2019-2020 学年八年级数学下册同步闯关练（人教版）

第十九章《一次函数》

19.3 课题学习 选择方案



必刷提高题

知识点 1：根据实际问题列一次函数关系式

【例 1】（2018 秋•滨海县期末）等腰三角形周长为 $20cm$，底边长 ycm 与腰长 xcm 之间的函数关系是（　　）

A．$y=20-2x$　　B．$y=20-2x(5<x<10)$

C．$y=10-0.5x$　　D．$y=10-0.5x(10<x<20)$

【解析】$\because 2x+y=20$，

$\therefore y=20-2x$，则 $20-2x>0$，

解得：$x<10$，

由两边之和大于第三边，得 $x+x>20-2x$，

解得：$x>5$，

综上可得：$y=20-2x(5<x<10)$

故选：B．

【变式 1-1】（2019 春•华安县期中）汽车由 A 地驶往相距 $120km$ 的 B 地，它的平均速度是 $30km/h$，则汽车距 B 地路程 $s(km)$ 与行驶时间 $t(h)$ 的函数关系式及自变量 t 的取值范围是（　　）

A．$s=120-30t(0\leqslant t\leqslant 4)$　　B．$s=120-30t(t>0)$

C．$s=30t(0\leqslant t\leqslant 40)$　　D．$s=30t(t<4)$

【解析】平均速度是 $30km/h$，

$\therefore t$ 小时行驶 $30tkm$，

$\therefore s=120-30t$，

$\because$ 时间为非负数，汽车距 B 地路程为非负数，

$\therefore t\geqslant 0$，$120-30t\geqslant 0$，

解得 $0\leqslant t\leqslant 4$．

故选：A．

【变式 1-2】（2014 春•罗湖区期末）目前，全球淡水资源日益减少，提倡全社会节约用水已成为全球的共识．据测试：拧不紧的水龙头每分钟滴出 60 滴水，每滴水约 0.05 毫升．小康洗手后，没有把水龙头拧紧，水龙头以测试的速度滴水．设小康离开 x 分钟后，水龙头滴出 y 毫升的水，则 y 与 x 之间的关系式是（　　）

A．$y=0.05x$　　B．$y=3x$　　C．$y=60x$　　D．$y=0.05x+60$

【解析】由题意得：$y=60\times0.05x=3x$，

故选：B．

【变式 1-3】（2018 春•安溪县期末）已知等腰三角形的周长为 24，底边 y 关于腰长 x 的函数解析式是 $y=24-2x(6<x<12)$ __．

【解析】由题意得：$2x+y=24$，

即可得：$y=24-2x$，从而可得 $x<12$，

又∵两边之和大于第三边，

∴$x>6$，

即可得函数关系式为：$y=24-2x$，自变量的取值范围为：$6<x<12$．

故答案为：$y=24-2x(6<x<12)$．

【变式 1-4】（2015 秋•丹阳市校级月考）汽车油箱中原有油 100 升，汽车每行驶 50 千米耗油 10 升，油箱剩余油量 y（升）与汽车行驶路程 x（千米）之间的关系 $y=-\frac{1}{5}x+100$；自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 500$ __．

【解析】依题意有 $y=-\frac{1}{5}x+100$，

∵$x\geqslant0$，剩余油量不能小于 0，

∴$-\frac{1}{5}x+100\geqslant0$，

∴$0\leqslant x\leqslant 500$．

故答案为：$0\leqslant x\leqslant 500$．

【变式 1-5】（2014 秋•长宁区期末）某种货物原价是 x（元），王老板购货时买入价按原价扣去 25%，王老板希望对此货物定一个新价 y（元），以便按新价八折销售时仍然可以获得原价 25% 的利润，则新价 y 与原价 x 的函数关系式是__ $y=\frac{5}{4}x$ __．

【解析】由题意得：$y\times80\%=(1-25\%)x+25\%x$，

整理得：$y=\frac{5}{4}x$．

故答案为：$y=\frac{5}{4}x$．

【变式 1-6】（2019 春•城固县期末）一盘蚊香长 $105cm$，点燃时每小时缩短 $10cm$．

（1）请写出点燃后蚊香的长 $y(cm)$ 与蚊香燃烧时间 $t(h)$ 之间的函数关系式；

（2）该蚊香可点燃多长时间？

【解析】（1）∵蚊香的长等于蚊香的原长减去燃烧的长度，

$\therefore y=105-10t(0\leqslant t\leqslant 10.5)$；

（2）∵蚊香燃尽的时候蚊香的长度 $y=0$，

$\therefore 105-10t=0$，

解得：$t=10.5$，

∴该蚊香可点燃 10.5 小时．

【变式 1-7】（2015 秋•陕西校级期中）写出下列各题中 x 与 y 之间的关系式，并判断 y 是否为 x 的一次函数？是否为正比例函数？

（1）小红去商店买笔记本，每个笔记本 2.5 元，小红所付买本款 y（元）与买本的个数 x（个）之间的关系．

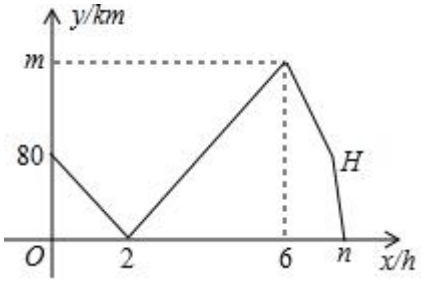
（2）圆的面积 y（厘米 ^{2}）与它的半径 x（厘米）之间的关系．

【解析】（1）由题意得：$y=2.5x$，y 是 x 的一次函数，且是正比例函数；

（2）由题意得：$y=\pi x^2$，y 与 x 不是一次函数，也不是正比例函数．

知识点 2：一次函数的应用

【例 2】（2020•金华模拟）甲、乙两车从 A 地出发，匀速驶向 B 地，甲车以 $80km/h$ 的速度行驶 $1h$ 后，乙车才沿相同路线行驶，乙车先到达 B 地并停留 $1h$ 后，再以原速沿原路返回，直至与甲车相遇．在此过程中，两车之间的距离 $y(km)$ 与乙车行驶时间 $x(h)$ 之间的函数关系如图所示，下列说法错误的是（　　）



