7.



【变式 3-3】（2019 秋•新泰市期末）如图，在 ΔABC 中，AE 平分 $\angle BAC$，$BE \perp AE$ 于点 E，点 F 是 BC 的中点．

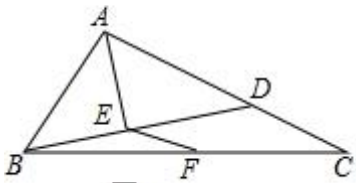


图1

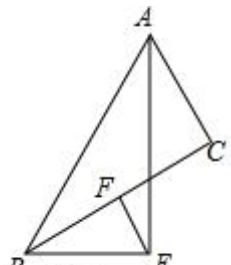


图2

（1）如图 1，BE 的延长线与 AC 边相交于点 D，求证：$EF=\frac{1}{2}(AC-AB)$；

（2）如图 2，ΔABC 中，$AB=9$，$AC=5$，求线段 EF 的长．

【解析】（1）证明：在 ΔAEB 和 ΔAED 中，

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle DAE\\ AE=AE\\ \angle AEB=\angle AED=90^\circ\end{cases},$$

$\therefore \Delta AEB\cong\Delta AED(ASA)$

$\therefore BE=ED$，$AD=AB$，

$\because BE=ED$，$BF=FC$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}(AC-AD)=\frac{1}{2}(AC-AB)$；

（2）解：分别延长 BE、AC 交于点 H，

在 ΔAEB 和 ΔAEH 中，

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle HAE\\ AE=AE\\ \angle AEB=\angle AEH=90^\circ\end{cases},$$

$\therefore \Delta AEB\cong\Delta AED(ASA)$

$\therefore BE=EH$，$AH=AB=9$，

$\because BE=EH$，$BF=FC$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}(AH-AC)=2$．

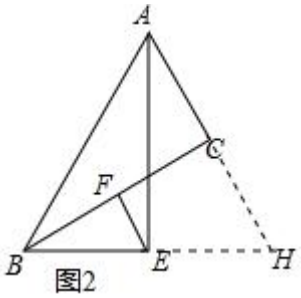
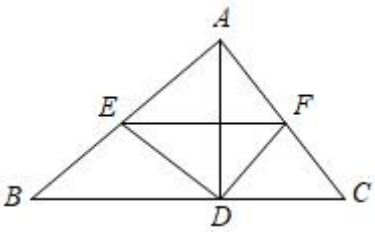


图2

【变式 3-4】（2019 秋•泰兴市期末）如图，在ΔABC中，AD是高，E、F分别是AB、AC的中点．

（1）$AB=12$，$AC=9$，求四边形$AEDF$的周长；

（2）EF与AD有怎样的位置关系？证明你的结论．



【解析】（1）$\because AD$是高，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，

$\because E$、F分别是AB、AC的中点，

$\therefore ED=EB=\frac{1}{2}AB$，$DF=FC=\frac{1}{2}AC$，

$\because AB=12$，$AC=9$，

$\therefore AE+ED=12$，$AF+DF=9$，

$\therefore$四边形$AEDF$的周长为$12+9=21$；

（2）$EF\perp AD$，

理由：$\because DE=AE$，$DF=AF$，

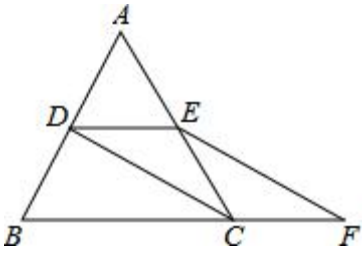
$\therefore$点E、F在线段AD的垂直平分线上，

$\therefore EF\perp AD$．

【变式 3-5】（2019 秋•安丘市期末）如图，在等边ΔABC中，D，E分别为AB，AC的中点，延长BC至点F，使$CF=\frac{1}{2}BC$，连结CD和EF．

