

(人教版) 高中数学必修二教材课后习题答案及解析

◆ 教材习题解答

练习(P₇)

- (1)一个圆锥,它可看做是一个直角三角形绕其一条直角边旋转而成;
(2)四棱柱,它的各个面都是矩形,且侧棱垂直于底面;
(3)一个圆柱与一个圆锥的组合体,上部分为圆锥,下部分为圆柱;
(4)一个棱柱里面挖去了一个圆柱.

- (1)正五棱柱;(2)圆锥.

3.略.

习题 1.1(P₈)

A 组

- (1)C (2)C (3)D (4)C

- (1)不是台体,因为几何体的“侧棱”不相交于一点,不是由平行于“底面”的平面截棱锥截得的;

(2)(3)也不是台体,因为不是由平行于棱锥和圆锥的底面的平面截得的几何体.

- (1)由圆锥和圆台组合而成的简单组合体;

(2)由四棱柱和四棱锥组合而成的简单组合体.

- 两个同心的球面围成的几何体(或在一个球体内部挖去一个同心球体得到的简单组合体).

5.略.

B 组

- 剩下的几何体为五棱柱 $ABFEA' - DCGHD'$, 截去的几何体为三棱柱 $EFB' - HGC'$.

2.略.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₅)

- (1)略;(2)略.

- (1)四棱柱(图略);

(2)圆锥与半球组成的简单组合体(图略);

(3)四棱柱与球组成的简单组合体(图略);

(4)两个圆台组合而成的简单组合体(图略).

- (1)五棱锥(三视图略).

(2)四个圆柱组成的简单组合体(三视图略).

- 三棱柱.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₉)

1. (1) 如图 1 - 2 - 3 - 13 所示.

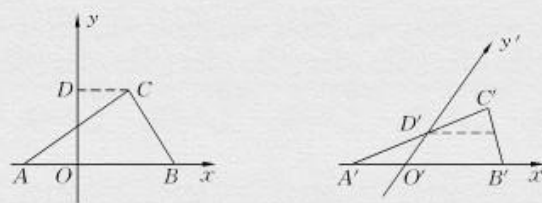


图 1 - 2 - 3 - 13

(2) 如图 1 - 2 - 3 - 14 所示.

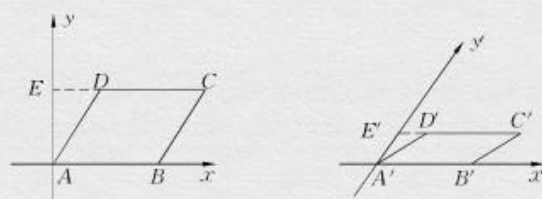


图 1 - 2 - 3 - 14

(3) 如图 1 - 2 - 3 - 15 所示.

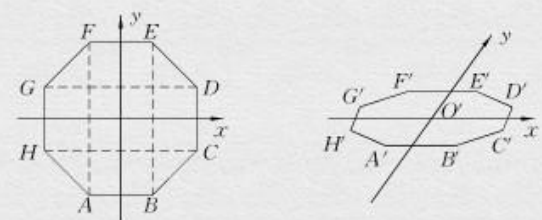


图 1 - 2 - 3 - 15

点评 考查平面图形的直观图画法.

2. (1)✓ (2)× (3)× (4)✓

点评 考查直观图的画法理论.

3. A.

4. 如图 1 - 2 - 3 - 16 所示.

点评 考查立体图形的直观图画法.

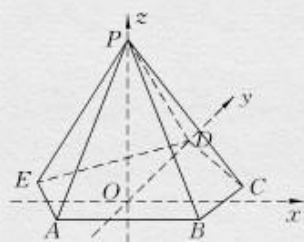


图 1 - 2 - 3 - 16

5. 如图 1 - 2 - 3 - 17 所示.

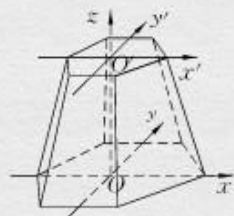


图 1 - 2 - 3 - 17

点评 本例考查由三视图画直观图的能力.

习题 1.2 (P₂₀)

A 组

1. (1) 如图 1 - 2 - 3 - 18 所示.

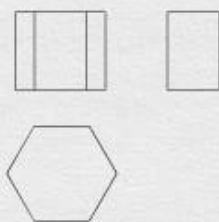


图 1 - 2 - 3 - 18

(2)如图 1 - 2 - 3 - 19 所示.



图 1 - 2 - 3 - 19

(3)如图 1 - 2 - 3 - 20 所示.

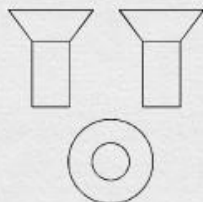


图 1 - 2 - 3 - 20

点评 本题考查立体图形的三视图的画法.

2. (1)三棱柱;(2)圆台;(3)四棱柱;
(4)四棱柱与圆柱组合而成的简单组合体.

3. 略.

4. 略.

5. 略.

B 组

1. 略. 2. 略.

3. 此题答案不唯一,一种答案是由 15 个小正方体组合而成的简单组合体,如图 1 - 2 - 3 - 21.

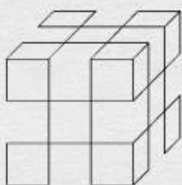


图 1 - 2 - 3 - 21

◆ 教材习题解答

练习(P₂₇)

1. 解:设圆锥的底面半径为 r ,母线长为 l ,则由题意得 $a = \pi r^2 + \pi r l$. ①

又圆锥的侧面展开图为半圆,所以有 $2\pi r = \pi l$,即 $l = 2r$. ②

将②代入①式得 $a = 3\pi r^2$,

$$\therefore r^3 = \frac{a}{3\pi}, \text{ 即 } r = \frac{\sqrt[3]{3\pi a}}{3\pi},$$

故圆锥的底面圆直径为 $\frac{2}{3\pi} \sqrt[3]{3\pi a}$.

点评 考查侧面展开图与圆锥的不变关系及公式的应用.

2. 解: 机器零件的表面积可看做是圆柱的侧面积加上棱柱的全面积.

$\because$ 圆柱的侧面积 $S_1 = 2\pi r \cdot l = 2\pi \times 3 \times 25 = 150\pi \approx 471(\text{mm}^2)$,

棱柱的全面积 $S_2 = 12 \times 5 \times 6 + 2 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1\,108.25(\text{mm}^2)$,

$\therefore$ 一个机器的全面积 $S = S_1 + S_2 = 1\,579.25(\text{mm}^2)$.

则 10 000 个零件的全面积为 $15\,792\,500 \text{ mm}^2 = 15.792\,5 \text{ m}^2$.

故需锌的重量为 $15.792\,5 \times 0.11 \approx 1.74 \text{ kg}$.

点评 本题考查复杂几何的表面积求法和解实际问题及运算能力.

◆ 教材习题解答

练习(P₂₈)

1. 增大到原来的 8 倍.

2. 解: 正方体的对角线长为 $\sqrt{3}a$, 球的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$\therefore V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3 \text{ cm}^3.$$

3. 解: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 100$, $\therefore R = \sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}}$.

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{300}{4\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{300^2 \times 4\pi} = \sqrt[3]{360\,000\pi} \approx 104(\text{cm}^2).$$

点评 以上三题考查公式的灵活运用能力.

习题 1.3(P₂₈)

A 组

1. 解: 侧面都是等腰梯形, 且上底为 8 cm, 下底为 18 cm, 侧棱长 13 cm, 可得斜高

$$h' = \sqrt{13^2 - \left(\frac{18-8}{2}\right)^2} = 12, S_{\text{侧}} = 5 \times \frac{18+8}{2} \times 12 = 780(\text{cm}^2).$$

答: 侧面积为 780 cm².

点评 本题考查棱台中的直角梯形的应用和棱台的侧面面积公式.

2. 解: 圆台的侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi(r+R) \cdot l$, 圆台底面积 $S = S_{\text{上}} + S_{\text{下}} = \pi(r^2 + R^2)$,

$$\text{由已知得 } \pi(r+R)l = (r^2 + R^2)\pi, \therefore l = \frac{r^2 + R^2}{r+R}.$$

点评 本题考查对圆台侧面积、底面积、表面积概念的理解, 要将三者区别开来, 另外考查了解方程的能力.

3. 解: 设正方体的棱长为 a , 则 $V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^3 = \frac{a^3}{6}$,

$$\text{剩余几何体的体积 } V = V_{\text{正方体}} - V_{\text{三棱锥}} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3,$$

所以棱锥的体积与剩下的几何体的体积之比为 1 : 5.

点评 本题考查三棱锥体积的求法和“割补法”求几何体的体积的方法.

4. 当三棱柱形容器的侧面 AA_1B_1B 水平放置时, 液面部分是四棱柱形, 其高为原三棱柱形容器的高, 侧棱 $AA_1=8$, 设当底面 ABC 水平放置时, 液面高为 h , 由已知条件知, 四棱柱底面与原三棱柱底面面积之比为 3 : 4, 由于两种状态下液体体积相等, 所以 $3 \times 8 = 4 \times h$, $h=6$, 因此 ABC 水平放置时, 液面高为 6.

点评 本题考查体积变换能力, 要注意在几何体转换过程中, 水的体积始终不变.

5. 解: 由题意, 需贴瓷砖的部分为四棱柱与四棱台的侧面积之和.

$$S_{\text{四棱柱侧}} = 4 \times 40 \times 80 = 12\,800 (\text{cm}^2),$$

$$\text{四棱台的斜高 } h' = \sqrt{10^2 - \left(\frac{50-40}{2}\right)^2} = 5\sqrt{3} (\text{cm}),$$

$$S_{\text{四棱台侧}} = 4 \times \frac{40+50}{2} \times 5\sqrt{3} = 1\,559 (\text{cm}^2),$$

$$\text{故需要瓷砖的面积数为 } 12\,800 + 1\,559 = 14\,359 (\text{cm}^2).$$

点评 本题考查简单组合体的侧面积求法和解决实际问题的能力.

6. 提示: 先求出等腰梯形的面积, 再乘以北京到上海的铁路线长即可, 请同学们自己完成.

B 组

1. 解: 由三视图画出它的直观图如图 1-3-2-16 所示,

$$\text{且 } A_1B_1 = C_1D_1 = A'B' = C'D' = 8 \text{ cm},$$

$$A_1D_1 = C_1B_1 = A'D' = C'B' = 4 \text{ cm},$$

$$\text{球的直径为 } 4 \text{ cm}, AB = CD = 20 \text{ cm},$$

$$EF = GH = 12 \text{ cm}, AD = BC = 16 \text{ cm}, EH = FG = 8 \text{ cm},$$

$$A_1A' = B_1B' = C_1C' = D_1D' = 20 \text{ cm}.$$

先求出四棱台 $ABEF$ 面上的斜高

$$h_1' = \sqrt{\left(\frac{16-8}{2}\right)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}.$$

$$\text{再求出四棱台 } BFGC \text{ 面上的斜高 } h_2' = \sqrt{\left(\frac{20-12}{2}\right)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}.$$

$$\text{则 } S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi (\text{cm}^2), V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

$$S_{\text{四棱柱}} = S_{\text{四棱柱侧}} = (8+4) \times 2 \times 20 = 480 \text{ cm}^2, V_{\text{四棱柱}} = 4 \times 8 \times 20 = 640 \text{ cm}^3.$$

$$S_{\text{四棱台}} = S_{\text{四棱台侧}} + S_{\text{上底}} + S_{\text{下底}} = 2 \left(\frac{12+20}{2} \right) \times 2\sqrt{5} + 2 \left(\frac{8+16}{2} \right) \times 2\sqrt{5} + 20 \times 16 +$$

$$12 \times 8 = (112\sqrt{5} + 416) \text{ cm}^2, V_{\text{四棱台}} = \frac{1}{3} (12 \times 8 + 20 \times 16 + \sqrt{12 \times 8 \times 20 \times 16}) \times 2$$

$$= \frac{2}{3} (32\sqrt{30} + 416) \text{ cm}^3.$$

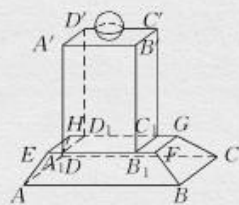


图 1-3-2-16

∴ 奖杯的表面积 $S = S_{\text{球}} + S_{\text{圆柱}} + S_{\text{圆台}} =$

$16\pi + 480 + 112\sqrt{5} + 416 \approx 1\,193 \text{ cm}^2$, 奖杯的体积 $V =$

$V_{\text{球}} + V_{\text{圆柱}} + V_{\text{圆台}} = \frac{32}{3}\pi + 640 + \frac{2}{3}(32\sqrt{30} + 416) \approx 1\,067 \text{ cm}^3$.

答: 奖杯的表面积约为 $1\,193 \text{ cm}^2$, 体积约为 $1\,067 \text{ cm}^3$.

点评 本题考查观察图形想象力、运算能力及解综合题的能力.

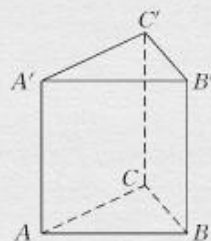


图 1-3-2-17

2. 证明: 如图 1-3-2-17 所示, 因为三棱柱的侧面都是矩形, 则侧面积为底乘以高, 而高相等, 所以要证任意两个侧面的面积和大于第三个侧面的面积, 只要证明三棱柱上底面上任意两边的和大于第三边即可, 而这是显然的.

点评 本题考查将空间问题转化成平面问题的能力.

3. (1) 以斜边为轴的直观图如图 1-3-2-18(1)所示, 三视图如图 1-3-2-18(2)所示.

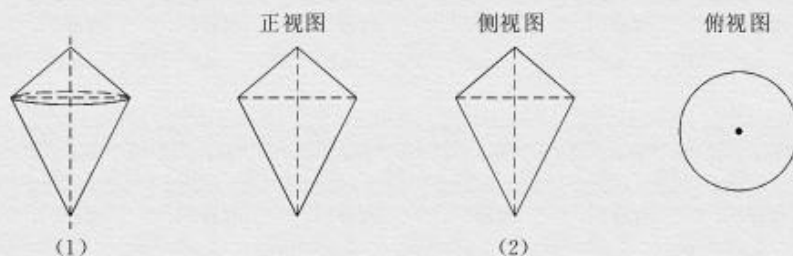


图 1-3-2-18

- (2) 以直角边为轴旋转而成的几何体的直观图如图 1-3-2-19(1)所示, 三视图如图 1-3-2-19(2)所示.

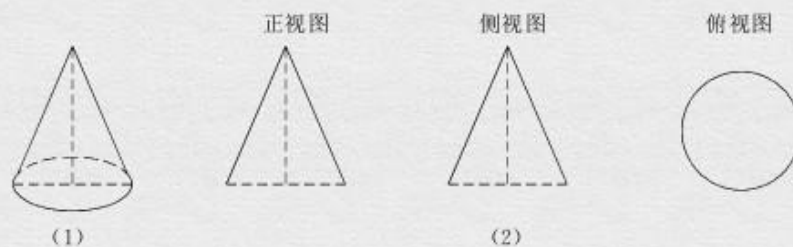


图 1-3-2-19

点评 本题考查画直观图和三视图的能力.

◆ 教材习题解答

复习参考题(P₃₅)

A 组

1. (1) 圆柱体;
- (2) 三棱柱或是三棱台;
- (3) n^2, n^2, n^3 ;
- (4) n^2, n^2, n^3 ;
- (5) $n, \sqrt{n}$.

2. 如图 1 - 31.

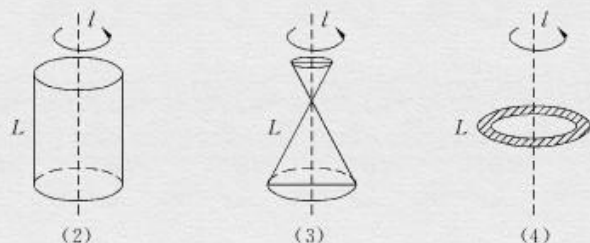


图 1 - 31

3. 如 1 - 32 所示.