A．乙车的速度是 $120km/h$　　B．$m=160$

C．点 H 的坐标是 $(7,80)$ D． $n=7.5$

【解析】由图象可知，乙出发时，甲乙相距 $80km$，2 小时后，乙车追上甲．则说明乙每小时比甲快 $40km$，则乙的速度为 $120km/h$． A 正确；

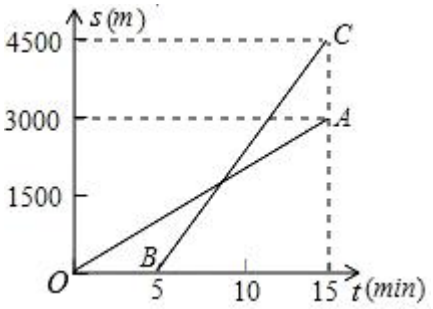
由图象第 $2-6$ 小时，乙由相遇点到达 B，用时 4 小时，每小时比甲快 $40km$，则此时甲乙距离 $4\times40=160km$，则 $m=160$， B 正确；

当乙在 B 休息 $1h$ 时，甲前进 $80km$，则 H 点坐标为 $(7,80)$， C 正确；

乙返回时，甲乙相距 $80km$，到两车相遇用时 $80\div(120+80)=0.4$ 小时，则 $n=6+1+0.4=7.4$， D 错误．

故选： D．

【变式 2-1】（2020•浙江自主招生）某周末，兄妹两人在图书馆买完书沿同一条路回家，哥哥慢跑回去，妹妹骑自行车载书，已知图书馆离家里的距离为 $3000m$．图中 OA， BC 分别表示兄妹两人离开图书馆的路程 $s(m)$ 与时间 $t(min)$ 的函数关系，根据图象得出的下列信息，其中错误的是（　　）



A．妹妹的速度是哥哥的速度的 $\frac{9}{4}$ 倍

B．哥哥出发 $9min$ 被妹妹追上

C．当 t 为 $7min$ 时，兄妹两人相距 $500m$

D．哥哥到家时妹妹距图书馆 $4500m$

【解析】妹妹比哥哥迟出发 5 分钟，

哥哥步行的速度为 $3000\div15=200(m/min)$；

妹妹的速度为： $4500\div(15-5)=450(m/min)$；

$450\div200=\frac{9}{4}$，

即妹妹的速度是哥哥的速度的 $\frac{9}{4}$ 倍，故选项 A 说法正确；

设 t 分钟后哥哥被妹妹追上，根据题意得 $200t=450(t-5)$，解得 $t=9$，

即哥哥出发 $9min$ 被妹妹追上，故选项 B 说法正确；

$200\times7-450\times(7-5)=500$（米），

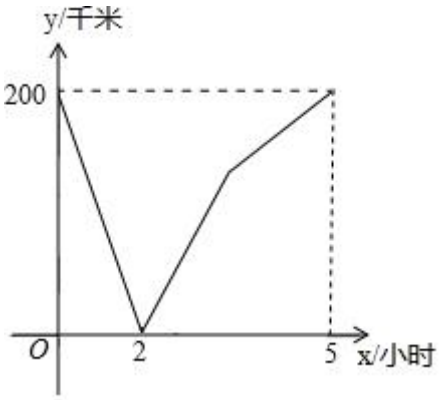
即当 t 为 $7min$ 时，兄妹两人相距 $500m$，故选项 C 说法正确；

$4500-3000=1500$（米），

即哥哥到家时妹妹距图书馆 $1500m$，故选项 D 说法错误．

故选：D．

【变式 2-2】（2020 春•九龙坡区校级月考）在同一条道路上，甲车从 A 地到 B 地，乙车从 B 地到 A 地，两车同时出发，乙车先到达目的地，图中的折线段表示甲，乙两车之间的距离 y（千米）与行驶时间 x（小时）的函数关系的图象，下列说法错误的是(　　)



A．甲乙两车出发 2 小时后相遇

B．甲车速度是 40 千米 / 小时

C．乙车到 A 地比甲车到 B 地早 $\frac{5}{3}$ 小时

D．当甲乙两车相距 100 千米时，x 的值一定为 1

【解析】出发 $2h$ 后，其距离为零，即两车相遇，故选项 A 说法正确；

甲的速度是 $\frac{200}{5}=40(km/h)$，故选项 B 说法正确；

乙的速度为：$\frac{200}{2}-40=60(km/h)$，乙行驶的时间为 $\frac{200}{60}=\frac{10}{3}(h)$，乙车到 A 地比甲车到 B 地早：$5-\frac{10}{3}=\frac{5}{3}(h)$，

故选项 C 说法正确；

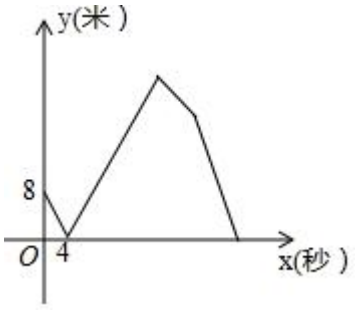
设出发 x 小时后，甲乙两车相距 100 千米，则 $(40+60)x=200-100$ 或 $(40+60)x=200+100$，解得 $x=1$ 或 $x=3$，

故选项 D 说法错误．

故选：D．

【变式 2-3】（2019 秋•渝中区校级期末）甲、乙两人在直线跑道上从 A 向 B 同向匀速跑步，A，B 间相距 800 米，已知甲先出发 $1s$，乙先到终点后原地休息了 3 秒，由于乙体力消耗较大，于是以原来速度的 $\frac{4}{5}$ 倍匀速返回，直到甲乙两人第二次相遇时两人同时停止运动．在跑步过程中，甲、乙两人之间的距离 y（米）

与乙出发的时间x（秒）之间的关系如图所示，则甲、乙两次相遇点之间的距离为__696__米.