（1）求证：$CD=EF$；

（2）猜想：ΔABC 的面积与四边形 $BDEF$ 的面积的关系，并说明理由．



【解析】（1）$\because D$、E 分别为 AB、AC 的中点，

$\therefore DE$ 为 ΔABC 的中位线，

$\therefore DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，

$\because CF=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore DE=FC$，

$\because DE//FC$，

$\therefore$ 四边形 $DCFE$ 是平行四边形，

$\therefore CD=EF$；

（2）猜想：ΔABC 的面积＝四边形 $BDEF$ 的面积，理由如下：

$\because DE$ 为 ΔABC 的中位线，

$\therefore DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$

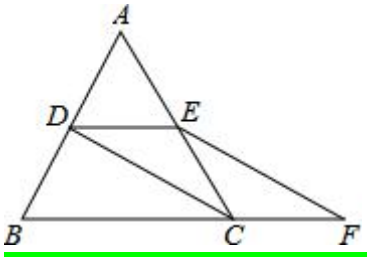
$\therefore \Delta ADE$ 的面积＝ΔDEC 的面积，

$\therefore$ 四边形 $DCFE$ 是平行四边形，

$\therefore \Delta DEC$ 的面积＝ΔECF 的面积，

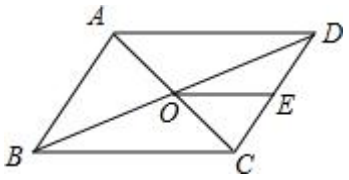
$\therefore \Delta ADE$ 的面积＝ΔECF 的面积，

$\therefore \Delta ABC$ 的面积＝四边形 $BDEF$ 的面积．



知识点 4：平行四边形的性质

【例 4】（2020•南通模拟）如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 是 CD 的中点，则 ΔODE 与 ΔAOB 的面积比为（　　）



A．$1:2$　　B．$1:3$　　C．$1:4$　　D．$1:5$

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AO=CO$，$BO=DO$

$\therefore S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}$，$S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}$．

$\therefore S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}$．

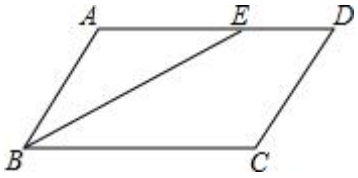
∵点 E 是 CD 的中点

$\therefore S_{\Delta ODE}=\frac{1}{2}S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}S_{\Delta AOB}$．

$\therefore \Delta ODE$ 与 ΔAOB 的面积比为 $1:2$

故选：A．

【变式 4-1】（2019 秋•儋州期末）如图，在 $\square ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=7$，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E，则 ED 等于（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【解析】∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD//BC$，$AD=BC=7$，

$\therefore \angle AEB=\angle EBC$，

∵BE 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABE=\angle EBC$，

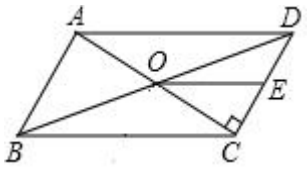
$\therefore \angle AEB=\angle ABE$，

$\therefore AB=AE=4$，

$\therefore ED=AD-AE=BC-AE=7-4=3$．

故选：B．

【变式 4-2】（2019 秋•龙泉驿区期末）如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC\perp CD$，$OE//BC$ 交 CD 于 E，若 $OC=4$，$CE=3$，则 BC 的长是__10__．



【解析】∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC$，$AD//BC$，

$\because OE//BC$，

$\therefore OE//AD$，

$\therefore OE$ 是 ΔACD 的中位线，

$\because CE=3cm$，

$\therefore DC=2OE=2\times 3=6$.

$\because CO=4$，

$\therefore AC=8$，

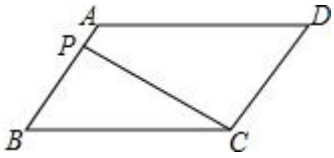
$\because AC\perp CD$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\therefore BC=AD=10$，

故答案为：10.

【变式 4-3】（2020•江西模拟）如图，$\square ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=4$，$\angle B=60°$，点 P 是四边形上的一个动点，则当 ΔPBC 为直角三角形时，BP 的长为__2 或 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{19}$ __.