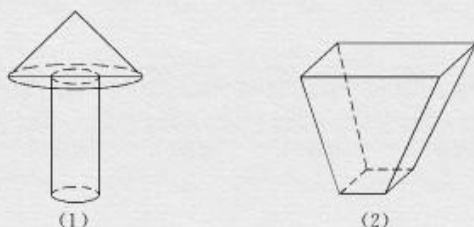


图 1 - 32

点评 考查由三视图还原成实物图和将实物图画成直观图的能力.

4. 略.

5. **解** 由题意得三棱柱的底面三角形外接圆是圆柱的底面, 即三角形外接的直径是圆柱的底面直径或母线.

设圆柱的底面半径为 R , 则 $V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$, $\therefore R^3 = \frac{V}{2\pi}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 设边长为 a , 则 $\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{2}{3} = R$, 即 $a = \sqrt{3}R$.

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2, \therefore V_{\text{棱柱}} = S_{\triangle ABC} \cdot 2R = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 \cdot 2R = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{V}{2\pi} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}V. \end{aligned}$$

6. **解** 先求出一个接头需要的铁皮 S_1 , 然后再计算总量 S .

$$\because S_1 = \pi(r_1 + r_2)l = \pi(25 + 10) \times 35 = 1\,225\pi (\text{cm}^2),$$

$$\therefore S = 10\,000 \times S_1 = 12\,250\,000\pi = 12\,250\,000 \times 3.1$$

$$=37\,975\,000(\text{cm}^2)=3\,797.5(\text{m}^2)\approx 3\,798(\text{m}^2).$$

答 制作 1 万个这样的接头需要 $3\,798\text{ m}^2$ 的铁皮.

点评 本题考查圆台侧面积的求法及单位换算.

7. 表面积约为 387, 体积约为 176, 三视图略.

8. 略.

9. (1)64; (2)8; (3)24; (4)24; (5)8, 48 cm^2 , 8 cm^3 .

10. 它们的表面积分别为 $36\pi\text{ cm}^2$, $24\pi\text{ cm}^2$, $\frac{84}{5}\pi\text{ cm}^2$;

体积分别为 $16\pi\text{ cm}^3$, $12\pi\text{ cm}^3$, $\frac{144}{15}\pi\text{ cm}^3$;

三视图略.

B 组(P₃₆)

1. (1)三视图如图 1-33 所示, 直观图如图 1-34 所示.

点评 本题考查空间想象能力和画图能力.

$$(2)S_{\text{柱}}=8\times\frac{1}{2}\times 30\times 30\times\sin 60^\circ=1\,800\sqrt{3}(\text{cm}^2),$$

$$V=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABCD}\cdot h=2\times\frac{1}{3}\times 30\times 30\times\sqrt{30^2-(15\sqrt{2})^2}=9\,000\sqrt{2}(\text{cm}^3).$$

点评 本小题考查多面体的表面积和体积求法.

(3)略.



图 1-33

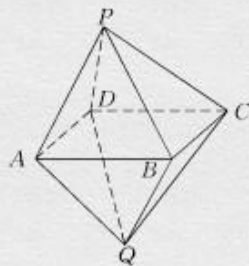


图 1-34

$$2. \text{解 } V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times 3.14\times 25^3=65\,417(\text{cm}^3),$$

$$\text{水中球的体积为 } V_1=V_{\text{球}}\times\frac{2}{3}=43\,611(\text{cm}^3),$$

$$V_{\text{长方体}}=80\times 60\times 55=264\,000(\text{cm}^3),$$

$$\therefore V_{\text{长方体}}-200\,000=264\,000-200\,000=64\,000>43\,611.$$

故水槽中水不会溢出.

点评 本题考查体积公式的求法和解实际问题的能力.

3. 解 它是由图 1 - 35 所示的图形 L 绕线 l 旋转而成的, 其中 L 与 l 不相交.

点评 本题考查观察图形的能力和想象能力.

4. 如图 1 - 36, 由题意得, $BC = x$ cm, $EF = 5$ cm, 且四边形 $ABCD$

为正方形, $\therefore OF = \frac{x}{2}$ (cm), $OE = \sqrt{EF^2 - OF^2} = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} =$

$\frac{1}{2} \sqrt{100 - x^2}$ (cm).

$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot OE = \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{100 - x^2} =$

$\frac{1}{6} x^2 \cdot \sqrt{100 - x^2}$.

点评 考查四棱锥的体积求法和平面图形与立体图形之间的关系.



图 1 - 35

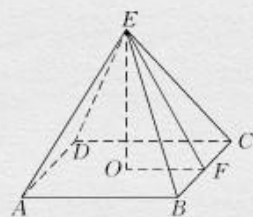


图 1 - 36

◆ 教材习题解答

练习(P₄₃)

1. D 解 设直线 a, b, c 两两相交, 交点分别为 A, B, C , 如图 2 - 1 - 1 - 22.

则 A, B, C 三点不在一直线上.

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha, \therefore C \in \alpha$. 同理 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$.

$\therefore$ 由 a, b, c 三直线可确定一平面.

点评 本题考查公理 2.

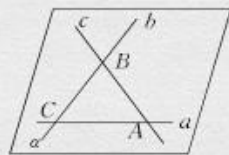


图 2-1-1-22

2. (1) 不共面的四点可确定 4 个平面.

(2) 共点的三条直线可确定 1 个或 3 个平面.

点评 本题考查公理 2 的应用.

3. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\checkmark$ (4) $\checkmark$

(1) $\because$ 平面 α 与平面 β 相交, 则 α 与 β 有一条公共直线, $\therefore$ 有无数多个公共点.

(2) 在已知直线上取不同两点, 再加上直线外一点构成不共线三点, 由公理 2 知确定一平面.

(3) 在两条直线上分别取一点 (不同于交点), 则构成不共线三点, 由公理 2 可知确定一个平面.

(4) $\because$ 三个不共线的点, 可确定一个平面, $\therefore$ 两平面重合.

4. 如图 2-1-1-23.

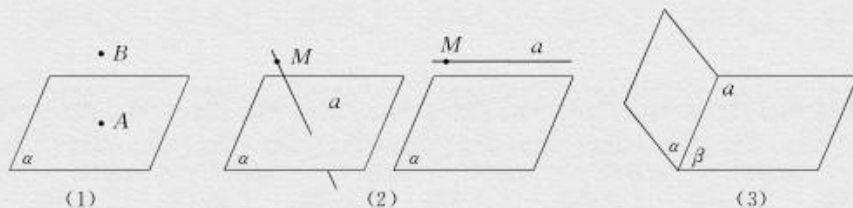


图 2-1-1-23

点评 本题考查画图方法.

◆ 教材习题解答

练习(P₄₈)

1. (1) 3 条, 分别是 BB', CC', DD' (本题考查公理 4).

(2) 相等或互补 (等角定理的考查).

2. (1) $\because BC \parallel B'C', \therefore \angle B'C'A'$ 是异面直线 $A'C'$ 与 BC 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 中, $A'B' = 2\sqrt{3}, B'C' = 2\sqrt{3}, \therefore \angle B'C'A' = 45^\circ$.

$\therefore BC$ 与 $A'C'$ 所成角是 45° .

(2) $\because AA' \parallel BB', \therefore \angle B'BC'$ 是 AA' 与 BC' 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle B'BC'$ 中, $B'C' = AD = 2\sqrt{3}, BB' = AA' = 2$,

$\therefore BC' = 4, \therefore \angle B'BC' = 60^\circ, \therefore AA'$ 与 BC' 所成的角为 60° .

点评 本题考查异面直线所成角的求法.

◆ 教材习题解答

练习(P₄₉)

因为 a 与平面 α 不平行且 $a \not\subset \alpha$, 则 a 与 α 的位置关系为相交, 即 a 与 α 有一个公共点, 所以 (A), (D) 两选项排除, 若 α 内存在一条线 b 与 a 平行, 则不妨设 a 与 α 交于 O 点, 在 α 内, 过 O 点作直线 $c \parallel b$, 则由公理 4 可知 $a \parallel c$, 这与 a 与 c 交于 O 点矛盾, 所以选答案 (B).

点评 此题考查直线与平面的位置关系, 同时为将来判断直线与平面平行奠定了基础.

◆ 教材习题解答

练习(P₅₀)

三个平面两两相交, 那么它们的交线有一条或三条, 如图 2-1-4-9.

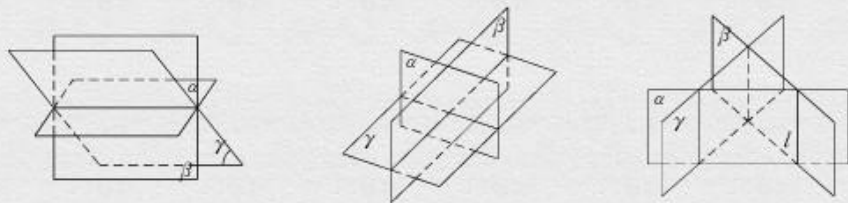


图 2-1-4-9

点评 本题考查空间平面的位置关系及空间作图能力.

习题 2.1(P₅₁)

A 组

1. 如图 2-1-4-10.

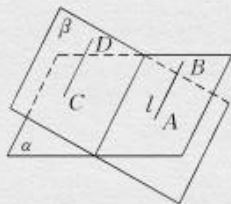


图 2-1-4-10

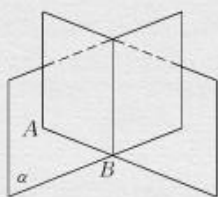


图 2-1-4-11

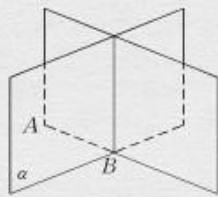


图 2-1-4-12

2. (1) 如图 2-1-4-11. (2) 如图 2-1-4-12.

3. (1)✓ (梯形的上、下底平行,由平行线定义知共面)
 (2)× (当圆上两点恰好为直径两端点时,过这三点不能确定平面)
 (3)✓ (由平行公理 4 可得结论)
 (4)× (当 $a \parallel b$ 时, a, b 也无公共点)
 (5)× (a, b 可能平行,也可能相交)

点评 本题考查平面的性质,空间两直线的位置关系.

4. (1) θ (由异面直线所成角定义或等角定理)
 (2)8 (由异面直线所成角和平面内线线垂直的判定)
 (3)2 (由公理 2 可得结论)
 (4)平行或在平面内
 (5)平行或相交
 (6)相交或异面

点评 本题考查空间两直线的位置关系.

5. 共面

点评 本题考查公理 2 的应用.

6. 证明: $\because AA' \parallel BB'$ 且 $AA' = BB'$,
 $\therefore$ 四边形 $AA'B'B'$ 为平行四边形,
 $\therefore AB \parallel A'B'$, 同理 $BC \parallel B'C'$.
 $\therefore \angle ABC = \angle A'B'C'$.
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

点评 本题考查公理 4 及其应用.

7. 三条直线两两平行且不共面,一共确定三个平面,如果三条直线交于一点则最多确定三个平面.

8. 正方体各面所在平面分空间成 27 部分.

点评 本题考查学生的空间想象能力.

B 组

1. (1)C (2)D (3)C

点评 本题考查空间想象能力,异面直线所成角的求法.

2. 证明: 因为 $AB \cap \alpha = P, AB \subset \text{平面 } ABC$,

所以 $P \in \text{平面 } ABC, P \in \alpha$,

所以 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上,

同理可证, Q 和 R 均在这条直线上.

所以 P, Q, R 三点共线.

点评 先确定一条直线, 再证明其他点也在这条直线上.

3. 证明: 如图 2-1-4-13, 连接 AC, EF, GH .

$\because EF$ 分别为 AB, BC 中点,

$$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore \frac{DG}{DC} = \frac{DH}{DA} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore HG \parallel \frac{1}{3}AC,$$

$\therefore EF \parallel HG$ 且 $EF \neq HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为梯形.

$\therefore$ 梯形两腰 EH, FG 相交, 设交点为 K .

$\because EH \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore K \in$ 平面 ABD ,

$FG \subset$ 平面 CBD ,

$\therefore K \in$ 平面 CBD .

而平面 $ABD \cap$ 平面 $CBD = BD$,

$\therefore K \in BD$.

$\therefore EH, FG, BD$ 交于一点 K .

点评 本题考查公理 2 和公理 3.

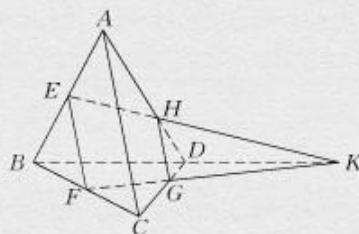


图 2-1-4-13

◆ 教材习题解答

练习(P₅₅)

1. (1) 平面 $CC'D'D$, 平面 $A'B'C'D'$; (2) 平面 $BB'C'C$, 平面 $CC'D'D$; (3) 平面 $BCC'B'$, 平面 $A'B'C'D'$.

点评 考查直线与平面平行的判定定理.

2. 直线 $BD_1 \parallel$ 平面 AEC .

证明: 如图 2-2-1-16, 连接 BD 交 AC 于 O , 连接

OE , 在 $\triangle DBD_1$ 中, OE 为三角形中位线,

$\therefore OE \parallel BD_1$. 又 $\because BD_1 \not\subset$ 平面 $AEC, OE \subset$ 平面 AEC ,

$\therefore BD_1 \parallel$ 平面 AEC .

点评 考查直线与平面平行的判定定理, 充分利用三角形中位线性质.

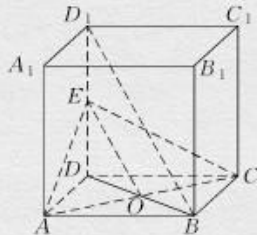


图 2-2-1-16

◆ 教材习题解答

练习(P₅₈)

1. (1) 错误. 以长方体为模型, 如图 2-2-2-13, E , F 分别为 $A'B'$, $C'D'$ 的中点, $A'D' \subset$ 平面 $A'B'C'D'$, $EF \subset$ 平面 $A'B'C'D'$, $A'D' \parallel$ 平面 $BCC'B'$, $EF \parallel$ 平面 $BCC'B'$, 但平面 $BCC'B'$ 与平面 $A'B'C'D'$ 相交.

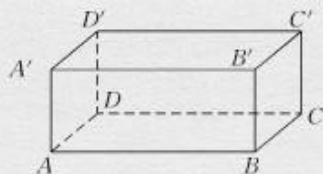


图 2-2-2-13

- (2) 正确.

点评 本题考查平面与平面平行的定义和判定定理的条件.

2. 提示: 容易证明 $MN \parallel EF$, $NA \parallel EB$, 进而可证平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFDB$.

3. (A) 不正确. 以长方体为模型, 如图 2-2-2-14, 则在平面 $ABCD$ 内与 BC 平行的所有直线都与平面 $BCC'B'$ 平行, 但平面 $ABCD$ 与平面 $BCC'B'$ 是相交的.

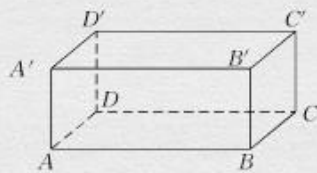


图 2-2-2-14

- (B) 不正确. 以长方体为模型, 如图 2-2-2-14, $A'D' \parallel$ 平面 $ABCD$, $A'D' \parallel$ 平面 $BCC'B'$, 但面 $ABCD$ 与面 $BCC'B'$ 相交.

- (C) 不正确. 以长方体为模型, 如图 2-2-2-14, $A'D' \parallel$ 平面 $BCC'B'$, $BC \parallel$ 平面 $A'B'C'D'$, 但平面 $BCC'B'$ 与 $A'B'C'D'$ 相交.

- (D) 平面与平面平行的定义, $\therefore$ 应选(D).

点评 本题通过对两平面平行判定的分析, 培养学生周密分析问题的能力.