【解析】由函数图象知，当$x=0s$时，$y=8m$，

∴甲的速度为：$8m/s$，

当$x=4s$时，$y=0m$，说明乙出发后4秒钟追上了甲，

则乙的速度为：$8\div4+8=10(m/s)$，

设两人第一次相遇后，再经过a秒第二次相遇，根据题意得

$8a+10\times\frac{4}{5}(a-3-\frac{800-4\times10}{10})=800-4\times10$，

解得，$a=87$，

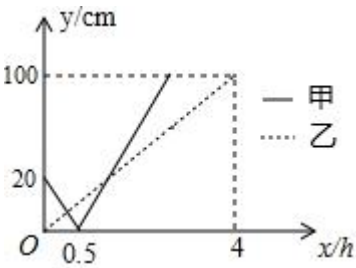
∴甲、乙两次相遇点之间的距离为：$8a=8\times76=696(m)$.

故答案为：696.

【变式2-4】（2019秋•萧山区期末）沿河岸有A，B，C三个港口，甲、乙两船同时分别从A，B港口出发，匀速驶向C港，最终到达C港．设甲、乙两船行驶$x(h)$后，与B港的距离分别为y_1，$y_2(km)$，y_1，y_2与x的函数关系如图所示．则：

①从A港到C港全程为__120__km；

②如果两船相距小于$10km$能够相互望见，那么在甲船到达C港前甲、乙两船可以相互望见时，x的取值范围是____.



【解析】①从A港到C港全程为$120km$，

故答案为：120；

②甲船的速度为$20\div0.5=40km/h$，

乙船的速度为$100\div4=25km/h$，

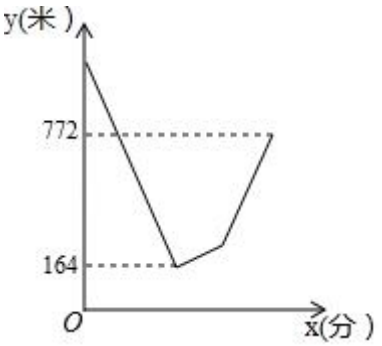
甲、乙两船第一次相距$10km$的时间为$(20-10)\div(40-25)=\frac{2}{3}$（小时），

甲、乙两船第二次相距$10km$的时间为$(20+10)\div(40-25)=2$（小时），

∴如果两船相距小于$10km$能够相互望见，那么在甲船到达C港前甲、乙两船可以相互望见时，x的取值范围是$\frac{2}{3}<t<2$.

故答案为：$\frac{2}{3}<t<2$.

【变式 2-5】（2019 秋•南岸区校级期末）某个周末小月和小华在南滨路跑步锻炼身体，两人同时从A点出发，沿直线跑到B点后马上掉头原路返回A点算一个来回，回到A点后又马上掉头去往B点，依此类推，每人要完成 2 个来回．已知两人全程均保持匀速，掉头时间忽略不计，如图所示是小华从出发到他率先完成第一个来回为止，两人到B点的距离之和y（米）与小华跑步时间x（分钟）之间的函数图象，则当小华跑完 2 个来回时，小月离B点的距离为__106__米．



【解析】设A点到B点的距离为S米，小华的速度为a米/分，小月的速度为b米/分，

$$\begin{cases}\frac{S}{a}=\frac{S-164}{b}\\ S-\frac{S}{a}\cdot b=164\\ S+(\frac{2S}{a}-\frac{S}{b})b=772\end{cases}$$，

解得，$\begin{cases}S=550\\ \frac{b}{a}=\frac{193}{275}\end{cases}$，

则当小华跑完 1 个来回时，小月离B点的距离为：$772-550=222$（米），

即小华跑完 1 个来回比小月多跑的路程是：$550-222=328$（米），

故小华跑完 2 个来回比小月多跑的路程是：$328\times2=656$（米），

则当小华跑完 2 个米回时，小月离 B 点的距离为：$656-550=106$（米）

故答案为：106.

【变式 2-6】（2020 春•金水区校级月考）由于技术更新，智能电视的功能越来越强大，价格也逐渐下降，某电器商行经营的 A 款 40 英寸智能电视去年销售总额为 5 万元，今年每台销售价比去年降低 400 元，若卖出的数量相同，销售总额将比去年减少 20%.

A，B 两款 40 英寸智能电视的进货和销售价格如表：

	A 款 40 英寸智能电视	B 款 40 英寸智能电视
进货价格（元）	1100	1400
销售价格（元）	今年的销售价格	2000

（1）今年 A 款 40 英寸智能电视每台售价多少元？（用列方程的方法解答）

（2）该电器商行计划新进一批 A 款 40 英寸智能电视和新款 B 款 40 英寸智能电视共 60 台，且 B 款 40 英寸智能电视的进货数量不超过 A 款 40 英寸智能电视数量的两倍，应如何进货才能使这批智能电视获利最多？

【解析】（1）设今年 A 款 40 英寸智能电视每台售价 x 元，则去年售价每台为 $(x+400)$ 元，由题意，得

$\frac{50000}{x+400}=\frac{50000(1-20\%)}{x}$，

解得：$x=1600$.