【解析】分两种情况：

（1）①当 $\angle BPC=90°$ 时，

作 $AM\perp BC$ 于 M，如图 1 所示，

$\because \angle B=60°$，

$\therefore \angle BAM=30°$，

$\therefore BM=\dfrac{1}{2}AB=1$，

$\therefore AM=\sqrt{3}BM=\sqrt{3}$，$CM=BC-BM=4-1=3$，

$\therefore AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，

$\therefore \Delta ABC$ 是直角三角形，$\angle BAC=90°$，

$\therefore$ 当点 P 与 A 重合时，$\angle BPC=\angle BAC=90°$，

$\therefore BP=BA=2$；

②当 $\angle BPC=90°$，

点 P 在边 AD 上，$CP=CD=AB=2$ 时，

$BP=\sqrt{BC^2-CP^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$；

（2）当 $\angle BCP=90°$ 时，如图 3 所示：

则 $CP=AM=\sqrt{3}$，

$\therefore BP=\sqrt{BC^2+CP^2}=\sqrt{19}$；

综上所述：当 ΔPBC 为直角三角形时，BP 的长为 2 或 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{19}$．

故答案为：2 或 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{19}$．

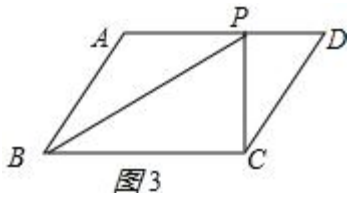


图3

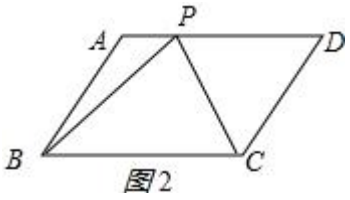


图2

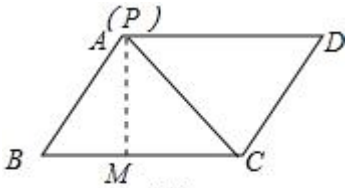
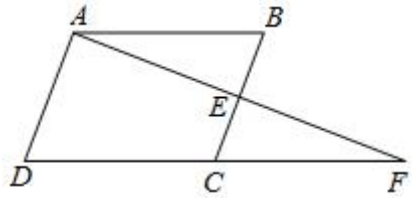


图1

【变式 4-4】（2020•江夏区模拟）如图，$\square ABCD$ 中，E 为 BC 边的中点，连 AE 并与 DC 的延长线交于点 F，求证：$DC=CF$．



【解析】证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB//CD$，$AB=CD$，

$\therefore \angle BAE=\angle CFE$；

$\because E$ 为 BC 中点，

$\therefore EB=EC$，

在 ΔABE 与 ΔFCE 中，

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle CFE\\ \angle AEB=\angle CEF\\ EB=EC\end{cases}$$，

$\therefore \Delta ABE\cong\Delta FCE(AAS)$，

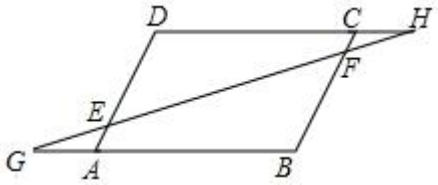
$\therefore AB=CF$，

$\therefore DC=CF$．

【变式 4-5】（2019•无锡）如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AD、BC 上，且 $DE=BF$，直线 EF 与 BA、DC 的延长线分别交于点 G，H．求证：

（1）$\Delta DEH\cong\Delta BFG$；

（2）$AG=CH$．



【解析】（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB//CD$，$\angle B=\angle D$，$AB=CD$，