◆ 教材习题解答

练习(P₆₁)

- (1) × 同时过 a, b 两直线的平面不符合条件.
 (2) × a 与 α 内直线有平行和异面的两种位置关系.
 (3) × a 与 b 可能出现三种位置关系: 平行、相交、异面.
 (4) ✓ $\because a // \alpha$, 过 a 作平面 β 交 α 于 c , 则 $a // c$, $\therefore b // c$, $\therefore b // \alpha$.

点评 本题考查线面的平行关系的判定和性质.

习题 2.2(P₆₁)

A 组

1. (A) 以长方体为模型, 如图 2-2-4-14, 则平面 $ABCD$ 与平面 $ABB'A'$ 都与直线 $D'C'$ 平行, 但两平面相交.

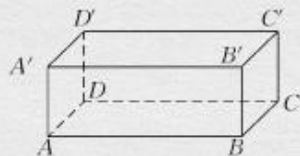


图 2-2-4-14

点评 本题考查两平面平行的判定.

- (2)(D) 直线 a 不与 α 平行, 则 $a \subset \alpha$ 或 a 与 α 相交.

点评 本题考查直线与平面的位置关系.

- (3)(C) $\because a // \alpha, P \in \alpha, \therefore P \notin a$.

$\therefore$ 由 P 和直线 a 可确定一平面 β , 则 $\beta \cap \alpha = l, P \in l, \therefore$ 存在一条直线 $l \subset \alpha$ 且 $l // a$.
 假设 l 不唯一, 不妨设还存在一直线 $l' \subset \alpha$ 且 $l' // a$, 则与过一点且平行于一直线的直线有且只有一条矛盾, $\therefore$ 只有一条符合条件的直线.

点评 本题考查直线与平面平行.

2. (1) 平行或相交, 如图 2-2-4-15.

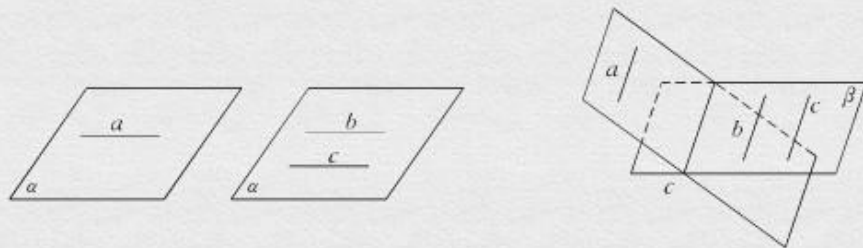


图 2-2-4-15

(2) 相交或异面, 如图 2-2-4-16.

点评 本题考查空间直线与平面的位置关系.

3. 证明: (1) $\because E, F, G$ 分别是 AB, BC, CD 的中点,

$\therefore FG \parallel BD$.

又 $\because FG \subset \text{平面 } EFG, BD \not\subset \text{平面 } EFG, \therefore BD \parallel \text{平面 } EFG$.

(2) 同理 $AC \parallel \text{平面 } EFG$.

点评 本题考查直线和平面的判定定理.

4. 解: 在直线 a 上任取一点 O , 过 O 作 $b' \parallel b$, 则由 a 与 b' 确定的平面 α 即为所求. 如图 2-2-4-17, $\because a \subset \alpha, b' \subset \alpha$,

$\therefore b \parallel \alpha$.

点评 本题考查线面平行的判定.

5. 证明: $\because AC \parallel BD, \therefore$ 由 AC, BD 可确定平面 β , 则 $AB \subset \beta$, 且 β 与 α 交于 $CD, \therefore AB \parallel \alpha, \therefore AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AC = BD$.

6. 证明: $\because AB \parallel \alpha, AB \subset \beta, \alpha \cap \beta = CD, \therefore AB \parallel CD$, 同理 $AB \parallel EF, \therefore CD \parallel EF$.

点评 本题考查线面平行的性质.

7. 证明: $\because AA' \parallel BB', \therefore$ 四边形 $AA'B'B$ 为平行四边形, $\therefore A'B' \parallel AB$.

$\because AB \subset \text{平面 } ABC, A'B' \not\subset \text{平面 } ABC$,

$\therefore A'B' \parallel \text{平面 } ABC$, 同理 $B'C' \parallel \text{平面 } ABC$.

$\because A'B' \cap B'C' = B', \therefore \text{平面 } A'B'C' \parallel \text{平面 } ABC$.

点评 本题考查平面与平面平行的判定定理.

8. 证明: $\because AO = A'O, BO = B'O, \angle AOB = \angle A'OB',$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'OB', \therefore \angle A'B'O = \angle ABO, \therefore A'B' \parallel AB$.

$\because AB \subset \text{平面 } ABC, A'B' \not\subset \text{平面 } ABC, \therefore A'B' \parallel \text{平面 } ABC$,

同理 $B'C' \parallel \text{平面 } ABC$.

$\because A'B' \cap B'C' = B', \therefore \text{平面 } A'B'C' \parallel \text{平面 } ABC$.

点评 本题考查平面与平面平行的判定定理.

B 组

1. 过 P 点作 $MN \parallel AC$ 交 VA 于 M , 交 VC 于 N , 过 M 点作 $MO \parallel VB$, 交 AB 于 P , 过 N 作 $NQ \parallel VB$, 交 BC 于 Q , 连接 OQ , 则平面 $MNQO$ 即为所求.

点评 本题考查线面平行的判定.

2. 过 b 作平面 γ 交 α 于直线 b' , $\because b \parallel \alpha, \therefore b \parallel b'$. 过 a 作平面 δ 交 β 于直线 a' ,

$\because a \parallel \beta, \therefore a \parallel a', \therefore a' \parallel \alpha. \because a'$ 与 b 相交, $\therefore \alpha \parallel \beta$.

点评 本题考查平面与平面平行的判定定理.

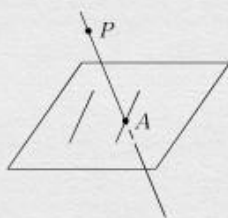


图 2-2-4-16

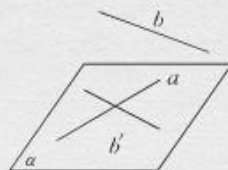


图 2-2-4-17

3. 连接 AF 交 β 于 M 点, 则 $MB \parallel CF$, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$. 同理 $ME \parallel AD$,

$$\therefore \frac{AM}{MF} = \frac{DE}{EF}, \therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

点评 本题考查平面与平面平行的性质定理.

4. 正确命题序号①②④⑤. $\because$ 平面 $ABB_1A_1 \parallel$ 平面 CDD_1C_1 ,

$\therefore$ 有水的部分和无水的部分始终有两个面平行, 而其余各面都易证是平行四边形(水面与两平行平面的交线), $\therefore$ ①②是正确的.

而从图中很明显看出在图(1)中, 水面面积 $S_1 = EF \cdot FG = EF \cdot BC$, 在图(3)中 $S_2 = EF \cdot BC$, 而(1)中的 EF 小于(3)中的 EF , $\therefore S_1 < S_2$. $\therefore$ ③是错的.

由①, ②的正确性知④是正确的.

因为水的体积一定, 形成柱体的高始终是 BC , $\therefore$ 底面 $\triangle EFB$ 的面积是定值.

$\therefore \frac{1}{2} BE \cdot EF \cdot \sin \angle BEF$ 为定值. 而 $\angle BEF$ 为定值.

$\therefore BE \cdot EF$ 为定值, $\therefore$ ⑤是正确的.

◆ 教材习题解答

练习(P₆₇)

1. 如图 2-3-1-21, 取 AC 中点 O ,

$\because VA = VC, \therefore VO \perp AC$,

同理 $BO \perp AC, \therefore VO \cap BO = O$,

$\therefore AC \perp$ 平面 VOB .

又 $\because VB \subset$ 平面 $VOB, \therefore AC \perp VB$.

点评 本题考查线面垂直的定义和判定定理.

2. (1) AB 边的中点; (2) 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心;

(3) 点 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

3. 不一定平行.

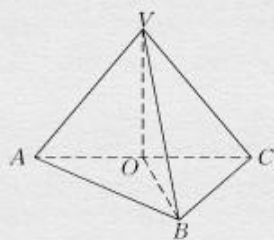


图 2-3-1-21

◆ 教材习题解答

练习(P₆₉)

分析: 折叠后的四面体 $S-EFG$ (如图 2-3-2-34).

$\because$ 在折叠前 $SG_1 \perp G_1E, SG_3 \perp G_3F$,

$\therefore$ 在折叠后 $SG \perp GE, SG \perp GF$.

又 $\because$ 在折叠后 $GE \cap GF = G$,

$\therefore SG \perp$ 面 GEF .

$\therefore$ 应选 A.

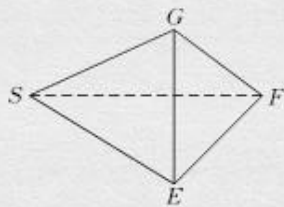


图 2-3-2-34

◆ 教材习题解答

练习(P₇₁)

1. (1)✓ (参考基础知识部分的一个重要结论)

(2)✓ (性质定理)

(3)✓ (直线与平面平行的定义)

2. b 与 α 的位置关系有两种: $b \subset \alpha$ 或 $b \parallel \alpha$.

点评 本题考查直线与平面垂直性质定理的应用和空间想象能力.

◆ 教材习题解答

练习(P₇₃)

1. A 是错误的, 因为假设 $\alpha \cap \beta = l$, 则由两平面垂直的性质知, 若平面 α 内的所有直线都垂直于 β , 则这些直线都与 l 垂直, 而在平面 α 内的直线与 l 的位置关系不仅是垂直关系.

2. ① 错误. 若一平面的已知直线垂直于另一个平面的任意直线, 则已知直线就垂直于另一平面, 而一个平面内的直线与另一平面存在平行和相交两种情况.

② 正确. 在另一平面内存在无数条与两平面的交线垂直的直线, 而这些直线都与第一个平面的已知直线垂直. ③ 错误. (参考第 1 题答案) ④ 正确. (参考性质定理) 故选 B.

A 组

1. (1) 错误. 如图 2-3-4-20, 以长方体为模型, 平面 $A'B'BA \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $D'B'BD \perp$ 平面 $ABCD$, 但平面 $A'B'BA$ 与平面 $D'B'BD$ 不垂直.

(2) 正确. (参照长方体的两相对侧面和底面的位置关系)

2. 证明: 如图 2-3-4-21, 设 $\alpha \cap \gamma = l$, 在平面 γ 内作直线 $a \perp l$.

因为 $\alpha \perp \gamma$,

所以 $a \perp \alpha$.

过 a 作一个平面 δ 与平面 β 相交于直线 b ,

由 $\beta \parallel \gamma$, 得 $a \parallel b$.

所以 $b \perp \alpha$.

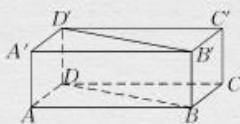


图 2-3-4-20

又 $b \subset \beta$, 所以 $\beta \perp \gamma$.

3. 解: 平面 VBA 和平面 VBC 垂直, 如图 2-3-4-22.

$\because \angle VAB = \angle VAC = 90^\circ, \therefore VA \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore VA \perp BC$.

又 $\because \angle ABC = 90^\circ, \therefore BC \perp BV. \because AV \cap BV = V$,

$\therefore BC \perp$ 平面 VAB . 又 $\because BC \subset$ 平面 VBC ,

$\therefore$ 平面 $VBA \perp$ 平面 VBC .

点评 本题主要考查线面垂直和面面垂直的相互转化.

4. 如图 2-3-4-23,

取 AB 边中点 O , 连接 VO, CO ,

由条件 $VO \perp AB, CO \perp AB$,

$\therefore \angle VOC$ 为二面角 $V-AB-C$ 的平面角.

易求 $VO = OC = 1, \therefore \angle VOC = 60^\circ$.

$\therefore$ 二面角 $V-AB-C$ 的大小为 60° .

点评 本题主要考查二面角平面角的作法和求法.

5. 略.

6. 已知 VA, VB, VC 两两垂直.

求证: 平面 VAB , 平面 VBC , 平面 VAC 也两两垂直.

证明: 如图 2-3-4-24,

$\because VA \perp VB, VA \perp VC, VB \cap VC = V$,

$\therefore VA \perp$ 平面 VBC . 又 $\because VA \subset$ 平面 VAC ,

$\therefore$ 平面 $VAC \perp$ 平面 VBC .

同理平面 $VAC \perp$ 平面 VAB , 平面 $VBC \perp$ 平面 VAB .

点评 本题主要考查线面垂直, 面面垂直的判定和性质, 以及两种位置关系的相互转化.

7. 解: 平面 $ABC'D'$ 与平面 $ABCD$ 、平面 $A'B'C'D'$ 、平面 $ABB'A'$ 、平面 $CC'D'D$ 成角 45° , 平面 $ABC'D'$ 与平面 $ADD'A'$ 、平面 $BCC'B'$ 都垂直.

8. 证明: $\because l_1 \perp m, l_1 \perp n, m, n$ 相交, $\therefore l_1$ 垂直于 m, n 确定的平面 α .

同理 $l_2 \perp \alpha, \therefore l_1 \parallel l_2, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

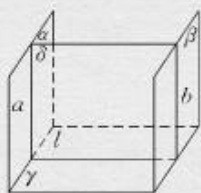


图 2-3-4-21

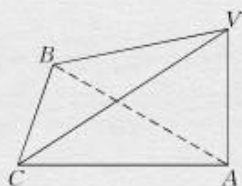


图 2-3-4-22

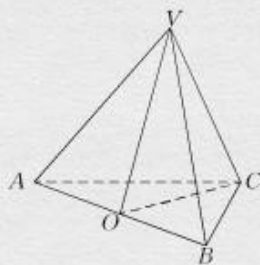


图 2-3-4-23

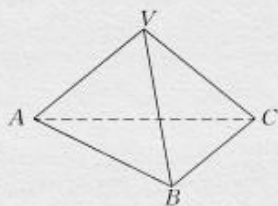


图 2-3-4-24

9. 已知: $a \parallel b, a \cap \alpha = A_1, b \cap \alpha = B_1, \theta_1$ 与 θ_2 分别是 a, b 与 α 所成角.

求证: $\theta_1 = \theta_2$.

证明: 如图 2-3-4-25, 在 a, b 上分别取点 A, B , 这两点在平面 α 的同侧, 且 $AA_1 = BB_1$, 连接 AB 和 A_1B_1 . 因为 $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$, 所以四边形 AA_1B_1B 是平行四边形, 所以 $AB \parallel A_1B_1$. 又 $A_1B_1 \subset \alpha, AB \not\subset \alpha$, 所以 $AB \parallel \alpha$.

设 A_2, B_2 分别是平面 α 的垂线 AA_2, BB_2 的垂足, 连接 A_1A_2, B_1B_2 , 则 $AA_2 = BB_2$.

在 $\text{Rt}\triangle AA_1A_2$ 和 $\text{Rt}\triangle BB_1B_2$ 中, 因为 $AA_2 = BB_2, AA_1 = BB_1$, 所以 $\text{Rt}\triangle AA_1A_2 \cong \text{Rt}\triangle BB_1B_2$, 所以 $\angle AA_1A_2 = \angle BB_1B_2, \theta_1 = \theta_2$.

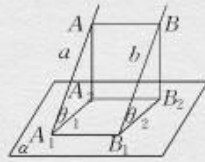


图 2-3-4-25

B 组

1. 证明: 如图 2-3-4-26,

$\because$ 正方体的性质 $BD \perp AC, A'A \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore A'A \perp BD, \because AC \cap A'A = A$,
 $\therefore BD \perp$ 平面 $ACC'A'$. 又 $\because BD \subset$ 平面 $A'BD$,
 $\therefore$ 平面 $ACC'A' \perp$ 平面 $A'BD$.

2. 解: 如图 2-3-4-27,

$\because VO \perp$ 平面 $ABC, \therefore VO \perp AB$,
 $\therefore VA = VB, AD = BD, \therefore VD \perp AB$,
 $VO \cap VD = V, \therefore AB \perp$ 平面 VDO .
 $\because CD \subset$ 平面 $VDO, \therefore AB \perp CD$.
 $\because D$ 为 AB 中点, $\therefore AC = BC$.