经检验，$x=1600$ 是原方程的根.

答：今年 A 款 40 英寸智能电视每台售价 1600 元；

（2）设今年新进 A 款 40 英寸智能电视 a 台，则 B 款 40 英寸智能电视 $(60-a)$ 台，获利 y 元，由题意，得

$y=(1600-1100)a+(2000-1400)(60-a)$，

$y=-100a+36000$.

$\because B$ 款 40 英寸智能电视的进货数量不超过 A 款 40 英寸智能电视数量的两倍，

$\therefore 60-a\leqslant 2a$，

$\therefore a\geqslant 20$.

$\because y=-100a+36000$.

$\therefore k=-100<0$，

$\therefore y$ 随 a 的增大而减小.

$\therefore a=20$ 时，$y_{最大}=34000$ 元.

$\therefore B$ 款 40 英寸智能电视的数量为：$60-20=40$（台）.

$\therefore$ 当新进 A 款 40 英寸智能电视 20 台，B 款 40 英寸智能电视 40 台时，这批智能电视获利最大.

【变式 2-7】（2020 春•德城区校级月考）某社区活动中心为中老年舞蹈队统一队服和道具，准备购买 10 套某种品牌的舞蹈鞋，每双舞蹈鞋配 $x(x..2)$ 个舞蹈扇，供舞蹈队队员使用．该社区附近 A，B 两家超市都有这种品牌的舞蹈鞋和舞蹈扇出售，且每双舞蹈鞋的标价均为 30 元，每个舞蹈扇的标价为 3 元，目前两家超市同时在做促销活动：

A 超市：所有商品均打九折（按标价的 90%）销售；

B 超市：买一双舞蹈鞋送 2 个舞蹈扇.

设在 A 超市购买舞蹈鞋和舞蹈扇的费用为 y_A（元），在 B 超市购买舞蹈鞋和舞蹈扇的费用为 y_B（元）．请解答下列问题：

（1）分别写出 y_A，y_B 与 x 之间的关系式；

（2）若该活动中心只在一家超市购买，你认为在哪家超市购买更划算？

【解析】（1）由题意，得 $y_A=(10\times30+3\times10x)\times0.9=27x+270(x..2)$；

$y_B=10\times30+3(10x-20)=30x+240(x..2)$；

（2）当 $y_A=y_B$ 时，$27x+270=30x+240$，得 $x=10$；

当 $y_A>y_B$ 时，$27x+270>30x+240$，得 $x<10$；

当 $y_A<y_B$ 时，$27x+270<30x+240$，得 $x>10$

$\therefore$ 当 $2,, x<10$ 时，到 B 超市购买划算，当 $x=10$ 时，两家超市一样划算，当 $x>10$ 时在 A 超市购买划算.

【变式 2-8】（2019 秋•宿松县期末）新春佳节来临，某公司组织 10 辆汽车装运苹果、芦柑、香梨三种水果共 60 吨去外地销售，要求 10 辆汽车全部装满，每辆汽车只能装运同一种水果，且装运每种水果的车辆都不少于 2 辆，根据下表提供的信息，解答以下问题：

	苹果	芦柑	香梨
每辆汽车载货量（吨）	7	6	5
每吨水果获利（万元）	0.15	0.2	0.1

（1）设装运苹果的车辆为 x 辆，装运芦柑的车辆为 y 辆，求 y 与 x 之间的函数关系式，并直接写出 x 的取值范围

（2）用 w 来表示销售获得的利润，那么怎样安排车辆能使此次销售获利最大？并求出 w 的最大值.

【解析】（1）设装运苹果的车辆为 x 辆，装运芦柑的车辆为 y 辆，则运香梨的车辆 $(10-x-y)$ 辆.

$7x+6y+5(10-x-y)=60$，

$\therefore y=-2x+10(2\leqslant x\leqslant 4)$；

（2）$w=7\times 0.15x+6\times 0.2(-2x+10)+5\times 0.1[10-x-(-2x+10)]$，

即 $w=-0.85x+12$，

$\because -0.85<0$，

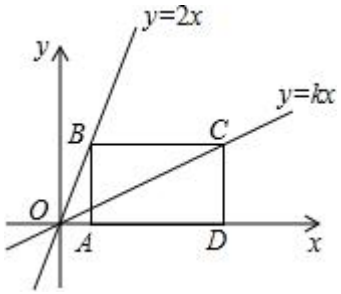
$\therefore w$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，w 有最大值 10.3 万元，

$\therefore$ 装运苹果的车辆 2 辆，装运芦柑的车辆 6 辆，运香梨的车辆 2 辆时，此次销售获利最大，最大利润为 10.3 万元.

知识点 3：一次函数综合题

【变式 3-1】（2016•碑林区校级三模）如图，点 B，C 分别在直线 $y=2x$ 和直线 $y=kx$ 上，A，D 是 x 轴上两点，若四边形 $ABCD$ 是长方形，且 $AB:AD=1:2$，则 k 的值是（　　）



A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{7}$　　D．$\frac{2}{9}$

【解析】设长方形的 AB 边的长为 a，则 BC 边的长度为 $2a$，B 点的纵坐标是 a，

把点 B 的纵坐标代入直线 $y=2x$ 的解析式得：$x=\frac{a}{2}$，

则点 B 的坐标为 $(\frac{a}{2},\ a)$，点 C 的坐标为 $(\frac{a}{2}+2a,\ a)$，

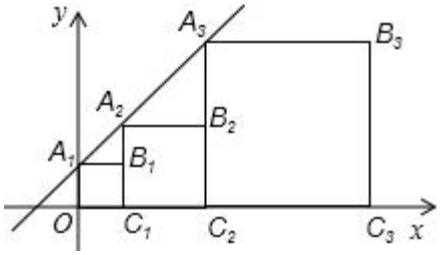
把点 C 的坐标代入 $y=kx$ 中得，$a=k(\frac{a}{2}+2a)$，

解得：$k=\frac{2}{5}$.