$\therefore \angle G=\angle H$，

$\because \angle D=\angle B$，$\angle H=\angle G$，$DE=BF$，

$\therefore \Delta DEH\cong\Delta BFG(AAS)$；

（2）$\because \Delta DEH\cong\Delta BFG$，

$\therefore GB=HD$，

又 $\because AB=CD$，

$\therefore GB-AB=HD-CD$，

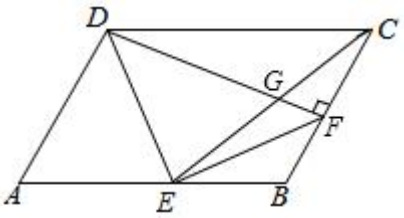
$\therefore AG=CH$．

【变式 4-6】（2020•宿松县模拟）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 AB 边上一点，$CE=AB$，$DF\perp BC$，

垂足为点 F，交 CE 于点 G，连接 DE， EF．

（1）求证：$\angle AED=90°-\frac{1}{2}\angle DCE$；

（3）若点 E 是 AB 边的中点，求证：$\angle EFB=\frac{1}{2}\angle DEF$．



【解析】证明：（1）$\because CE=AB$， $AB=CD$

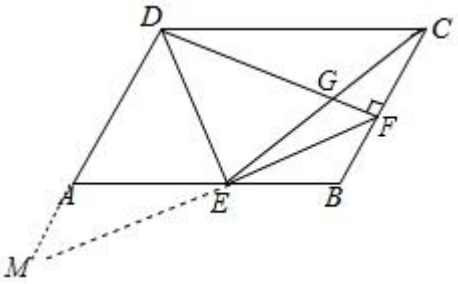
$\therefore CE=CD$，

$\therefore \angle CDE=\angle CED=\frac{180°-\angle DCE}{2}=90°-\frac{1}{2}\angle DCE$，

$\because CD//AB$

$\therefore \angle AED=\angle CDE=90°-\frac{1}{2}\angle DCE$；

（2）如图，延长 DA， FE 于点 M，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AD//BC$，且 $DF\perp BC$

$\therefore DF\perp AD$， $\angle M=\angle EFB$

$\because \angle M=\angle EFB$， $AE=BE$， $\angle AEM=\angle FEB$

$\therefore \Delta AEM\cong\Delta BEF(AAS)$

$\therefore ME=EF$，且 $DF\perp DM$

$\therefore ME=DE=EF$

$\therefore \angle M=\angle MDE$

$\therefore \angle DEF=\angle M+\angle MDE=2\angle M$

$\therefore \angle EFB=\frac{1}{2}\angle DEF$

知识点 5：平行四边形的判定

【例 5】（2019 春•兴城市期末）下列条件：

①两组对边分别平行

②两组对边分别相等

③两组对角分别相等

④两条对角线互相平分

其中，能判定四边形是平行四边形的条件的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解析】①两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

②两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

③两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

④两条对角线互相平分的四边形是平行四边形；

故选：D．

【变式 5-1】（2019•五华区二模）八年级 6 班的一个互助学习小组组长收集并整理了组员们讨论如下问题时所需的条件．

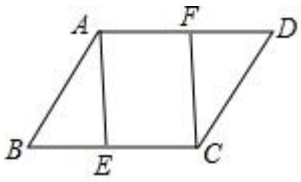
如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 AD 上，____

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形，

你能在横线上填上最少且简捷的条件使结论成立吗？

条件分别是：① $BE=DF$ ；② $\angle B=\angle D$ ；③ $\angle BAE=\angle DCF$ ；④四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

其中 A 、 B 、 C 、 D 四位同学所填条件符合题目要求的是（　　）



A．①②③④　　B．①②③　　C．①④　　D．④

【解析】当添加①④时，可得四边形 $AECF$ 是平行四边形，

理由如下：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AD=BC$ ， $AD//BC$

$\because BE=DF$

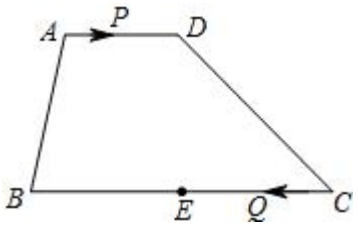
$\therefore AD-DF=BC-BE$

$\therefore AF=EC$，且 $AF//CE$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

故选：C.