3. 已知 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = a$,

$\alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = c$.

求证: $a \perp b, a \perp c, b \perp c$.

证明: 如图 2-3-4-28,

$\because \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = a$,

参考典型例题 2 知 $a \perp \gamma$.

又 $\because \alpha \cap \gamma = b$,

$\therefore b \subset \gamma$.

$\beta \cap \gamma = c, \therefore c \subset \gamma$.

$\therefore a \perp b, a \perp c$, 同理 $b \perp c$.

点评 上述三题均是直线和平面、平面和平面垂直的判定和性质的考查, 同时注重考查了转化的数学思想.

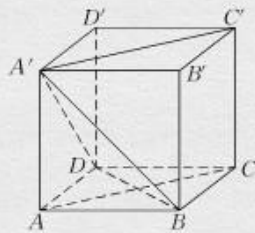


图 2-3-4-26

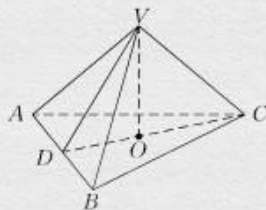


图 2-3-4-27

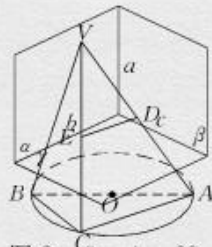


图 2-3-4-28

图 2-3-4-29

4. 解: 如图 2-3-4-29,

$\because VC \perp \text{平面 } ABC, AC \subset \text{平面 } ABC,$

$\therefore VC \perp AC,$

$\because C$ 为圆周上一点, AB 是直径,

$\therefore AC \perp BC,$

$\because VC \cap BC = C, \therefore AC \perp \text{平面 } VBC,$

$\because D, E$ 分别为 VA, VC 中点, $\therefore DE \parallel AC,$

$\therefore DE \perp \text{平面 } VBC.$

◆ 教材习题解答

复习参考题(P₇₈)

A 组

1. 三个平面将空间分成 4 或 6 或 7 或 8 个部分.

2. 连接 C_1E , 在上底面过点 E 作直线 $l \perp C_1E$ 即可.

因为 $CC_1 \perp \text{底面 } A_1B_1C_1D_1$, 所以 $CC_1 \perp l$,

根据作法知 $l \perp C_1E$, 又因为 $C_1E \perp C_1C = C_1$,

所以 $l \perp \text{平面 } CC_1E$, 因此 $l \perp CE$.

3. 已知直线 a, b, c 两两相交且不共点, 如图 2-12, 交点分别为 A, B, C .

求证: 直线 a, b, c 在同一个平面内.

证明: $\because A, B, C$ 三点不共线,

$\therefore$ 由 A, B, C 三点可确定一平面, 设为 α .

$\because A \in \alpha, B \in \alpha, A \in b, B \in b, \therefore b \subset \alpha.$

同理 $a \subset \alpha, c \subset \alpha.$

$\therefore a, b, c$ 在同一个平面 α 内.

4. (1) 证明: 如图 2-13, 在正方体 $MNPQ-M'N'P'Q'$

中, 连接 $Q'N'$, 则 $CD \parallel \frac{1}{2}Q'N'$.

$\because Q'N' \parallel AB,$

$\therefore CD \parallel \frac{1}{2}AB.$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为梯形.

(2) 连接 MP , 连 $M'P'$ 交 CD 于 H , 交 $Q'N'$ 于 O' .

设 MP 交 AB 于 O , 连 OO' , 则 $OO' \perp \text{平面 } M'N'P'Q'.$

$\therefore OO' \perp CD.$

$\because CD \perp M'P', OO' \cap M'P' = O',$

$\therefore CD \perp \text{平面 } MPP'M',$ 而 $OH \subset \text{平面 } MPP'M',$

$\therefore CD \perp OH, \therefore OH$ 为梯形的高.

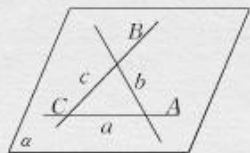


图 2-12

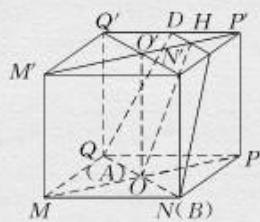


图 2-13

易求 $CD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, AB = \sqrt{2}a, OH = \sqrt{OO'^2 + O'H^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$,

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) a \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} a = \frac{9}{8} a^2.$$

点评 本题考查公理4和初中知识的综合应用,解法1中利用的是线面垂直的判定和性质.

5. 证明:如图2-14,连接 EE_1, FF_1 ,

由正方体性质 $AE \parallel A_1E_1$.

又 $\because AE = A_1E_1$,

$\therefore$ 四边形 AEE_1A_1 为平行四边形,

$\therefore AA_1 \parallel EE_1$.

同理 $AA_1 \parallel FF_1$.

$\therefore EE_1 \parallel FF_1$.

$\therefore$ 四边形 EFF_1E_1 为平行四边形.

$\therefore EF \parallel E_1F_1$ 且 $EF = E_1F_1$.

6. 解: 设 $AB = x, AD = y, AA' = z$,

则 $AC' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\text{又 } \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

$$\therefore AC' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

点评 本题考查线面垂直的性质.

7. 解: 如图2-15, 作 $VO \perp$ 平面 $ABCD$, 垂足为 O ,

则 $VO \perp AB$, 取 AB 中点 H , 连 VH, OH , 则 $VH \perp AB$.

$\because VH \cap VO = V$,

$\therefore AB \perp$ 平面 VHO .

$\therefore \angle VHO$ 为二面角 $V-AB-C$ 的平面角.

易求 $VH^2 = VA^2 - AH^2 = 5 - 1 = 4$,

$\therefore VH = 2$.

而 $OH = \frac{1}{2}AB = 1$,

$\therefore \angle VHO = 60^\circ$.

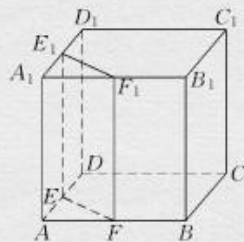


图 2-14

点评 本题考查二面角平面角的作法和求法.

8. 证明: $\because a \cap b = O, \therefore O \in a, O \in b. \because \alpha \cap \beta = a, \therefore O \in \beta.$
 $\because \alpha \cap \gamma = b, \therefore O \in \gamma. \therefore O$ 为 β 与 γ 的公共点, 又 $\because \beta \cap \gamma = c, \therefore O \in c.$
 $\therefore a, b, c$ 三线共点.

9. $a \parallel b \parallel c.$

证明: 由条件 $a \parallel b, \therefore a \parallel \beta.$

又 $\because \alpha$ 过 a 且与平面 β 交于 $c,$

$\therefore a \parallel c, \therefore b \parallel c, \therefore a \parallel b \parallel c.$

点评 本题考查线面平行的判定和性质.

10. 证明 $\because \alpha \cap \beta = AB, \therefore AB \subset \alpha, AB \subset \beta.$
 $\because PC \perp \alpha, \therefore PC \perp AB. \because PD \perp \beta, \therefore PD \perp AB.$
 $\because PC \cap PD = P, \therefore AB \perp \text{平面 } PCD.$
 $\because CD \subset \text{平面 } PCD, \therefore AB \perp CD.$

B 组

1. (1) 折叠前, $AD \perp AE, CD \perp CF$, 折叠后,
 $A'D \perp A'E, A'D \perp A'F$, 又 $A'E \cap A'F = A',$
 所以 $A'D \perp \text{面 } A'EF$, 因此 $A'D \perp EF.$

(2) $\frac{\sqrt{17}}{12}.$

2. (1) 证明: 如图 2-16 连接 B_1D_1 , 则 $B_1D_1 \perp A_1C_1.$

又 $\because BB_1 \perp \text{平面 } A_1B_1C_1D_1,$

$\therefore BB_1 \perp A_1C_1.$

又 $\because BB_1 \cap B_1D_1 = B_1,$

$\therefore A_1C_1 \perp \text{平面 } BB_1D_1D.$

又 $\because B_1D \subset \text{平面 } BB_1D_1D,$

$\therefore B_1D \perp A_1C_1,$

同理 $B_1D \perp A_1B.$

又 $\because A_1B \cap A_1C_1 = A_1,$

$\therefore B_1D \perp \text{平面 } A_1C_1B.$

- (2) 证明: 由(1)知 $A_1C_1 \perp BH, A_1B \perp C_1H,$

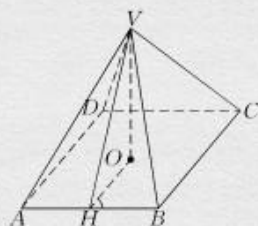


图 2-15

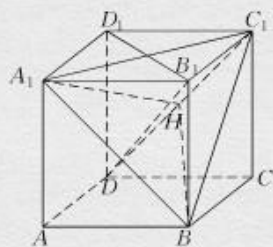


图 2-16

$\therefore H$ 为 $\triangle A_1 C_1 B$ 的高的交点.

又 $\because \triangle A_1 C_1 B$ 为正三角形,

$\therefore BH, C_1 H, A_1 H$ 为三条中线.

$\therefore H$ 为 $\triangle A_1 C_1 B$ 的重心.

◆ 教材习题解答

练习(P₈₆)

1. 解: (1) $k = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; (2) $k = \tan 45^\circ = 1$;

(3) $k = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$;

(4) $k = \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$.

点评 直接利用 $k = \tan \alpha$ 求斜率.

2. 解: (1) $k_{CD} = \frac{-4-8}{4-18} = \frac{6}{7} > 0$, $\therefore$ 倾斜角 α 是锐角;

(2) $k_{PQ} = \frac{\sqrt{3}-0}{-1-0} = -\sqrt{3} < 0$, $\therefore$ 倾斜角 α 是钝角.

点评 利用两点的坐标求斜率 k , 利用 $k = \tan \alpha$ 判断角的大小.

3. 解 (1) $\because k = \frac{c-c}{b-a} = 0$, $\therefore \alpha = 0^\circ$;

(2) 直线 $CD \perp x$ 轴, $\therefore \alpha = 90^\circ$;

(3) $\because k = \frac{(c+a)-(b+c)}{a-b} = 1$,

$\therefore$ 由 $k = \tan \alpha = 1$ 得 $\alpha = 45^\circ$.

点评 利用 $k = \tan \alpha$ 求倾斜角 α , 注意特殊情形——斜率不存在的情况.

4. 解: 如图 3-1-1-13.

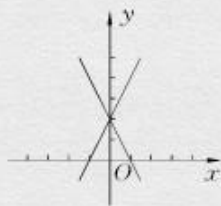


图 3-1-1-13

◆ 教材习题解答

练习(P₈₉)

1. 解 (1) $k_1 = \frac{0-3}{-1-2} = 1, \therefore k_1 = k_2, \therefore l_1 \parallel l_2.$

(2) $k_3 = \frac{0-1}{-2-3} = \frac{1}{5}, \therefore k_3 k_4 = \frac{1}{5} \times (-5) = -1, \therefore l_3 \perp l_4.$

点评 利用斜率的关系判断两直线的平行与垂直是基本方法.

2. 解: $k_{AB} = \frac{m-1}{-1-m}, k_{PQ} = \frac{0-2}{-5-1} = \frac{1}{3}.$

(1) 若 $AB \parallel PQ$, 则 $k_{AB} = k_{PQ}$, 则 $\frac{m-1}{-1-m} = \frac{1}{3}$, 解得 $m = \frac{1}{2}.$

(2) 若 $AB \perp PQ$, 则 $k_{AB} \cdot k_{PQ} = -1$, 即 $\frac{m-1}{-1-m} \cdot \frac{1}{3} = -1$, 解得 $m = -2.$

习题 3.1(P₈₉)

A 组

1. 解: $|k| = 1, \therefore k = \pm 1$, 由 $\tan \alpha = 1$ 得 $\alpha = 45^\circ$, 由 $\tan \alpha = -1$ 得 $\alpha = 135^\circ.$

$\therefore$ 倾斜角为 45° 或 $135^\circ.$

2. 解: $k_{AB} = \frac{-1-3}{1-2} = 4, k_{BC} = \frac{-2-(-1)}{-1-1} = \frac{1}{2}, k_{CD} = \frac{2-(-2)}{-2-(-1)} = -4,$

$k_{AD} = \frac{2-3}{-2-2} = \frac{1}{4}.$

3. 解: $k_{AB} = \frac{7-5}{x-3} = 2$, 解得 $x = 4, k_{AC} = \frac{y-5}{-1-3} = 2$, 解得 $y = -3.$

点评: 直线的斜率的大小不随直线上的点的坐标的改变而改变.

4. 解: (1) $\frac{3m-6}{1-(-m)} = 12$, 解得 $m = -2.$

(2) $\frac{(-2m-1)-2}{-m-m} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 解得 $m = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}.$

5. 解: $k_{AB} = \frac{0-2}{-1-1} = 1, k_{BC} = \frac{4-0}{3-(-1)} = 1, \therefore AB \parallel BC.$

又 $\because AB, BC$ 都经过点 $B, \therefore A, B, C$ 三点在同一条直线上.

点评 利用斜率相等证明三点共线, 是最基本的方法之一.

6. 解: (1) $k_2 = \frac{8-2}{4-1} = 2 = k_1, \therefore l_1 \parallel l_2$, 或 l_1 与 l_2 重合.

(2) $l_1 \parallel x$ 轴, $l_2 \parallel x$ 轴, l_1 过点 P, Q, l_2 不过点 $P, Q,$

$\therefore l_1 \parallel l_2.$

(3) $k_1 = \frac{-2-0}{-5-(-1)} = \frac{1}{2}, k_2 = \frac{5-3}{0-(-4)} = \frac{1}{2}, k_1 = k_2.$ 在

同一个坐标系中画出 l_1, l_2 , 如图 3-1-2-6, 由图可知,

l_1 与 l_2 不重合, $\therefore l_1 \parallel l_2.$

点评 本题在于提醒我们注意公式 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ 成立的条件是: k_1, k_2 存在, 且 l_1 与 l_2 不重合.

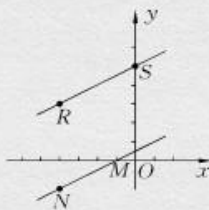


图 3-1-2-6

$$7. (1) k_2 = \frac{-\frac{1}{2}-1}{0-1} = \frac{3}{2}, k_1 k_2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{2} = -1, \therefore l_1 \perp l_2.$$

$$(2) k_1 = \tan 45^\circ = 1, k_2 = \frac{-6-(-1)}{3-(-2)} = -1, k_1 k_2 = -1, \therefore l_1 \perp l_2.$$

$$(3) k_1 = \frac{-5-0}{4-1} = -\frac{5}{3}, k_2 = \frac{3-0}{-1-(-6)} = \frac{3}{5}, k_1 k_2 = -1, \therefore l_1 \perp l_2.$$

$$8. \text{解: 设 } D(a, b), \text{ 则 } k_{CD} = \frac{b-0}{a-3} = \frac{b}{a-3}, k_{AB} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3, k_{CB} = \frac{2-0}{2-3} = -2, k_{AD} = \frac{b-(-1)}{a-1} = \frac{b+1}{a-1}.$$

$$\because CD \perp AB, \therefore k_{CD} k_{AB} = -1, \text{ 即 } \frac{3b}{a-3} = -1. \quad \textcircled{1}$$

$$\because CB \parallel AD, \therefore k_{CB} = k_{AD}, \text{ 即 } -2 = \frac{b+1}{a-1}. \quad \textcircled{2}$$

由①、②联立, 解方程组得 $a=0, b=1$, $\therefore D$ 的坐标为 $(0, 1)$.

点评 本题综合考查了平行与垂直的基本公式.