故选：B.

【变式 3-2】（2016•济宁二模）正方形 $A_1B_1C_1O$，$A_2B_2C_2C_1$，$A_3B_3C_3C_2$，…按如图所示的方式放置．点 A_1，A_2，A_3，…和点 C_1，C_2，C_3，…分别在直线 $y=kx+b(k>0)$ 和 x 轴上，已知点 $B_1(1,1)$，$B_2(3,2)$，

则 B_n 的坐标是(　　)



A．$(2^n-1,\ 2^{n-1})$　　B．$(2^{n-1}+1,\ 2^{n-1})$

C．$(2n-1,2n-1)$　　D．$(2n-1,n)$

【解析】∵ B_1 的坐标为 $(1,1)$，点 B_2 的坐标为 $(3,2)$，

∴ 正方形 $A_1B_1C_1O_1$ 边长为 1，正方形 $A_2B_2C_2C_1$ 边长为 2，

∴ A_1 的坐标是 $(0,1)$，A_2 的坐标是：$(1,2)$，

设直线 A_1A_2 的解析式为：$y=kx+b$，

∴ $\begin{cases}b=1\\k+b=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，

∴ 直线 A_1A_2 的解析式是：$y=x+1$．

∵ 点 B_2 的坐标为 $(3,2)$，

∴ 点 A_3 的坐标为 $(3,4)$，

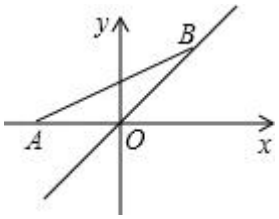
∴ 点 B_3 的坐标为 $(7,4)$，

∴ Bn 的横坐标是：2^n-1，纵坐标是：2^{n-1}．

∴ B_n 的坐标是 $(2^n-1,\ 2^{n-1})$．

故选：A．

【变式 3-3】（2016•威海二模）如图，点 A 的坐标为 $(-\sqrt{2},\ 0)$，点 B 在直线 $y=x$ 上运动，当线段 AB 最短时点 B 的坐标为(　　)



A．$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$　　B．$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$　　C．$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D．$(0,0)$

【解析】过 A 作 $AB \perp$ 直线 $y=x$ 于 B，则此时 AB 最短，过 B 作 $BC \perp OA$ 于 C，

$\because$ 直线 $y=x$，

$\therefore \angle AOB = 45° = \angle OAB$，

$\therefore AB = OB$，

$\because BC \perp OA$，

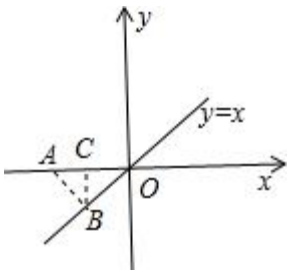
$\therefore C$ 为 OA 中点，

$\because \angle ABO = 90°$，

$\therefore BC = OC = AC = \frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$．

故选：A．

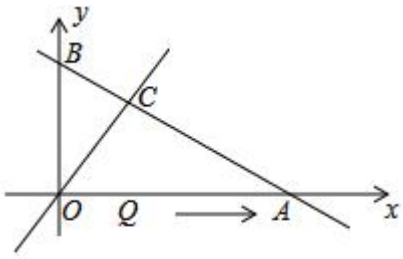


【变式 3-4】（2019 秋•辽阳期末）如图，直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 与坐标轴分别交于点 A，B，与直线 $y=x$ 交于点 C，线段 OA 上的点 Q 以每秒 1 个长度单位的速度从点 O 出发向点 A 作匀速运动，运动时间为 t 秒，连结 CQ．

（1）求出点 C 的坐标__$(2,2)$__；

（2）若 ΔOQC 是等腰直角三角形，则 t 的值为____；

（3）若 CQ 平分 ΔOAC 的面积，求直线 CQ 对应的函数关系式____．



【解析】（1）∵由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=x \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$，