【变式 5-2】（2019 秋•莱芜区期末）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD=3$，$BC=8$，E 是 BC 的中点，点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从 A 点出发，沿 AD 向点 D 运动；点 Q 同时以每秒 2 个单位长度的速度从点 C 出发，沿 CB 向点 B 运动，点 P 停止运动时，点 Q 也随之停止运动．当运动时间 $t=$ 1 或 $\frac{7}{3}$ 秒时，以点 P，Q，E，D 为顶点的四边形是平行四边形.



【解析】由已知梯形，

当 Q 运动到 E 和 B 之间，设运动时间为 t，则得：

$2t-\frac{8}{2}=3-t$，

解得：$t=\frac{7}{3}$，

当 Q 运动到 E 和 C 之间，设运动时间为 t，则得：$\frac{8}{2}-2t=3-t$，

解得：$t=1$，

故当运动时间 t 为 1 或 $\frac{7}{3}$ 秒时，以点 P，Q，E，D 为顶点的四边形是平行四边形.

故答案为：1 或 $\frac{7}{3}$.

【变式 5-3】（2019 春•沧州期末）已知点 $A(1,0)$，$B(4,0)$，$C(0,2)$，在平面内找一点 M 使得以 M、A、B、C 为顶点的四边形为平行四边形，则点 M 的坐标为 $(3,2)$、$(-3,2)$、$(5,-2)$.

【解析】①当如图 1 时，

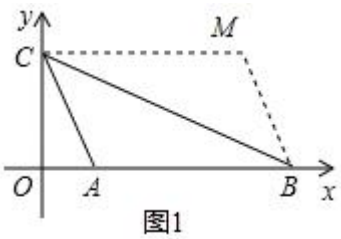


图1

$\because C(0,2)$，$A(1,0)$，$B(4,0)$，

$\therefore AB=3$，

$\because$四边形 $ABMC$ 是平行四边形，

$\therefore M(3,2)$；

②当如图 2 所示时，同①可知，$M(-3,2)$；

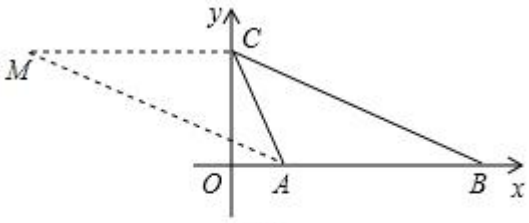


图2

③当如图 3 所示时，过点 M 作 $MD\perp x$ 轴，

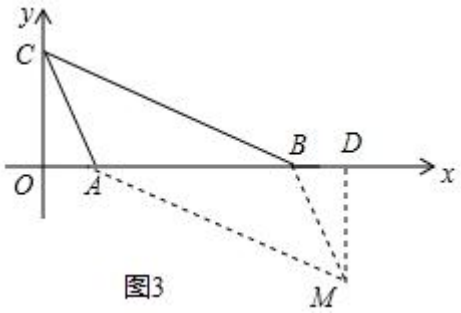


图3

$\because$四边形 $ACBM$ 是平行四边形，

$\therefore BD=OA=1$，$MD=OC=2$，

$\therefore OD=4+1=5$，

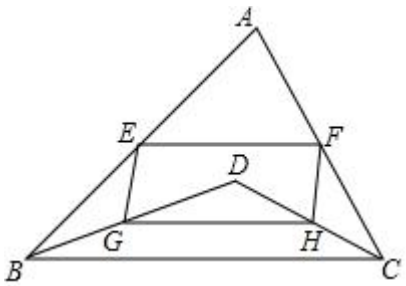
$\therefore M(5,-2)$；

综上所述，点 M 坐标为 $(3,2)$、$(-3,2)$、$(5,-2)$；

【变式 5-4】（2020•恩施州模拟）如图，在 ΔABC 中，$\angle BAC=70°$，$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线交于 D 点，E、F、G、H 分别是线段 AB、AC、BD、CD 的中点．