B组

$$1. \text{解: 设 } P \text{ 点坐标为 } (a, 0), k_{MP} = \frac{0-2}{a-2} = -\frac{2}{a-2}, k_{NP} = \frac{0-(-2)}{a-5} = \frac{2}{a-5},$$

$$\because k_{MP} \cdot k_{NP} = -1, \therefore \left(-\frac{2}{a-2}\right) \cdot \frac{2}{a-5} = -1, \text{ 解得 } a=1, \text{ 或 } a=6,$$

$\therefore P$ 点的坐标为 $(1, 0)$ 或 $(6, 0)$.

点评 直角的两边垂直, 因此可以使用 $k_1 k_2 = -1$ 解题.

$$2. \text{解: } k_1 = \frac{4-1}{-3-m} = \frac{3}{-3-m}, k_2 = \frac{(m+1)-m}{-1-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } l_1 \parallel l_2 \text{ 时, } k_1 = k_2, \text{ 即 } \frac{3}{-3-m} = -\frac{1}{2}, \text{ 解得 } m=3,$$

$$\text{当 } l_1 \perp l_2 \text{ 时, } k_1 k_2 = -1, \text{ 即 } \left(\frac{3}{-3-m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \text{ 解得 } m = -\frac{9}{2}.$$

$$3. \text{解: } k_{AB} = \frac{2-(2+2\sqrt{2})}{-2-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, k_{BC} = \frac{(2-2\sqrt{2})-2}{0-(-2)} = -\sqrt{2},$$

$$k_{CD} = \frac{2-(2-2\sqrt{2})}{4-0} = \frac{\sqrt{2}}{2}, k_{DA} = \frac{2-(2+2\sqrt{2})}{4-2} = -\sqrt{2}.$$

$\because k_{AB} = k_{CD}, \therefore AB \parallel CD$, 同理 $BC \parallel AD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $\because k_{AB} \cdot k_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -1, \therefore AB \perp BC, \therefore \square ABCD$ 是矩形.

点评 根据矩形的定义解题, 首先证明四边形是平行四边形, 其次, 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

4. 解: 依据直角梯形的定义, 有一组对边平行, 另一组对边不平行, 且有一个角为直角的四边形为直角梯形, 利用定义来解题.

$$k_{AB} = \frac{1-n}{6-m}, k_{BC} = \frac{3-1}{3-6} = -\frac{2}{3}, k_{CD} = \frac{5-3}{2-3} = -2, k_{AD} = \frac{5-n}{2-m}.$$

$$(1) \text{ 当 } AB \perp AD, AB \parallel DC \text{ 时, 有 } \begin{cases} \frac{1-n}{6-m} \cdot \frac{5-n}{2-m} = -1, \\ \frac{1-n}{6-m} = -2, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} m = \frac{18}{5}, \\ n = \frac{29}{5}. \end{cases}$$

$$\text{此时 } k_{AD} = \frac{5-\frac{29}{5}}{2-\frac{18}{5}} = \frac{1}{2} \neq k_{BC}, \text{ 即 } AD \text{ 不平行于 } BC.$$

$$(2) \text{ 当 } AB \perp BC, AD \parallel BC \text{ 时, 有 } \begin{cases} \frac{1-n}{6-m} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1, \\ \frac{5-n}{2-m} = -\frac{2}{3}, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} m = \frac{86}{13}, \\ n = \frac{25}{13}. \end{cases}$$

$$\text{此时 } k_{AB} = \frac{1-\frac{25}{13}}{6-\frac{86}{13}} = \frac{3}{2} \neq k_{CD}, \text{ 即 } AB \text{ 与 } CD \text{ 不平行.}$$

$$\text{由 (1)、(2) 可知, } m = \frac{18}{5}, n = \frac{29}{5}; \text{ 或 } m = \frac{86}{13}, n = \frac{25}{13}.$$

点评 根据直角梯形的定义解题, 要注意在草稿纸上多画几个梯形, 进行分类讨论, 找出符合题意的情况, 以形助数. 但在解题过程中不要忽略有一组对边不平行这一情况的判断.

$$5. \text{ 解: } \frac{2m - (m^2 - 3)}{(3 - m - m^2) - (m^2 + 2)} = \tan 45^\circ = 1, \text{ 解得 } m = -2, \text{ 或 } m = -1.$$

$$\text{又 } \because (3 - m - m^2) - (m^2 + 2) \neq 0, \therefore m \neq -1, m \neq \frac{1}{2}. \text{ 由以上可知, } m = -2.$$

点评 分式方程, 要注意分母不能为零, 因此, 要对结果进行验根.

$$6. \text{ 解: } k_{PA} = \frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1, k_{PB} = \frac{1 - (-1)}{2 - 0} = 1, \therefore k \in [-1, 1],$$

当 $k \in [0, 1]$ 时, $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$; 当 $k \in [-1, 0]$ 时, α 为钝角, $135^\circ \leq \alpha < 180^\circ$. $\therefore$ 倾斜角 α 的取值范围是 $[0^\circ, 45^\circ] \cup [135^\circ, 180^\circ)$, 斜率 k 的取值范围是 $[-1, 1]$.

点评 当 $k > 0$ 时, α 为锐角, k 增大, α 也增大; 当 $k < 0$ 时, α 为钝角, k 增大, α 也增大.

(P₉₀) 魔术师的地毯

解析 这是一个似乎令人费解的问题: 魔术师真的能把长、宽都是 13 dm 的地毯改成为 21 dm, 宽为 8 dm 的地毯吗? 面积减少了 1 dm^2 , 当然是不可能的.

如图 3-1-2-7(1), 在 $\triangle ACB$ 中, $\tan \angle CAB = \frac{13}{5}$, 而 $\tan \angle DEF = \frac{8}{8-5} = \frac{8}{3}$.

把 $\triangle ABC$ 剪开, 旋转 90° , 再使 A 与 D 重合, C 与 B 重合, 即线段 AC 与线段 DB 合并, 由于 $\frac{13}{5} \neq \frac{8}{3}$, 即直线的斜率不相等, 此时三点 $E, D(C), B$ 并不在一条直线上, 因此不能构成图 3-1-2-7(2) 的一条线段 GK .

准确的图形如图 3-1-2-8 所示, 自 G 到 K 中间有一个细长的重叠地带, 这个重叠部分是面积减少的原因, 地毯比较松软, 尺寸不是十分精确, 如果选择钢板, 这个魔术就做不成了.

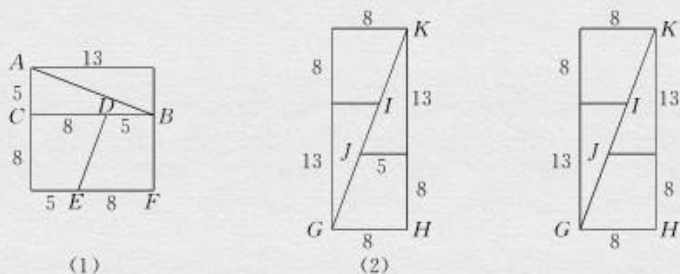


图 3-1-2-7

图 3-1-2-8

另外, 这个问题还与著名的斐波拉契数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$

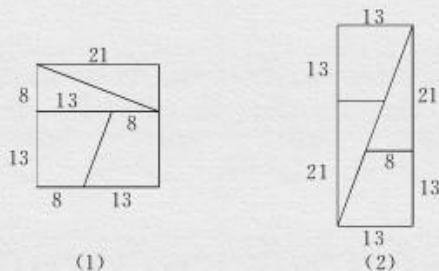


图 3-1-2-9

有关, 这个数列的递推公式是 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

它有一个性质, 就是 $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} + (-1)^n$.

当 $n=6$ 时, $a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, 13^2 = 8 \times 21 + (-1)^6$.

当 $n=7$ 时, $a_7 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34, 21^2 = 13 \times 34 - 1$.

如图 3-1-2-9(1), 把正方形地毯的边长改为 21 dm, 并且按图所示的线条分块, 然后再拼接成图 3-1-2-9(2) 的情形, 这样面积多了 1 dm^2 .

◆ 教材习题解答

练习(P₉₅)

1. 解: (1) $y - (-1) = \sqrt{2}(x - 3)$;

(2) $\because k = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}[x - (-\sqrt{2})]$;

(3) $\because k = \tan 0^\circ = 0, \therefore y - 3 = 0(x - 0)$;

(4) $\because k = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \therefore y - (-2) = -\sqrt{3}[x - (-4)]$.

点评 直线的点斜式方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 突出了直线上的一点 (x_0, y_0) 和斜率 k .

2. (1) $1, 45^\circ$; (2) $\sqrt{3}, 60^\circ$.

3. 解: (1) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2$; (2) $y = -2x + 4$;

4. 解: (1) $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{2}, \therefore k_1 = k_2$, 且 $b_1 = 3, b_2 = -2$, 则 $b_1 \neq b_2, \therefore l_1 \parallel l_2$.

(2) $k_1 = \frac{5}{3}, k_2 = -\frac{3}{5}, \therefore k_1 k_2 = \frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -1, \therefore l_1 \perp l_2$.

◆ 教材习题解答

练习(P₉₇)

1. 解: (1) $\frac{y-1}{-3-1} = \frac{x-2}{0-2}$; (2) $\frac{y-5}{0-5} = \frac{x-0}{5-0}$.

2. 解: (1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, 图形如图 3-2-2-5;

(2) $\frac{x}{-5} + \frac{y}{6} = 1$, 图形如图 3-2-2-6.

3. 解: (1) $b = 5$, 由 $a + b = 2$ 得 $a = -3$,

$\therefore$ 所求直线方程为 $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$.

(2) $a = 5$, 由 $|5 - b| = 2$ 得 $b = 7$, 或 $b = 3$.

$\therefore$ 所求直线的方程为 $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$, 或 $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

点评 截距是直线与坐标轴交点的横坐标(在 x 轴上的截距).

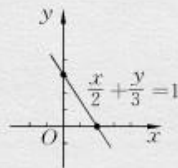


图 3-2-2-5

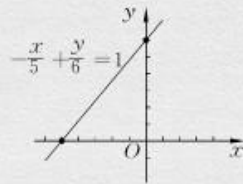


图 3-2-2-6

◆ 教材习题解答

练习(P₉₉)

1. 解: (1) $y - (-2) = -\frac{1}{2}(x - 8)$, 可化为 $x + 2y - 4 = 0$;

(2) $y = 2$, 即 $y - 2 = 0$;

(3) $\frac{y - (-2)}{-4 - (-2)} = \frac{x - 3}{5 - 3}$, 可化为 $x + y - 1 = 0$;

(4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} = 1$, 可化为 $2x - y - 3 = 0$.

点评 根据题意, 灵活使用直线方程的适当形式, 再化为一般式.

2. (1) $-3, 5$; (2) $\frac{5}{4}, -5$;

(3) $-\frac{1}{2}, 0$; (4) $\frac{7}{6}, \frac{2}{3}$.

3. 解: (1) 当 $B \neq 0$ 时, $Ax + By + C = 0$ 可化为 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, $k = -\frac{A}{B}$;

当 $B = 0$ 时, $Ax + By + C = 0$ 可化为 $Ax + C = 0$, 直线与 x 轴垂直, 斜率不存在.

(2) 直线 $Ax + By + C = 0$ 过原点, 则将 $(0, 0)$ 代入 $Ax + By + C = 0$ 得 $C = 0$,

$\therefore$ 当 A, B 不同时为 0, 且 $C = 0$ 时, 直线 $Ax + By + C = 0$ 过原点.

点评 要熟练掌握直线方程的一般式与斜截式的互化, 这是使用最多的互化形式.

习题 3.2(P₁₀₀)

A 组

1. 解 (1) $y - (-2) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 8)$, 可化为 $\sqrt{3}x - 3y - 6 - 8\sqrt{3} = 0$;

(2) $x = -2$;

(3) $y = -4x + 7$, 可化为 $4x + y - 7 = 0$;

(4) $\frac{y-8}{-2-8} = \frac{x-(-1)}{4-(-1)}$, 可化为 $2x + y - 6 = 0$;

(5) $y = 2$; (6) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$, 可化为 $3x - 4y - 12 = 0$.

2. 解 $k_{AB} = \frac{7-3}{5-1} = 1, k_{BC} = \frac{12-7}{10-5} = 1, \therefore AB \parallel BC$.

又 $\therefore$ 直线 AB, BC 都通过点 B , $\therefore A, B, C$ 三点共线.

3. 解 由中点坐标公式得 $x = \frac{7-5}{2} = 1, y = \frac{-4+6}{2} = 1$, 即线段 AB 的中点坐标为

$(1, 1)$. 又 $\therefore k_{AB} = \frac{6-(-4)}{-5-7} = -\frac{5}{6}, \therefore$ 线段 AB 的垂直平分线的斜率为 $\frac{6}{5}$,

$y-1 = \frac{6}{5}(x-1)$, 可化为 $6x - 5y - 1 = 0$, 即为线段 AB 的垂直平分线的方程.

点评 线段的垂直平分线要突出两点: ①垂直; ②平分.

4. 解 由中点坐标公式得 AB 的中点为 $(6, \frac{3}{2})$, AC 的中点为 $(1, 4)$, 由两点式知,

通过这两点的直线方程为 $\frac{y-\frac{3}{2}}{4-\frac{3}{2}} = \frac{x-6}{1-6}$, 可化为 $x + 2y - 9 = 0$.

5. 解 由 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 得 $k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, k_2 = 2k_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 由点斜式得 $y - (-3) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2)$, 整理得 $2x - \sqrt{3}y - 4 - 3\sqrt{3} = 0$.

6. 解 由题意得, $\frac{l-20}{G-4} = \frac{1.5}{1}$, 整理得 $l - 1.5G - 14 = 0$.

7. 解 $\frac{l-12.506}{12.512-12.506} = \frac{t-40}{80-40}$,

当 $t = 100$ 时, 解得 $l = 12.515$. $\therefore$ 铁棒在 100°C 时的长度为 12.515 m .

8. 解 菱形的四个顶点坐标分别为 $(-4, 0), (4, 0), (0, -3), (0, 3)$.

$\therefore$ 四边所在直线的方程分别为 $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-3} = 1, \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1, \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1, \frac{x}{4} +$

$\frac{y}{3} = 1$. 化为一般式分别为 $3x + 4y + 12 = 0, 3x - 4y + 12 = 0, 3x - 4y - 12 = 0,$

$3x + 4y - 12 = 0$.

点评 本题关键在于根据题意写出四个顶点的坐标.

9. 解 当截距为零时, 直线方程为 $3x - 2y = 0$. 当截距不为零时, 设所求直线的方程

为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 将 $P(2, 3)$ 的坐标代入得 $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$, 解得 $a = 5$.

$\therefore$ 所求直线的方程为 $x + y - 5 = 0$ 或 $3x - 2y = 0$.

点评 不要漏掉截距为零时的情形.

10. 解 (1) 由 $4x+y-2=0$ 得 $k_1=-4$, $\therefore k_2=k_1=-4$,

$\therefore$ 所求直线的方程为 $y-2=-4(x-3)$, 整理得 $4x+y-14=0$.

(2) $k_{MN}=\frac{-5-2}{-1-1}=\frac{7}{2}$, $\therefore$ 所求直线的方程为 $y-(-3)=\frac{7}{2}(x-2)$,

整理得 $7x-2y-20=0$.

(3) 由 $2x+y-5=0$ 得 $k_1=-2$, 由 $k_1k_2=-1$ 得 $k_2=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 所求直线的方程为 $y-0=\frac{1}{2}(x-3)$, 整理得 $x-2y-3=0$.

11. 解 点 $P(6,4)$ 关于 x 轴的对称点为 $P'(6,-4)$, 入射光线经过点 $P, Q(2,0)$, 由

两点式得 $\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-6}{2-6}$, 整理得 $x-y-2=0$.

反射光线经过点 P', Q , 由两点式得 $\frac{y-(-4)}{0-(-4)}=\frac{x-6}{2-6}$, 整理得 $x+y-2=0$.

$\therefore$ 入射光线所在直线方程为 $x-y-2=0$, 反射光线所在直线方程为 $x+y-2=0$.

点评 根据物理学中光线的性质解题, 能够提高解题速度.