$\therefore C(2,2)$；

（2）如图 1，当 $\angle CQO=90°$，$CQ=OQ$，

$\because C(2,2)$，

$\therefore OQ=CQ=2$，

$\therefore t=2$，

②如图 2，当 $\angle OCQ=90°$，$OC=CQ$，

过 C 作 $CM\perp OA$ 于 M，

$\because C(2,2)$，

$\therefore CM=OM=2$，

$\therefore QM=OM=2$，

$\therefore t=2+2=4$，

即 t 的值为 2 或 4，

故答案为：2 或 4；

（3）令 $-\frac{1}{2}x+3=0$，得 $x=6$，由题意：$Q(3,0)$，

设直线 CQ 的解析式是 $y=kx+b$，

把 $C(2,2)$，$Q(3,0)$ 代入得：$\begin{cases} 3k+b=0 \\ 2k+b=2 \end{cases}$，

解得：$k=-2$，$b=6$，

$\therefore$ 直线 CQ 对应的函数关系式为：$y=-2x+6$．

故答案为：（1）$(2,2)$；（3）$y=-2x+6$．

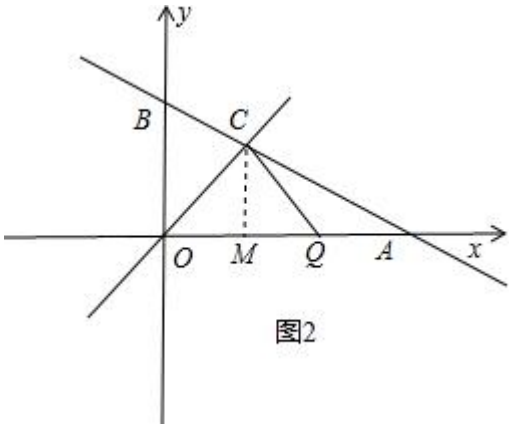


图2

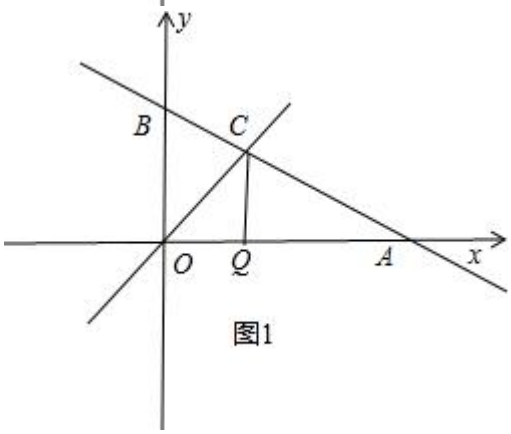


图1

【变式 3-5】（2019 秋•海淀区校级月考）如图，在 RtΔABC 中，$\angle C=90°$，记 $x=AC$，$y=BC-AC$，在平面直角坐标系 xOy 中，定义 (x,y) 为这个直角三角形的坐标，RtΔABC 为点 (x,y) 对应的直角三角形．有下列结论：

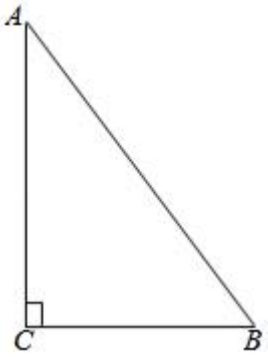
①在 x 轴正半轴上的任意点 (x,y) 对应的直角三角形均满足 $AB=\sqrt{2}BC$；

②在函数 $y=\dfrac{2019}{x}(x>0)$ 的图象上存在两点边 P，Q，使得它们对应的直角三角形相似；

③对于函 $y=(x-2020)^2-1(x>0)$ 的图象上的任意一点 P，都存在该函数图象上的另一点 Q，使得这两个点对应的直角三角形相似；

④在函数 $y=-2x+2020(x>0)$ 的图象上存在无数对点 P，Q（P 与 Q 不重合），使得它们对应的直角三角形全等．

所有正确结论的序号是__①③④__．



【解析】①∵在 x 轴正半轴上的任意点 (x,y)，

$\therefore y=0$，

$\therefore AC=BC$，

$\therefore AB=\sqrt{2}BC$；

②设 $P(\{x_1$，$\frac{2019}{x_1})$，$Q(x_2$，$\frac{2019}{x_2})$，

则对应的直角三角形的直角边分别为 x_1，$x_1+\frac{2019}{x_1}$；x_2，$x_2+\frac{2019}{x_2}$，

若两个三角形相似，则有 $\frac{x_1}{x_1+\frac{2019}{x_1}}=\frac{x_2}{x_2+\frac{2019}{x_2}}$，

$\therefore x_2^2=x_1^2$，

$\because x>0$，

$\therefore x_1=x_2$，

$\therefore$ 不存在两点边 P，Q，使得它们对应的直角三角形相似；

③设 $P(x_1$，$(x_1-2020)^2-1)$，$Q(x_2$，$(x_2-2020)^2-1)$，

则对应的直角三角形的直角边分别为 $x_1+(x_1-2020)^2-1$，x_1；x_2，$x_2+(x_2-2020)^2-1$，

若两个三角形相似，则有 $\frac{x_1}{(x_1-2020)^2-1}=\frac{x_2}{(x_2-2020)^2-1}$，

$\therefore (x_1-x_2)(x_1x_2+1-2020^2)=0$，

$\because x>0$，

$\therefore x_1x_2+1=2020^2$，

$\therefore$ 图象上的任意一点 P，都存在该函数图象上的另一点 Q，使得这两个点对应的直角三角形相似；

④设 $P(x_1$，$-2x_1+2020)$，$Q(x_2$，$-2x_2+2020)$，

则对应的直角三角形的直角边分别为 x_1，$-x_1+2020$；x_2，$-x_2+2020$，

若两个三角形全等，则有 $x_1=-x_2+2020$，$x_2=-x_1+2020$，

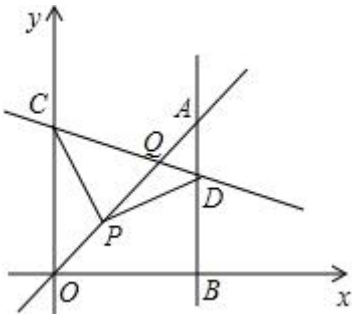
$\therefore x_2+x_1=2020$，

$\because x>0$，

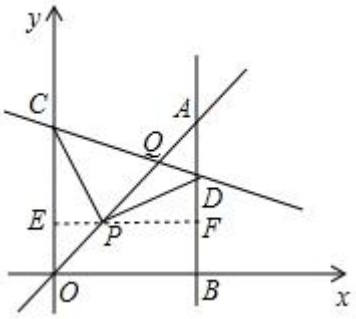
$\therefore$ 图象上存在无数对点 P，Q，使得它们对应的直角三角形全等；

故答案为①③④.

【变式 3-6】（2019•自贡模拟）如图，平面直角坐标系中，已知点 $P(2,2)$，C 为 y 轴正半轴上一点，连接 PC，线段 PC 绕点 P 顺时针旋转 $90°$ 至线段 PD，过点 D 作直线 $AB\perp x$ 轴，垂足为 B，直线 AB 与直线 OP 交于点 A，且 $BD=4AD$，直线 CD 与直线 OP 交于点 Q，则点 Q 的坐标为__$(\frac{25}{6},\frac{25}{6})$__.