（1）求 $\angle BDC$ 的度数；

（2）证明：四边形 $EGHF$ 为平行四边形．



【解析】（1）$\because \angle BAC=70°$，

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=110°$

$\because BD$、CD 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$，

$\therefore \angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\therefore \angle DBC+\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=55°$

$\therefore \angle BDC=180°-(\angle DBC+\angle DCB)=125°$；

（2）证明：$\because E$、F、G、H 分别是 AB、AC、BD、CD 的中点，

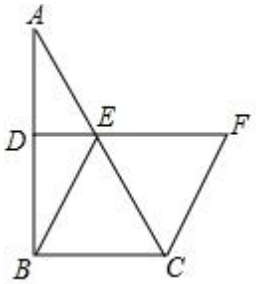
$\therefore EF$，GH 分别为 ΔABC 和 ΔDBC 的中位线

$\therefore EF//BC$，$GH//BC$，且 $EF=\frac{1}{2}BC$，$GH=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore EF//GH$，$EF=GH$

$\therefore$ 四边形 $EGHF$ 为平行四边形.

【变式 5-5】（2019 春•铜仁市期末）如图所示，ΔABC 中，$\angle ABC=90°$，D、E 分别为 AB、AC 的中点，延长 DE 到 F，使 $EF=2DE$．求证：四边形 $BCFE$ 是平行四边形.



【解析】证明：$\because D$．E 为 AB，AC 中点

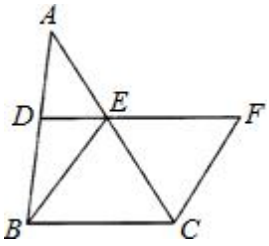
$\therefore DE$ 为 ΔABC 的中位线，$DE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore DE//BC$，

即 $EF//BC$，

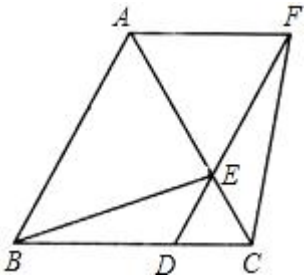
$\because EF=BC$，

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 为平行四边形.



【变式 5-6】（2020•广东模拟）如图，已知 ΔABC 是等边三角形，E 为 AC 上一点，连接 BE．将 AC 绕点 E 旋转，使点 C 落在 BC 上的点 D 处，点 A 落在 BC 上方的点 F 处，连接 AF．

求证：四边形 $ABDF$ 是平行四边形．



【解析】证明：$\because \Delta ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AC = BC = AB$，$\angle ACB = 60°$；

$\because$ 将 AC 绕点 E 旋转

$\therefore ED = CE$，$EF = AE$

$\therefore \Delta EDC$ 是等边三角形，

$\therefore DE = CD = CE$，$\angle DCE = \angle EDC = 60°$，

$\therefore FD = AC = BC$，

$\therefore \Delta ABC$、ΔAEF、ΔDCE 均为等边三角形，

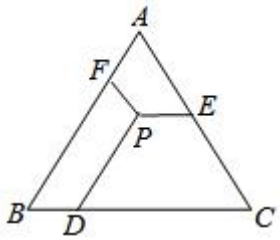
$\therefore \angle CDE = \angle ABC = \angle EFA = 60°$，

$\therefore AB//FD$，$BD//AF$，

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形．

知识点 6：平行四边形的判定与性质

【例 6】（2018 春•太子河区期末）如图，ΔABC 是等边三角形，P 是形内一点，$PD//AB$，$PE//BC$，$PF//AC$，若 ΔABC 的周长为 18，则 $PD + PE + PF =$（　　）