B 组

1. 解 (1) $k_{AC}=\frac{3-7}{0-6}=\frac{2}{3}$, $k'=-\frac{3}{2}$.

$\therefore BC$ 边上的高所在直线的方程为 $y-0=-\frac{3}{2}(x-4)$, 整理得 $3x+2y-12=0$.

(2) BC 的中点坐标为 $(3,5)$,

$\therefore BC$ 边上的中线所在直线的方程为 $\frac{y-0}{5-0}=\frac{x-4}{3-4}$, 整理得 $5x+y-20=0$.

(3) BC 的中点为 $(3,5)$, 垂直平分线的斜率为 $-\frac{3}{2}$,

$\therefore BC$ 边的垂直平分线的方程为 $y-5=-\frac{3}{2}(x-3)$, 整理得 $3x+2y-19=0$.

2. 解 (1) 当斜率存在, 且不为零时, 直线与两坐标轴都相交, 由 $Ax+By+C=0$ 得

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, $\therefore A \neq 0, B \neq 0, C \in \mathbf{R}$.

(2) 当斜率不存在时, 直线只与 x 轴相交, $\therefore B=0, A \neq 0, C \neq 0$.

(3) 当斜率为 0 时, 只与 y 轴相交, $\therefore A=0, B \neq 0, C \neq 0$.

(4) 是 x 轴所在直线时, $y=0$, $\therefore B \neq 0, A=0, C=0$.

(5) 是 y 轴所在直线时, $x=0$, $\therefore A \neq 0, B=0, C=0$.

点评 数形结合解答本题, 且助于加深对题意的理解.

3. 解 点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上, 则有 $Ax_0+By_0+C=0$, 与方程 $Ax+$

$By+C=0$ 两式相减,消去 C 得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

点评 本题关键在于消去字母 C .

4. 解 ① 当 $B_1=0$ 时, $A_1 \neq 0$, 由 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 得 $A_2=0$, 则 $B_2 \neq 0$, 这时, 两直线分别为 $l_1: A_1x+C_1=0, l_2: B_2y+C_2=0$, 显然 $l_1 \perp l_2$.

② 当 $B_2=0$ 时, 同理可证 $l_1 \perp l_2$.

③ 当 $B_1B_2 \neq 0$ 时, $l_1: y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}, l_2: y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$,

$\because A_1A_2+B_1B_2=0, \therefore A_1A_2=-B_1B_2$, 即 $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$,

$\therefore \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)=-1. \therefore l_1 \perp l_2$.

点评 由一般式 $Ax+By+C=0$ 化成斜截式时, 要注意对 B 分类讨论.

5. 解 在 l 上取一点 (a, b) , 沿 x 轴向左平移 3 个单位得 $(a-3, b)$, 再沿 y 轴向上平移 1 个单位得 $(a-3, b+1)$, 该点仍在直线 l 上, $\therefore k = \frac{(b+1)-b}{(a-3)-a} = -\frac{1}{3}$.

6. 解 取 $(0, 0)$ 代入 $2x-y+3=0+0+3=3>0$,

取 $(-1, 2)$ 代入 $2x-y+3=2 \times (-1)-2+3=-1<0$,

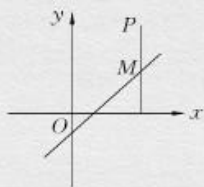
可以验证, 当点在直线 l 的左上方时, 有 $2x-y+3<0$, 当点位于直线 l 的右下方区域时, 有 $2x-y+3>0$.

点评 由特殊到一般, 能够发现规律, 培养探索精神. 事实上, 若点 $P(x_1, y_1)$ 在直线 $l: Ax+By+C=0 (B \neq 0)$ 的上方, 则 $Ax_1+By_1+C<0$. 如图 3-2-3-2 所示, 过 $P(x_1, y_1)$ 作直线垂直于 x 轴, 交直线 l 于 M , 设 $M(x_1, y_2)$, 则

$Ax_1+By_2+C=0, \therefore y_2 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}. \because P$ 在 M 的上方,

$\therefore y_1 > y_2$, 即 $y_1 > -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}$, 两端同乘以 B , 得 $By_1 < -$ 图 3-2-3-2

$Ax_1 - C$, 即 $Ax_1 - By_1 + C < 0$. 如果 $P(x_1, y_1)$ 在直线的下方, 则 $y_1 < y_2$, 即 $y_1 < -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}$. 两端同乘以 B , 得 $By_1 > -Ax_1 - C. \therefore Ax_1 + By_1 + C > 0$. 点 P 在直线的上方或下方就是指在同横坐标时, P 的纵坐标大于或小于直线上的点对应的纵坐标.



◆ 教材习题解答

练习(P₁₀₄)

1. 解 (1) 由 $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ x-2y=4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{36}{7}, \\ y=\frac{4}{7}. \end{cases}$

$\therefore$ 交点坐标为 $(\frac{36}{7}, \frac{4}{7})$, 图形见 3-3-1-5.

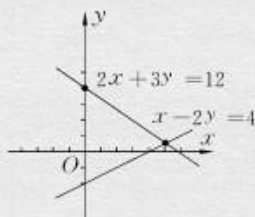


图 3-3-1-5

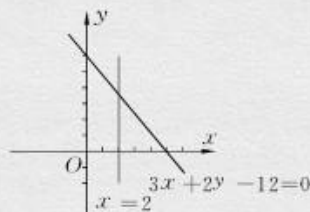


图 3-3-1-6

(2) 由 $\begin{cases} x=2, \\ 3x+2y-12=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

$\therefore$ 交点坐标为 $(2, 3)$, 图形见 3-3-1-7.

2. 解 (1) 由 $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 4x+2y=1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{17}{16}, \\ y=-\frac{13}{8}. \end{cases}$ $\therefore l_1$ 与 l_2 相交, 交点坐标为 $(\frac{17}{16}, -\frac{13}{8})$.

(2) $\begin{cases} 2x-6y+4=0, \\ y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+2=0, \\ x-3y+2=0. \end{cases}$ ① ②

①、②两式相同, $\therefore l_1$ 与 l_2 重合.

(3) $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+y=3, \\ x+(\sqrt{2}+1)y=2, \end{cases}$ ① ②

② $\times (\sqrt{2}-1) -$ ① 得 $0 = 2\sqrt{2} - 5$, 矛盾, 方程组无解, $\therefore l_1 \parallel l_2$.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₀₆)

1. 解 (1) $|AB| = \sqrt{(-2-6)^2 + (0-0)^2} = 8$;

(2) $|CD| = \sqrt{(0-0)^2 + (-1+4)^2} = 3$;

(3) $|PQ| = \sqrt{(0-6)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{10}$;

(4) $|MN| = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}$.

2. 解 $|AB| = \sqrt{(0-a)^2 + (10+5)^2} = 17$, 解得 $a = \pm 8$.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₀₈)

1. 解 (1) $d = \frac{|3 \times 0 + 2 \times 0 - 26|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 2\sqrt{13};$

(2) 直线 $x = y$ 化为 $x - y = 0$, 则 $d = \frac{|0 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 0.$

2. 解 (1) $d = \frac{|3 \times (-2) + 4 \times 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5};$

(2) $d = \frac{|\sqrt{3} \times 1 + 0 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = 0;$

(3) $d = \frac{|4 \times 1 + 3 \times (-2)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2}{5}.$

◆ 教材习题解答

练习(P₁₀₉)

(1) 解: 在 $2x+3y-8=0$ 上取一点 $(4,0)$, $d = \frac{|2 \times 4 + 3 \times 0 + 18|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 2\sqrt{13}$;

(2) 解: 在 $3x+4y=0$ 上取一点 $(0,0)$, 将 $3x+4y=10$ 化为 $3x+4y-10=0$, 则 $d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$.

习题 3.3(P₁₀₉)

A 组

1. 解: (1) 由 $\begin{cases} 2x-y+7=0, \\ x+y=1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=3. \end{cases}$ $\therefore$ 两直线相交于点 $(-2,3)$.

$$(2) \begin{cases} x-3y-10=0, & \text{①} \\ y=\frac{x+5}{3}, & \text{②} \end{cases}$$

将②化简得 $x-3y+5=0$, ③

①-③得 $-15=0$, 矛盾, 方程组无解, 两直线无交点, 则平行.

(3) 将 $9x-15y+30=0$ 化简得 $3x-5y+10=0$, 因此, 两直线重合.

点评 方程组的解与两直线的公共点构成一一对应的关系.

2. 解: 将 $6x-4y+C=0$ 化为 $3x-2y+\frac{C}{2}=0$.

(1) 当 $A=3, C \neq -2$ 时, 将两式 $Ax-2y-1=0$ 和 $3x-2y+\frac{C}{2}=0$ 相减得 $-1-\frac{C}{2}=0$, 即 $C=-2$ 与 $C \neq -2$ 矛盾, 即方程组

$$\begin{cases} Ax-2y-1=0, \\ 3x-2y+\frac{C}{2}=0 \end{cases} \text{ 无解, 两直线平行.}$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} Ax-2y-1=0, & \text{①} \\ 3x-2y+\frac{C}{2}=0. & \text{②} \end{cases}$$

①-②得 $(A-3)x-1-\frac{C}{2}=0$,当 $A\neq 3$ 时有解, $\therefore A\neq 3$ 时,两直线相交.

(3)由 $Ax-2y-1=0$ 得 $y=\frac{A}{2}x-\frac{1}{2}$, $\therefore k_1=\frac{A}{2}$.由 $6x-4y+C=0$ 得 $y=\frac{3}{2}x+\frac{C}{4}$, $\therefore k_2=\frac{3}{2}$.由 $k_1k_2=-1$ 得 $\frac{3}{4}A=-1$, $\therefore A=-\frac{4}{3}$,即 $A=-\frac{4}{3}$ 时,两直线垂直.

点评 利用方程组的解的情况判断直线的平行、相交,利用 $k_1k_2=-1$ 判断两直线的垂直.

3. 解: (1)
$$\begin{cases} (3+m)x+4y=5-3m, & \text{①} \\ 2x+(5+m)y=8, & \text{②} \end{cases}$$

由②得 $x=\frac{8-(5+m)y}{2}$, ③

将③代入①得 $(3+m)\cdot\frac{8-(5+m)y}{2}+4y=5-3m$.

整理得 $[8-(3+m)(5+m)]y=-14-14m$. ④

当 $8-(3+m)(5+m)\neq 0$ 时,方程④有解,解得 $m\neq -7$ 且 $m\neq -1$.

$\therefore$ 当 $m\neq -7, m\neq -1$ 时, l_1 与 l_2 相交.

(2)当 $m=-7$ 时,代入④得 $0\cdot y=-14\times(1+7)$,矛盾,方程组无解, $l_1\parallel l_2$;

当 $m=-1$ 时,代入④得 $0\cdot y=0$,方程组有无数个解, l_1 与 l_2 重合.

由以上可知,当 $m=-7$ 时, $l_1\parallel l_2$.

点评 由(1)知, $m\neq -7, m\neq -1$ 时, l_1 与 l_2 相交.因此,要使 $l_1\parallel l_2$,只须验证 $m=-7, m=-1$ 时,由 l_1, l_2 组成的方程组是否有解即可.

(3)当 $5+m=0$ 时, $l_1: x-2y+10=0, l_2: x=4$,显然两直线不垂直;当 $5+m\neq 0$

时,由 $2x+(5+m)y=8$ 得 $y=-\frac{2}{5+m}x+\frac{8}{5+m}$, $\therefore k_1=-\frac{2}{5+m}$.由 $(3+m)x+4y=5-3m$ 得 $y=-\frac{3+m}{4}x+\frac{5-3m}{4}$, $\therefore k_2=-\frac{3+m}{4}$.令 $k_1k_2=-1$ 得

$\left(-\frac{2}{5+m}\right)\cdot\left(-\frac{3+m}{4}\right)=-1$,解得 $m=-\frac{13}{3}$. $\therefore m=-\frac{13}{3}$ 时, $l_1\perp l_2$.

点评 由于必须写出 l_2 的斜率,因此要把一般式 $2x+(5+m)y=8$ 化为斜截式

$y=-\frac{2}{5+m}x+\frac{8}{5+m}$,这时,必须对 $5+m$ 进行分类讨论.

4. 证明: 设 l_1 与 l_2 的交点为 $M(x_0, y_0)$,则有 $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$. $\therefore A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0+\lambda\cdot 0=0$,这说明方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示过 l_1 与 l_2 交点的直线.

点评 直线过某点,该点的坐标一定是直线方程的解.

5. 解: (1) $\begin{cases} 2x-3y+10=0, \\ 3x+4y-2=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2. \end{cases}$

$\therefore$ 交点坐标为 $M(-2, 2)$.

由 $3x-2y+4=0$ 得 $k_1=\frac{3}{2}$, 由 $k_1k_2=-1$ 得 $k_2=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 所求直线方程为 $y-2=-\frac{2}{3}(x+2)$, 整理得 $2x+3y-2=0$.

(2) 由 $\begin{cases} 2x+y-8=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$ $\therefore$ 交点坐标为 $M(3, 2)$.

由 $4x-3y-7=0$ 得 $k_1=\frac{4}{3}$, 由 $k_2=k_1$, 得 $k_2=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ 所求直线方程为 $y-2=\frac{4}{3}(x-3)$, 整理得 $4x-3y-6=0$.

点评 利用两直线的平行与垂直, 求出所求直线的斜率.

6. 解: $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$, $|PQ| = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$,

$|MN| = \sqrt{(-4-1)^2 + (0-0)^2} = 5$.

$\therefore |AB| + |PQ| = 2\sqrt{5} = \sqrt{20} < 5$, $\therefore$ 线段 AB, PQ, MN 不能围成一个三角形.

点评 三条线段若能围成一个三角形, 必须满足“任意两边之和大于第三边.”

7. 解: $\because |PQ| = |PM|$, $\therefore \sqrt{(a+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (2-1)^2}$,

解得 $a = -\frac{9}{2}$.

点评 由两点间距离相等, 列出关于 a 的方程, 解方程.

8. 解: (1) 设所求点为 $(x, 0)$, 由题意得 $\sqrt{(x-5)^2 + (0-12)^2} = 13$, 解得 $x=0$, 或 $x=10$, $\therefore$ 所求点的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(10, 0)$.

(2) 设点 P 的坐标为 $(7, y)$, 由题意得 $\sqrt{(7+1)^2 + (y-5)^2} = 10$, 解得 $y=11$, 或 $y=-1$. $\therefore$ 所求点的坐标为 $(7, 11)$ 或 $(7, -1)$.

9. 解: $d = \frac{|12 \times (-5) + 5 \times 7 - 3|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{28}{13}$.

10. 解: 在 $3x-2y-1=0$ 上取一点 $(0, -\frac{1}{2})$,

则 $d = \frac{|3 \times 0 - 2 \times (-\frac{1}{2}) + 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

B组

1. 解: 由 $\begin{cases} 4x+3y=10, \\ 2x-y=10, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=-2. \end{cases}$

$\therefore$ 交点坐标为 $(4, -2)$, 代入 $ax+2y+8=0$ 得 $4a+2 \times (-2)+8=0$,

解得 $a=-1$.

点评 三条直线交于一点, 其中两条直线的交点坐标适合第三条直线的方程.

2. 解: 直线方程 $3x-4y=2$ 化为 $3x-4y-2=0$, 则 $d = \frac{|3a-4 \times 6-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3a-26|}{5}$.

(1) $d=4$ 时, $\frac{|3a-26|}{5}=4$, 解得 $a=\frac{46}{3}$, 或 $a=2$.

(2) $d>4$ 时, $\frac{|3a-26|}{5}>4$, 即 $|3a-26|>20$.

$\therefore 3a-26>20$, 或 $3a-26<-20$, 解得 $a>\frac{46}{3}$, 或 $a<2$.

点评 本题考查点到直线距离公式的灵活应用.