【解析】过点 P 作 $PE\perp OC$ 于 E，EP 的延长线交 AB 于 F.



$\because AB\perp OB$，

$\therefore \angle OBF=\angle EOB=\angle FEO=90°$，

$\therefore$ 四边形 $EOBF$ 是矩形，

$\because P(2,2)$，

$\therefore OE=PE=BF=2$，

$\because \angle CPD=90°$，

$\therefore \angle CPE+\angle DPF=90°$，$\angle ECP+\angle CPE=90°$，

$\therefore \angle ECP = \angle DPF$，

在 ΔCPE 和 ΔPDF 中，

$$\begin{cases} \angle PEC = \angle PFD \\ \angle PCE = \angle DPF \\ PC = PD \end{cases},$$

$\therefore \Delta CPE \cong \Delta PDF\,(AAS)$，

$\therefore DF = PE = 2$，

$\therefore BD = BF + DF = 4$，

$\because BD = 4AD$，

$\therefore AD = 1$，$AB = OB = 5$，

$\therefore CE = PF = 3$，

$\therefore D(5,4)$，$C(0,5)$，

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$ 则有 $\begin{cases} b = 5 \\ 5k + b = 4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k = -\dfrac{1}{5} \\ b = 5 \end{cases}$，

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y = -\dfrac{1}{5}x + 5$，

由 $\begin{cases} y = x \\ y = -\dfrac{1}{5}x + 5 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \dfrac{25}{6} \\ y = \dfrac{25}{6} \end{cases}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(\dfrac{25}{6}, \dfrac{25}{6})$.

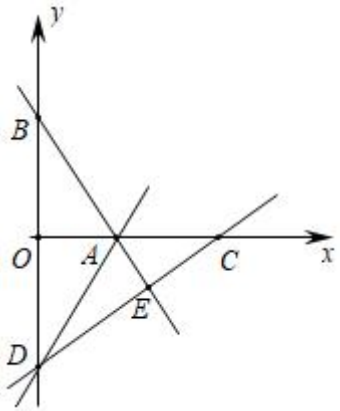
故答案为 $(\dfrac{25}{6}, \dfrac{25}{6})$.

【变式 3-7】如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于点 $A(3,0)$、$B(0,4)$，点 D 在 y 轴的负半轴上，若将 ΔDAB 沿直线 AD 折叠，点 B 恰好落在 x 轴正半轴上的点 C 处.

（1）求直线 AB 的表达式；

（2）求点 C 和点 D 的坐标；

（3）y 轴的正半轴上是否存在一点 P，使得 $S_{\Delta PAB} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta OAD}$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



【解析】（1）将点 A 、 B 的坐标代入一次函数表达式： $y=kx+b$ 得：

$\begin{cases}0=3k+b\\b=4\end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases}k=-\dfrac{4}{3}\\b=4\end{cases}$ ，

故直线 AB 的表达式为： $y=-\dfrac{4}{3}x+4$ ；

（2）由题意得： $AC=AB=5$ ，

$\therefore OC=OA+AC=3+5=8$ ，

故点 $C(8,0)$ ，

设点 D 的坐标为： $(0,m)$ ，

$\because CD=BD$ ，

$\therefore \sqrt{m^2+8^2}=4-m$ ，

解得： $m=-6$ ，

故点 $D(0,-6)$ ；

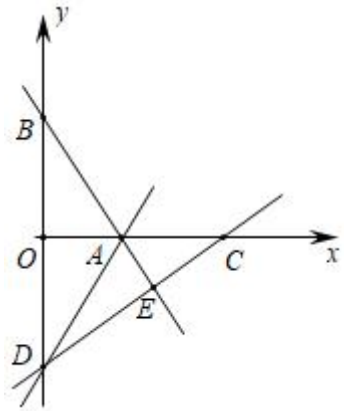
（3）设点 $P(0,n)$ ，

$\because S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta OAD}$ ，

$\therefore \dfrac{1}{2}|4-n|\times 3=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 3\times 6$ ，

解得： $n=2$ 或 6，

故 $P(0,2)$ ， $(0,6)$.



【变式 3-8】（2019 秋•胶州市期末）如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 B 和点 C，与直线 OA 相交于点 $A(3,4)$.

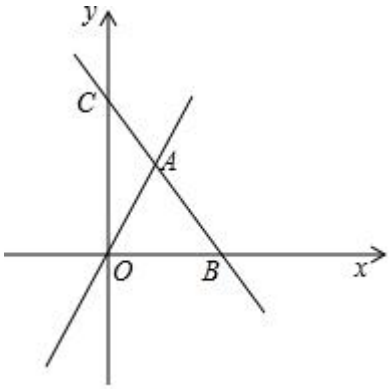


图1

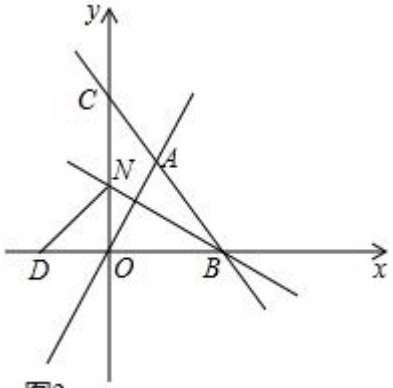


图2

（1）求点 B 和点 C 的坐标；

（2）求 ΔOAC 的面积；

（3）在线段 OA 或射线 AC 上是否存在点 M，使 ΔOMC 的面积是 ΔOAC 的面积的 $\frac{1}{4}$？若存在，求出点 M 的坐标，若不存在，说明理由；

（4）若点 N 是线段 OC 上一点，若将 ΔBCN 沿直线 BN 折叠，点 C 恰好落在 x 轴负半轴上的点 D 处，求 BN 所在直线的函数关系式.