A．18　　B．$9\sqrt{3}$

C．6　　D．条件不够，不能确定

【解析】延长 EP 交 AB 于点 G，延长 DP 交 AC 与点 H，

$\because PD//AB$，$PE//BC$，$PF//AC$，

$\therefore$四边形$AFPH$、四边形$PDBG$均为平行四边形，

$\therefore PD=BG$，$PH=AF$．

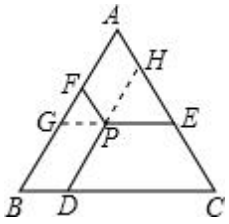
又$\because \Delta ABC$为等边三角形，

$\therefore \Delta FGP$和ΔHPE也是等边三角形，

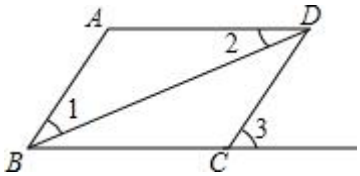
$\therefore PE=PH=AF$，$PF=GF$，

$\therefore PE+PD+PF=AF+BG+FG=AB=\dfrac{18}{3}=6$，

故选：C．



【变式 6-1】（2018 秋•南岗区校级月考）如图，$AB//CD$，$AD//BC$，则下列各式中正确的是(　　)



A．$\angle 1+\angle 2>\angle 3$　　B．$\angle 1+\angle 2=\angle 3$

C．$\angle 1+\angle 2<\angle 3$　　D．$\angle 1+\angle 2$与$\angle 3$大小无法确定

【解析】$\because AB//CD$，$AD//BC$，

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形，

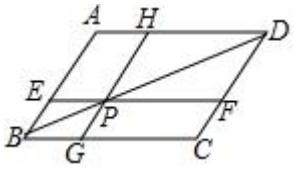
$\therefore \angle A=\angle BCD$，

$\because \angle 3+\angle BCD=180°$，$\angle 1+\angle 2+\angle A=180°$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 3$．

故选：B．

【变式 6-2】(2019 春•南岗区校级月考)如图，在$\square ABCD$中，过对角线BD上一点P作$EF//BC$，$GH//AB$，则图中面积相等的平行四边形共有__3__对．



【解析】$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore S_{\Delta ABD}=S_{\Delta CBD}$.

$\because BP$ 是平行四边形 $BEPG$ 的对角线，

$\therefore S_{\Delta BEP}=S_{\Delta BGP}$，

$\because PD$ 是平行四边形 $HPFD$ 的对角线，

$\therefore S_{\Delta HPD}=S_{\Delta FPD}$.

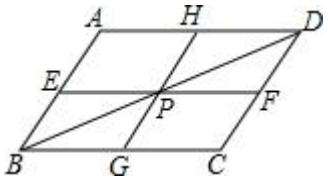
$\therefore S_{\Delta ABD}-S_{\Delta BEP}-S_{\Delta HPD}=S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BGP}-S_{\Delta PFD}$，即 $S_{\square AEPH}=S_{\square GCFP}$，

$\therefore S_{\square ABGH}=S_{\square BCFE}$，

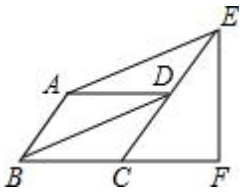
同理 $S_{\square AEFD}=S_{\square GCDH}$.

即：$S_{\square ABGH}=S_{\square BCFE}$，$S_{\square AHPE}=S_{\square GCFP}$，$S_{\square AEFD}=S_{\square GCDH}$

故答案为：3



【变式 6-3】（2019 春•宽城区校级期末）如图，$\square ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，E、F 分别在 CD 和 BC 的延长线上，$AE//BD$，$EF\perp BC$，$EF=3$，则 AB 的长是__$\sqrt{3}$__.



【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB//DC$，$AB=CD$，

$\because AE//BD$，

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形，

$\therefore AB=DE=CD$，

即 D 为 CE 中点，

$\because EF\perp BC$，

$\therefore \angle EFC=90°$，

$\because AB//CD$，

$\therefore \angle DCF=\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle CEF = 30°$，

$\because EF = 3$，

$\therefore CE = \dfrac{EF}{\cos 30°} = 2\sqrt{3}$，

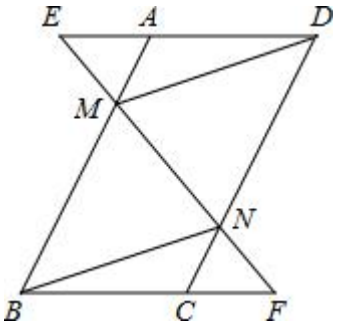
$\therefore AB = \sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$．