3. 证明: 在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上任取一点 $P(x_1, y_1)$, 则 $Ax_1+By_1=-C_1$, 点 $P(x_1, y_1)$ 到直线 $Ax+By+C_2=0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

点评 (1) 两平行线间的距离, 就是其中一条直线上任取一点, 这个点到另一条直线的距离. (2) 本题结论可以做为公式直接使用. (3) 要注意两平行线的方程 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 中, x 的系数都是 A , y 的系数都是 B .

4. 解: 由题意得 $\frac{|-3a-4+1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|6a+3+1|}{\sqrt{a^2+1}}$,

解得 $a=-\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{7}{9}$.

5. 解: 边 AB 所在直线的方程为 $\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-1}{3-1}$,

整理得 $x-y+1=0$.

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

设点 P 的坐标为 $(a, 0)$, 点 P 到直线 AB 的距离

$$d = \frac{|a-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}, \text{ 这是 } \triangle ABP \text{ 边 } AB \text{ 上的高,}$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{|a+1|}{\sqrt{2}} = 10, \text{ 解得 } a=9, \text{ 或}$$

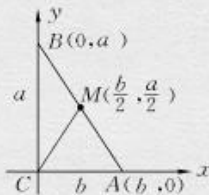


图 3-3-4-3

$$a = -11.$$

∴ 点 P 的坐标为 $(9, 0)$ 或 $(-11, 0)$.

点评 本题综合考查了直线方程、两点间的距离公式、点到直线的距离公式等知识,考查了学生综合运用知识的能力.

6. 证明:如图 3-3-4-3 以两直角边所在的直线为坐标轴建立直角坐标系,设各点的坐标分别为 $A(b, 0)$, $B(0, a)$, $C(0, 0)$, 则由中点坐标公式得,斜边 AB 的中点 M 的坐标为 $(\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$.

$$|MA| = \sqrt{\left(b - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2},$$

$$|MB| = \sqrt{\left(0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2},$$

$$|MC| = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2}.$$

$$\therefore |MA| = |MB| = |MC|,$$

即直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

点评 用代数的方法解决几何问题,是一种非常重要的方法.

7. 证明:如图 3-3-4-4,取边 BC 所在的直线为 x 轴,边 BC 的中点 O 为原点建立直角坐标系,设 $B(-a, 0)$, $O(0, 0)$, $C(a, 0)$ 其中 $a > 0$, $A(m, n)$,

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |AC|^2 &= (\sqrt{(m+a)^2 + n^2})^2 + (\sqrt{(m-a)^2 + n^2})^2 \\ &= (m+a)^2 + n^2 + (m-a)^2 + n^2 = 2(m^2 + a^2 + n^2), \end{aligned}$$

$$|AO|^2 + |OC|^2 = m^2 + n^2 + a^2,$$

$$\therefore |AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AO|^2 + |OC|^2).$$

点评 根据对称性建立直角坐标系比较恰当,在这样的坐标系中,计算量往往最小,有助于提高解题速度.

8. 证明:设四边形 $OABC$ 是正方形, $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$, 设 P 为正方形内一点,坐标为 (x, y) , 如图 3-3-4-5,

$$\begin{aligned} |PO| &= \sqrt{x^2 + y^2}, |PA| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, |PB| = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}, |PC| \\ &= \sqrt{x^2 + (1-y)^2}, |OB| = \sqrt{2}, |AC| = \sqrt{2}. \therefore |PO| + |PB| \geq |BO|, |PA| + |PC| \geq |AC|, \end{aligned}$$

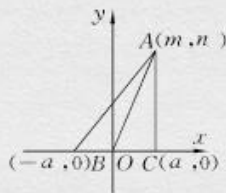


图 3-3-4-4

$$\therefore |PO| + |PB| + |PA| + |PC| \geq |BO| + |AC|,$$

即 $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2+y^2} + \sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $|PO| + |PB| = |BO|$, 且 $|PA| + |PC| = |AC|$ 时, 等号成立, 此时点 P 既在 OB 上, 又在 AC 上, 因此, 点 P 是正方形的中心, 则 $x=y=\frac{1}{2}$.

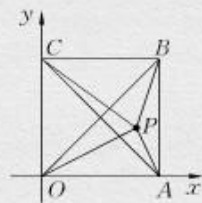


图 3-3-4-5

点评 要善于将代数问题几何化. 将 $\sqrt{x^2+y^2}$ 联想成点 (x,y) 到原点的距离, 将 $\sqrt{x^2+(1-y)^2} = \sqrt{(0-x)^2+(1-y)^2}$ 联想成点 $(0,1)$ 到 (x,y) 的距离, $\sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sqrt{(1-x)^2+(0-y)^2}$ 是点 $(1,0)$ 到 (x,y) 的距离, $\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$ 是点 $(1,1)$ 到 (x,y) 的距离, 由 $0 < x < 1$ 和 $0 < y < 1$ 联想到 (x,y) 是正方形内的任意一点.

9. 解: $\because k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$,

$$\therefore k_{AC} = -\frac{1}{k_{BH}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2,$$

$\therefore$ 直线 AC 的方程为 $y-1 = -2(x-5)$, 整理得 $2x+y-11=0$.

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} 2x+y-11=0, \\ 2x-y-5=0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

$\therefore$ 顶点 C 的坐标为 $(4,3)$.

(2) 设顶点 B 的坐标为 (a,b) , 点 B 在直线 BH 上,

$\therefore a-2b-5=0$ ①, 线段 AB 的中点 M 的坐标为 $(\frac{a+5}{2}, \frac{b+1}{2})$, 点 M 在中线 CM 上,

$$\therefore 2 \cdot \frac{a+5}{2} - \frac{b+1}{2} - 5 = 0, \text{ 整理得 } 2a-b-1=0 \quad \text{②}.$$

由①、②联立, 解方程组得 $a=-1, b=-3$. 即点 B 的坐标为 $(-1, -3)$.

又 $\because C(4,3)$,

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的方程为 } \frac{y-3}{-3-3} = \frac{x-4}{-1-4}, \text{ 整理得 } 6x-5y-9=0.$$

点评 (1) 本题的难点在于画图, 不妨先任意画出一个三角形, 再标出中线 CM 和高 BH . 由高 BH 想到两直线垂直, 斜率之积为 -1 , 从而求出直线 AC 的方程, 则

顶点 C 为直线 AC 和 CM 的交点.

(2) 怎样求直线 BC 的方程? 由第(1)问已经求出顶点 C 的坐标, 再求出直线 BC 的斜率或点 B 的坐标即可, 而直线 BC 的斜率不容易求出, 因此目标指向求点 B 的坐标, 用待定系数法, 问题迎刃而解.

◆ 教材习题解答

复习参考题(P₁₁₄)

A 组

1. 解: 设矩形的第四个顶点为 D , 由题意知, 点 D 的坐标为 $(8, 5)$.

$\therefore$ 对角线 AB 所在直线的方程为 $\frac{x}{8} + \frac{y}{5} = 1$, 即 $5x + 8y - 40 = 0$;

对角线 OD 所在直线的方程为 $y = \frac{5}{8}x$, 即 $5x - 8y = 0$.

点评 本题关键在于确定点 D 的位置, 在草稿纸上画出示意图, 则很快找出解题思路.

2. 解: $k_{AB} = \frac{3-12}{1-(-2)} = -3$, $k_{BC} = \frac{-6-3}{4-1} = -3$, $\therefore k_{AB} = k_{BC}$, $\therefore AB \parallel BC$.

又 $\because$ 直线 AB, BC 都通过点 B , $\therefore A, B, C$ 在同一条直线上.

3. 解: 令 $x=0$, 由 $2x-5y-10=0$ 得 $y=-2$; 令 $y=0$, 则 $x=5$.

$\therefore S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times |-2| \times 5 = 5$.

4. 解: ①当 $a = \frac{1}{4}$ 时, 两直线分别为 $\frac{11}{4}x + 8 = 0$ 和 $-\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}y - 7 = 0$, 两直线不垂

直; ②当 $a = -4$ 时, 两直线分别为 $-10x + 17y + 8 = 0$ 和 $-22x - 7 = 0$, 两直线不

垂直;③当 $a \neq \frac{1}{4}, a \neq -4$ 时, $k_1 = -\frac{3a+2}{1-4a}, k_2 = -\frac{5a-2}{a+4}$,

令 $k_1 k_2 = -1$ 得 $\left(-\frac{3a+2}{1-4a}\right) \cdot \left(-\frac{5a-2}{a+4}\right) = -1$, 解得 $a=0$ 或 $a=1$.

点评 因为要写出两直线的斜率, 所以要先讨论 $1-4a$ 与 $a+4$ 是否等于 0 的情况.

5. 解: (1) $k_1 = \frac{a}{5}, k_2 = \frac{2}{3}, k_1 = k_2$ 得 $\frac{a}{5} = \frac{2}{3}, \therefore a = \frac{10}{3}$;

(2) 当 $a=0$ 时, 两直线的方程分别为 $x-1=0$ 和 $-x-1=0$, 平行;

当 $a \neq 0$ 时, $k_1 = -\frac{1}{2a}, k_2 = \frac{3a-1}{a}$, 令 $k_1 = k_2$, 则 $-\frac{1}{2a} = \frac{3a-1}{a}$, 解得 $a = \frac{1}{6}$.

综上可得, $a=0$ 或 $a = \frac{1}{6}$.

(3) $\because k_1 = -\frac{2}{3}, k_2 = -\frac{2}{3}, \therefore$ 只要两直线不重合, 就平行. 因此, 只须方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=a, \\ 4x+6y-3=0 \end{cases} \text{无解即可, 由 } 4x+6y-3=0 \text{ 得 } 2x+3y-\frac{3}{2}=0, \therefore a \neq \frac{3}{2}.$$

点评 本题讨论了 a 在 x 的系数、 y 的系数、常数项中出现时, 两直线平行的情况, 题型全面, 具有示范性.

6. 解: (1) $k_1 = -4a, k_2 = -(1-a)$, 令 $k_1 k_2 = -1$ 得 $4a(1-a) = -1$,

解得 $a = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

(2) 当 $a=0$ 时, 两直线的方程分别为 $2x=2$ 和 $2y=1$, 互相垂直;

当 $a \neq 0$ 时, $k_1 = -\frac{2}{a}, k_2 = -\frac{a}{2}$, 由 $k_1 k_2 = \left(-\frac{2}{a}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = 1 \neq -1$ 知, $a \neq 0$

时, 两直线不垂直. 综合以上可知, $a=0$.

7. 解: $\begin{cases} x+(1+m)y=2-m, & \text{①} \\ 2mx+4y=-16, & \text{②} \end{cases}$

① $\times 2m$ - ② 得 $[2m(1+m)-4]y = 2m(2-m)+16$, ③

(1) 当 $2m(1+m)-4 \neq 0$, 即 $m \neq -2, m \neq 1$ 时, 方程③有解, 则由①、②组成的方程组有解, 两直线相交.

(2) 当 $2m(1+m)-4=0$, 即 $m=-2$, 或 $m=1$ 时, 分别代入③验证.

$m=-2$ 时, 代入③得 $0 \cdot y=0$, 方程③有无数解, l_1 与 l_2 重合.

$m=1$ 时, 代入③得 $0 \cdot y=18$, 该式不成立, 方程③无解, $l_1 \parallel l_2$.

由以上可知, $m=1$ 时, $l_1 \parallel l_2$.

点评 本题考查了直线的位置关系与方程组的解之间的联系, 要注意对字母的取值情况分类讨论和验证.

$$8. \text{解: } k_{AB} = \frac{5-1}{1-4} = -\frac{4}{3}, k_{BC} = \frac{2-5}{-3-1} = \frac{3}{4},$$

$$k_{CD} = \frac{-2-2}{0-(-3)} = -\frac{4}{3}, k_{AD} = \frac{-2-1}{0-4} = \frac{3}{4},$$

$$\because k_{AB} = k_{CD}, \therefore AB \parallel CD.$$

$$\because k_{BC} = k_{AD}, \therefore BC \parallel AD. \text{由以上可知, 四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形.}$$

$$\text{又 } \because k_{AB} \cdot k_{BC} = -1, \therefore AB \perp BC, \therefore \square ABCD \text{ 是矩形.}$$

$$\text{又 } \because |AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = 5, |BC| = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = 5,$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 是正方形.}$$

点评 判断四边形的形状, 要根据条件, 逐步缩小范围, 直到得出准确的结论.

$$9. \text{解: } k_1 = -2, k_2 = -\frac{a}{4}, \text{ 令 } k_1 k_2 = -1 \text{ 得 } (-2) \times \left(-\frac{a}{4}\right) = -1, \text{ 解得 } a = -2, \text{ 由}$$

$$\begin{cases} 2x+y+2=0, \\ -2x+4y-2=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases} \therefore \text{交点坐标为 } (-1, 0).$$

$$10. \text{解: 在 } ax+8y+11=0 \text{ 上取一点 } \left(0, -\frac{11}{8}\right), \text{ 则}$$

$$d = \frac{\left|3 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{11}{8}\right) - 12\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{2}.$$

点评 直接在 $ax+8y+11=0$ 上取点 $\left(0, -\frac{11}{8}\right)$, 避免了先求 a 的值, 简化了解题步骤, 提高了解题速度.

$$11. \text{解: } k_1 = k_2 = 1, \text{ 设所求直线方程为 } y = x + b, \text{ 即 } x - y + b = 0,$$

$$\text{由课本 } P_{117} \text{ 第 3 题的结论可得 } \frac{|b - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } b = 2, \text{ 或 } b = -6.$$

$$\therefore \text{所求直线的方程为 } x - y + 2 = 0 \text{ 或 } x - y - 6 = 0.$$

$$12. \text{解: 由 } \begin{cases} x+y-1=0, \\ 3x-y+4=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-\frac{3}{4}, \\ y=\frac{7}{4}. \end{cases} \therefore \text{平行四边形的一个顶点为}$$

$A(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$. 设对角线 AM 的另一个端点为 $C(a, b)$, 由中点坐标公式得

$$\begin{cases} 3 = \frac{-\frac{3}{4} + a}{2}, \\ 3 = \frac{\frac{7}{4} + b}{2}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{27}{4}, \\ b = \frac{17}{4}. \end{cases} \therefore \text{顶点 } C(\frac{27}{4}, \frac{17}{4}).$$

由平行四边形的对边平行知 $k_1 = -1, k_2 = 3$.

$\therefore$ 这个平行四边形其他两边所在直线的方程分别为 $y - \frac{17}{4} = -(x - \frac{27}{4})$ 和 $y -$

$\frac{17}{4} = 3(x - \frac{27}{4})$. 整理得 $x + y - 11 = 0, 3x - y - 16 = 0$.

点评 要注意充分利用几何图形的性质解题.

B 组

1. 解: 将 y 换成 $-y$, 则与直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 关于 x 轴对称的直线的方程为 $3x + 4y + 5 = 0$.

$\therefore$ 应选 B.

2. 解: 取四边形 $ABCD$ 的一边所在的直线为 x 轴, 取线段 AB 的中点为原点, 建立直角坐标系, 如图 3-4.

设各顶点的坐标依次为 $A(-a, 0), B(a, 0), C(c, d), D(m, n)$.

$\therefore |AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |DC|^2$,

$\therefore (m+a)^2 + n^2 + (c-a)^2 + d^2 = (2a)^2 + (m-c)^2 +$

$(n-d)^2$, 展开, 整理得 $ma - ca = a^2 - mc - nd$. ①

$$k_{AC} \cdot k_{BD} = \frac{d}{c+a} \cdot \frac{n}{m-a} = \frac{dn}{cm+am-ca-a^2}, \quad ②$$

由①得 $nd = a^2 - mc - ma + ca$, ③

将③代入②得 $k_{AC} \cdot k_{BD} = \frac{a^2 - mc - ma + ca}{cm + am - ca - a^2} = -1$. $\therefore AC \perp BD$.