【解析】（1）设 $y=0$，则 $x=6$；设点 $x=0$，则 $y=6$，

故点 B 的坐标为 $(6,0)$，点 C 的坐标为 $(0,8)$；

（2）$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\times CO\times x_A=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$；

（3）存在点 M 使 $S_{\Delta OMC}=\frac{1}{4}S_{\Delta OAC}$，

设 M 的坐标为 (x,y)；OA 的解析式是 $y=mx$，则 $3m=4$，

解得：$m=\frac{4}{3}$，则直线 OA 的解析式是：$y=\frac{4}{3}x$，

$\because$ 当 $S_{\Delta OMC}=\frac{1}{4}S_{\Delta OAC}$ 时，即 $\frac{1}{2}\times OC\times|x|=\frac{1}{4}\times 12$，

又 $\because OC=8$，

$\therefore x=\pm\frac{3}{4}$，

当 M 在线段 OA 上时，$x>0$，

所以 $x=\frac{3}{4}$ 时，$y=1$，则 M 的坐标是 $(\frac{3}{4},1)$；

当 M 在射线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 上时，$x=\frac{3}{4}$ 则 $y=7$，则 M 的坐标是 $(\frac{3}{4},7)$；

$x=-\frac{3}{4}$ 则 $y=9$，则 M 的坐标是 $(-\frac{3}{4},9)$，

综上所述：M 的坐标是：$(\frac{3}{4},1)$ 或 $(\frac{3}{4},7)$ 或 $(-\frac{3}{4},9)$；

（4）在 $\mathrm{Rt}\Delta OBC$ 中，$\angle COB=90°$，$OB=6$，$OC=8$，

$\therefore AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\because \Delta BCN$ 沿直线 BN 折叠后，所得三角形为 ΔBDN，

$\therefore CN=DN$，$BD=BC=10$，$\therefore OD=4$

在 $\mathrm{Rt}\Delta ODN$ 中，设 $ON=x$，则 $DN=8-x$，

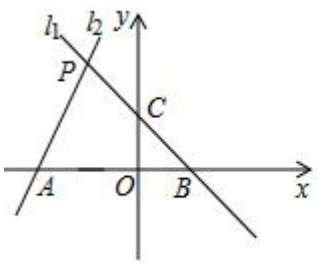
$\therefore 4^2+x^2=(8-x)^2$

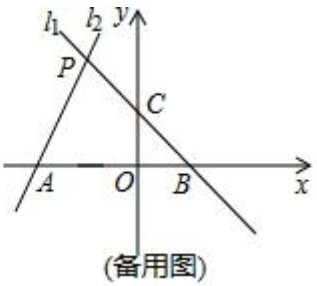
$\therefore x=3$，故点 $N(0,3)$，

设直线 AM 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$ 代入 $A(6,0)$，$N(0,3)$ 得：$\begin{cases}6k+b=0\\ b=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\ b=3\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AM 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$.

【变式 3-9】（2019 秋•长兴县期末）如图，已知过点 $B(1,0)$ 的直线 l_1 与直线 $l_2:y=2x+4$ 相交于点 $P(-1,a)$，l_1 与 y 轴交于点 C，l_2 与 x 轴交于点 A.





(备用图)

（1）求 a 的值及直线 l_1 的解析式.

（2）求四边形 $PAOC$ 的面积.

（3）在 x 轴上方有一动直线平行于 x 轴，分别与 l_1，l_2 交于点 M，N，且点 M 在点 N 的右侧，x 轴上是否存在点 Q，使 ΔMNQ 为等腰直角三角形？若存在，请直接写出满足条件的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】（1）$\because y=2x+4$ 过点 $P(-1,a)$，

$\therefore a=2$，

$\because$ 直线 l_1 过点 $B(1,0)$ 和点 $P(-1,2)$，

设线段 BP 所表示的函数表达式 $y=kx+b$ 并解得：

函数的表达式 $y=-x+1$；

（2）过点 P 作 $PE\perp OA$ 于点 E，作 $PF\perp y$ 轴交 y 轴于点 F，

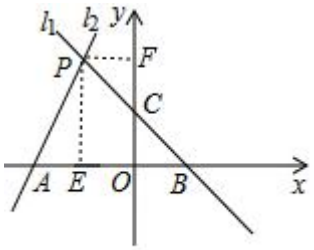


图1

则 $S=S_{\Delta PAB}-S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\times3\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$；

（3）如图，$M(1-a,a)$，点 $N(\frac{a-4}{2},a)$，

$\because MN=NQ$，则 $1-a-\frac{a-4}{2}=a$，

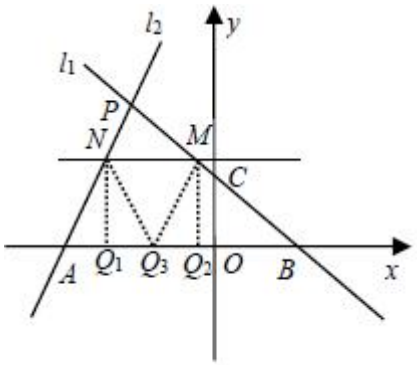


图2

①当 $MN=NQ$ 时，$Q_1(-\frac{1}{5},0)$

②当 $MN=MQ$ 时，$Q_2(-\frac{7}{5},\ 0)$，

③当 $MQ=NQ$ 时，$1-a-\frac{a-4}{2}=2a$，

$\therefore a=\frac{6}{7}$，$\therefore Q_3(-\frac{5}{7},\ 0)$．

综上，点 Q 的坐标为：$(-\frac{1}{5},\ 0)$ 或 $(-\frac{7}{5},\ 0)$ 或 $(-\frac{5}{7},\ 0)$．