【变式 6-4】（2019 秋•垦利区期末）已知，如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，延长 DA 到点 E，延长 BC 到点 F，使得 $AE = CF$，连接 EF，分别交 AB，CD 于点 M，N，连接 DM，BN．

（1）求证：$\Delta AEM \cong \Delta CFN$；

（2）求证：四边形 $BMDN$ 是平行四边形．



【解析】证明：（1）四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle DAB = \angle BCD$，

$\therefore \angle EAM = \angle FCN$，

又$\because AD // BC$，

$\therefore \angle E = \angle F$．

$\because$ 在 ΔAEM 与 ΔCFN 中，

$$\begin{cases} \angle EAM = \angle FCN \\ AE = CF \\ \angle E = \angle F \end{cases}$$，

$\therefore \Delta AEM \cong \Delta CFN(ASA)$；

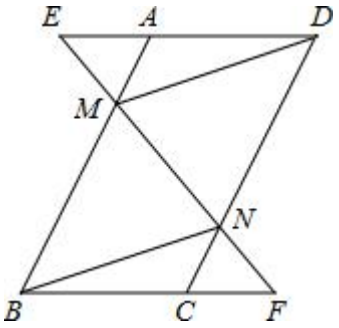
（2）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$，$AB // CD$

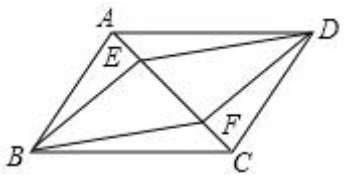
又由（1）得 $AM = CN$，

$\therefore BM = DN$，$BM // DN$，

∴四边形 $BMDN$ 是平行四边形.



【变式 6-5】（2020•和平区校级模拟）如图，在 $\square ABCD$ 中，E，F 分别是 AC 上两点，$BE \perp AC$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F．求证：四边形 $BEDF$ 为平行四边形.



【解析】证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB = CD$，$AB // CD$，

∴ $\angle BAE = \angle DCF$，

∵ $BE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，

∴ $\angle AEB = \angle DFC = 90°$，$\angle BEF = \angle DFE = 90°$，

∴ $BE // DF$，

在 ΔABE 与 ΔCDF 中，

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle DCF \\ \angle AEB = \angle DFC \\ AB = CD \end{cases},$$

∴ $ABE \cong \Delta CDF(AAS)$，

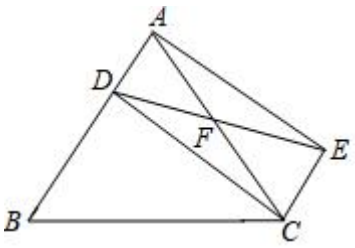
∴ $BE = DF$，

∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

【变式 6-6】（2020 春•开福区校级月考）如图，D 是 ΔABC 的边 AB 上一点，$CE // AB$，DE 交 AC 于点 F，若 $FA = FC$．

（1）求证：四边形 $ADCE$ 是平行四边形；

（2）若 $AE \perp EC$，$EF = EC = 5$，求四边形 $ADCE$ 的面积.



【解析】（1）证明：$\because CE//AB$，

$\therefore \angle BAC=\angle ECA$，

在 ΔDAF 和 ΔECF 中，

$$\begin{cases}\angle DAF=\angle ECF\\ FA=FC\\ \angle AFD=\angle CFE\end{cases}$$，

$\therefore \Delta DAF\cong\Delta ECF\quad(ASA)$，

$\therefore CE=AD$，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形；

（2）$\because AE\perp EC$，四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形，

在 $\mathrm{Rt}\Delta AEC$ 中，F 为 AC 的中点，

$\therefore AC=2EF=10$，

$\therefore AE^2=AC^2-EC^2=10^2-5^2=75$，

$\therefore AE=5\sqrt{3}$，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 的面积 $=AE\cdot EC=25\sqrt{3}$．