点评 (1) 首先建立直角坐标系, 将已知条件化简得到①式, 下一步证什么? 对角线 AC 与 BD 已经相交, 还有什么关系? 相等、垂直是我们研究的重点内容, 不妨试试, 在尝试中得到 $AC \perp BD$. (2) 还可以从整理①式入手, 寻找规律. 由①式, 表示横坐标的字母放在等式一边, 表示纵坐标的字母放在等式另一边, 即 $a^2 - mc -$

$ma + ca = nd$, 整理得 $(a-m)(c+a) = nd$, 即 $\frac{d}{c+a} \cdot \frac{n}{m-a} = -1$. $\therefore k_{AC} \cdot k_{BD} = -1$.

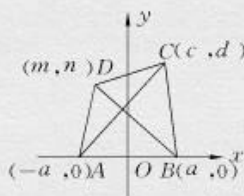


图 3-4

即 $AC \perp BD$.

3. 证明: (1) $\because A \neq 0, B \neq 0, \therefore Ax + By + C = 0$ 可化为 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

$\therefore$ 过点 M_0 , 且平行直线 l 的直线的方程是 $y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0)$,

即 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

(2) 过点 $M_0(x_0, y_0)$, 且垂直于直线 l 的直线的方程是 $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$, 即

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

4. 解: 将 $6x + 4y - 3 = 0$ 化为 $3x + 2y - \frac{3}{2} = 0$, 设所求直线的方程为 $3x + 2y + c = 0$,

$$\text{则 } \frac{|C + \frac{3}{2}|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|C + 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}, \text{ 解得 } C = -\frac{15}{4}. \therefore \text{ 所求直线的方程为 } 3x + 2y - \frac{15}{4} = 0.$$

点评 两平行线的方程可以统一成 $Ax + By + C_1 = 0$, 与 $Ax + By + C_2 = 0$, 它们

的距离为 $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

5. 证明: 设函数 $y = f(x)$ 上的两点为 $(a, f(a)), (b, f(b))$. 由两点式得直线 AB 的方

程为 $\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$, 即 $y = f(a) + \frac{x - a}{b - a}[f(b) - f(a)]$.

在其图像上任取一点 $P(c, f(c)) (c \in [a, b])$, $\because y = f(c)$ 图像近似看做直线,

$\therefore$ 将 P 点坐标代入 AB 方程得 $f(c) \approx y = f(a) + \frac{c - a}{b - a}[f(b) - f(a)]$.

当 $c = a$ 或 $c = b$ 时, 上式仍然成立.

6. 解: 由题意知, 机器人在以 $C(5, -3)$ 为圆心, 以 9 为半径的圆上运动如图 3-5 所示.

直线 AB 的方程为 $\frac{x}{-10} + \frac{y}{12} = 1$, 即 $6x - 5y + 60 = 0$.

$\therefore C$ 到直线 AB 的距离

$$d = \frac{|6 \times 5 - 5 \times (-3) + 60|}{\sqrt{6^2 + (-5)^2}} = \frac{105\sqrt{61}}{61}.$$

$\therefore$ 机器人到直线 AB 的最短距离为 $\frac{105\sqrt{61}}{61} - 9$, 最远距

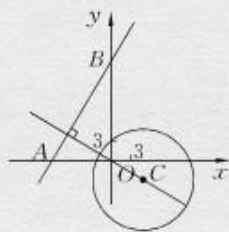


图 3-5

离为 $\frac{105\sqrt{61}}{61} + 9$.

点评 首先根据题意画图,根据图形求解.

7. 证明:在平面直角坐标系中,设 $A(a,b), B(p,q), C(c,d)$, 根据三角形任意两边之和大于第三边知, $|AB| + |CB| \geq |AC|$, 即 $\sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2} + \sqrt{(c-p)^2 + (d-q)^2} \geq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

点评 根据代数式的结构,联想代数式的几何意义,再根据几何图形的性质解题.

8. 解:设夹在 l_1 与 l_2 之间的线段的两端点分别为 A, B , 设点 A 的坐标为 $(a, 2a-2), P(3, 0)$ 为中点, 由中点坐标公式得, B 点坐标为 $(6-a, 2-2a)$.

$\because$ 点 B 在 l_2 上, $\therefore$ 将 B 点坐标代入 l_2 的方程得

$$(6-a) + (2-2a) + 3 = 0, \text{ 解得 } a = \frac{11}{3}.$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$. $\because$ 直线 l 过点 $A(\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$ 和点 $P(3, 0)$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $\frac{y-0}{\frac{16}{3}-0} = \frac{x-3}{\frac{11}{3}-3}$, 整理得 $8x - y - 24 = 0$.

点评 本题还可以设直线 l 的斜率为 k , 则 l 的方程为 $y-0=k(x-3)$, 将 l 与 l_1 , l 与 l_2 的交点坐标求出, 再用中点坐标公式列方程求解, 但这种方法运算量较大. 因此, 用两点式.

9. 证明:取边 AB 所在的直线为 x 轴, AB 的中点为原点, 建立直角坐标系, 如图 3-6. 设各点的坐标为 $A(-a, 0), B(a, 0), C(b, c)$, 由中点坐标公式得中点 D, E 的坐标分别为

$$D\left(\frac{b-a}{2}, \frac{c}{2}\right), E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

$$\because k_{DE} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}} = 0, \therefore DE \parallel AB.$$

$$|DE| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = a,$$

$$\therefore |AB| = 2a = 2|DE|, \text{ 即 } |DE| = \frac{1}{2}|AB|.$$

点评 用代数的方法证明几何问题, 关键在于建立适当的直角坐标系. 在三角形

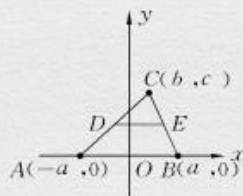


图 3-6

问题中,常取一边所在直线为轴,边的中点为原点建立直角坐标系.

10. 解:如图 3-7,过 M 作边 AD 所在直线 $x+3y-5=0$ 的垂线,垂足为 E .

$$|ME| = \frac{|(-1)+3 \times 0-5|}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

设 BC 的方程为 $x+3y-m=0$, 则 M 到 BC 的距离是 $\frac{|(-1)+3 \times 0-m|}{\sqrt{1+3^2}}.$

$$\text{令 } \frac{|(-1)+3 \times 0-m|}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

解得 $m=-7$ 或 $m=5$ (此时是直线 $x+3y-m=0$.)

所以,直线 BC 的方程为 $x+3y+7=0$

因为直线 AB 与 AD 垂直,所以设它的方程为 $3x-y-n=0$.

则 M 到 AB 的距离是 $\frac{|3 \times (-1)-0-n|}{\sqrt{3^2+1}}.$

$$\text{令 } \frac{|3 \times (-1)-0-n|}{\sqrt{3^2+1}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

解得 $n=3$, 或 $n=-9$.

所以,直线 AB, CD 的方程分别为 $3x-y+9=0, 3x-y-3=0$.

综上,三边所在直线的方程分别为

$$3x-y+9=0, x+3y+1=0, 3x-y-3=0.$$

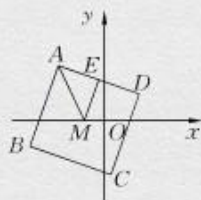


图 3-7

◆ 教材习题解答

练习(P₁₂₀)

1. (1) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$; (2) $(x-8)^2 + (y+3)^2 = 25$.

点评 主要考查圆的标准方程的形式. (2)中 $r = |MC|$, 若已知圆心 $C(a, b)$, 半径 r , 可直接代入圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 求得.

2. 解: 将 M_1, M_2, M_3 的坐标代入圆的方程 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ 可得

(1) $(4, 30-3)^2 + (-5, 72+2)^2 = 15, 528, 4 < 16, \therefore M_1(4, 30, -5, 72)$ 在圆内;

(2) $(5, 70-3)^2 + (1, 08+2)^2 = 16, 776, 4 > 16, \therefore M_2(5, 70, 1, 08)$ 在圆外;

(3) $(3-3)^2 + (-6+2)^2 = 16, \therefore M_3(3, -6)$ 在圆上.

点评 点与圆的位置关系的判断, 就是看点到圆心的距离 d 和半径的关系, 若 $d^2 = r^2$, 则点在圆上; $d^2 > r^2$, 则点在圆外; $d^2 < r^2$, 则点在圆内.

3. 解: 设圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 则圆心 (a, b) , 半径 r ,

$$\text{由题意} \begin{cases} a = \frac{4+6}{2} = 5, \\ b = \frac{9+3}{2} = 6, \\ r = \frac{|P_1 P_2|}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(6-4)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{10}. \end{cases}$$

故所求圆的方程为 $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 10$. 将 $M(6, 9), N(3, 3), Q(5, 3)$ 代入可得

$(6-5)^2 + (9-6)^2 = 10, \therefore M$ 点在圆上;

$(3-5)^2 + (3-6)^2 = 13 > 10, \therefore N$ 点在圆外;

$(5-5)^2 + (3-6)^2 = 9 < 10, \therefore Q$ 点在圆内.

点评 圆心为线段 $P_1 P_2$ 的中点, 半径为 $P_1 P_2$ 长度的一半, 求圆的标准方程, 关键就是确定圆心和半径.

4. 解: 设所求圆的方程是 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$,

$\because A(4, 0), B(0, 3), O(0, 0)$ 都在圆上,

$$\therefore \begin{cases} (4-a)^2 + b^2 = r^2, \\ a^2 + (3-b)^2 = r^2, \\ a^2 + b^2 = r^2. \end{cases} \text{解此方程组, 得} \begin{cases} a = 2, \\ b = \frac{3}{2}, \\ r = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB$ 外接圆的方程是 $(x-2)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

另外: 如图 4-1-1-4,

$\triangle AOB$ 为直角三角形, AB 为斜边, 故外接圆的圆心为 AB 中点 M , 半径为斜边一

半. $\because M$ 的坐标为 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, 半径 $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{5}{2}$,

$\therefore \triangle AOB$ 外接圆方程为 $(x-2)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

点评 求圆的标准方程抓住两个基本要素: 圆心和半径; 充分研究图形, 有助于简化运算.

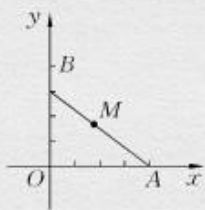


图 4-1-1-4

◆ 教材习题解答

练习(P₁₂₃)

1. (1) 圆心 $(3, 0)$, 半径 3; (2) 圆心 $(0, -b)$, 半径 $|b|$; (3) 圆心 $(a, \sqrt{3}a)$, 半径 $|a|$.

点评 方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 当 $D^2 + E^2 + 4F > 0$ 时, 表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + 4F}$ 为半径的圆.

2. (1) 点 $(0, 0)$; (2) 以 $(1, -2)$ 为圆心, $\sqrt{11}$ 为半径长的圆;

(3) $x^2 + y^2 + 2ax - b^2 = (x+a)^2 + y^2 = a^2 + b^2$, 当 $a=b=0$ 时, 表示点 $(0, 0)$;

当 a, b 不同时为 0 时, 表示以 $(-a, 0)$ 为圆心, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆.

点评 考查圆的一般方程, 注意(3)中分类讨论.

3. 由题意: $A(-3, 0), B(3, 0), C(2, 3), D(-2, 3)$, 设所求方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 因为 A, B, C, D 都在圆上, 所以

$$\begin{cases} 9 - 3D + F = 0, \\ 9 + 3D + F = 0, \\ 4 + 9 + 2D + 3E + F = 0, \\ 4 + 9 - 2D + 3E + F = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} D = 0, \\ E = -\frac{4}{3}, \\ F = -9. \end{cases}$$

故所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y - 9 = 0$, 圆心为 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$,

半径长为 $\sqrt{\frac{4}{9} + 9} = \frac{\sqrt{85}}{3}$.

点评 待定系数法求圆的方程, 由已知条件, 准确得出 A, B, C, D 各点坐标, 通过

解方程组求解.

习题 4.1 (P₁₂₄)

A 组

1. (1) 圆心 $(1, 0)$, 半径长 $\sqrt{6}$; (2) 圆心 $(-1, 2)$, 半径长 3;

(3) 圆心 $(-a, 0)$, 半径长 $|a|$; (4) 圆心 $(0, b)$, 半径长 $\sqrt{3}|b|$.

2. (1) $r = |AC| = \sqrt{(8-5)^2 + (-3-1)^2} = 5$, $\therefore$ 圆的方程 $(x-8)^2 + (y+3)^2 = 25$.

(2) 设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则

$$\begin{cases} 1+25-D+5E+F=0, \\ 25+25+5D+5E+F=0, \\ 36+4+6D-2E+F=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 26-D+5E+F=0, \\ 50+5D+5E+F=0, \\ 40+6D-2E+F=0. \end{cases} \quad \begin{cases} D=-4, \\ E=-2, \\ F=-20. \end{cases}$$

故所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

点评 考查圆的方程的求法, 条件与圆心有关, 用标准方程; 已知三点用一般方程.

3. 解: 设圆心 $C(a, b)$, 半径 r , 则圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

$$\text{由题意} \begin{cases} a-2b-1=0, & \text{①} \\ a^2+b^2=r^2, & \text{②} \\ (a-2)^2+(b-1)^2=r^2. & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{②}-\text{③} \text{ 得 } 4a+2b-5=0. \quad \text{④}$$

$$\text{由①④得} \begin{cases} a=\frac{6}{5}, \\ b=\frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{代入②得 } r^2=\frac{29}{20}.$$

$$\text{故所求圆的方程为 } \left(x-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{29}{20}.$$

4. 解: 设圆心 $C(a, 0)$, 半径 r , 则圆的方程为 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$.

$$\text{由题意} \begin{cases} (-1-a)^2+1=r^2, \\ (1-a)^2+9=r^2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ r^2=10. \end{cases}$$

故所求圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 10$.

5. 证明: $\because A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是圆的一条直径的端点.

$\therefore$ 线段 AB 的中点 $O\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 是圆的圆心.

线段 AB 的长度是圆的直径 $2r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$,

$\therefore$ 半径 $r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$. $\therefore$ 圆的标准方程为

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2,$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2].$$

$$\text{整理得 } x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 + y^2 - yy_1 - yy_2 + y_1y_2 = 0,$$

$$\text{即 } (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0,$$

$$\therefore \text{此圆方程为 } (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

点评 此方程也叫端点圆方程,可直接用来解选择填空.证明过程实质是求圆的方程,确定圆心和半径.

6. 解: 设过 A, B, C 三点圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$\text{则 } \begin{cases} 1 + E + F = 0, \\ 4 + 1 + 2D + E + F = 0, \\ 9 + 16 + 3D + 4E + F = 0. \end{cases}$$

$$D = -2, E = -6, F = 5, \text{故圆的方程为 } x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0.$$

$$\text{将 } D(-1, 2) \text{ 代入上式得 } 1 + 4 + 2 - 12 + 5 = 0,$$

即 D 的坐标满足 A, B, C 三点确定的圆的方程,故 A, B, C, D 四点共圆.

点评 先确定圆,再证明其余的点在圆上.

B组(P₁₂₄)

1. 解: 设另一个端点 C 的坐标 (x, y) , 由题意 $|AC| = |AB|$,

$$\text{即 } \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (5-2)^2}.$$

化简得 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$. 又 $\because$ 当 $y=5$ 时, B 与 C 重合,

故所求轨迹方程为 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10 (y \neq 5)$.

它表示以 $(4, 2)$ 为圆心, 以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆(挖去点 $(3, 5)$).

2. 解: 设 AB 中点 $M(x, y)$, $A(x_0, 0)$, $B(0, y_0)$,

$$\text{则 } x_0^2 + y_0^2 = 4a^2. \text{ 又 } \because \begin{cases} x = \frac{x_0}{2}, \\ y = \frac{y_0}{2}, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_0 = 2x, \\ y_0 = 2y. \end{cases} \quad \text{①}$$

代入①得 $x^2 + y^2 = a^2$, 这就是要求的轨迹方程.

3. 解: 设 M 点坐标为 (x, y) , 由题意知 $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}$.

化简得 $(x+1)^2 + y^2 = 4$. 故 M 点的轨迹方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

点评 求轨迹方程常用方法: ①直接法; ②代入法; ③定义法.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₂₈)

1. 解: 圆心(0,0)到直线 $4x+7y-28=0$ 的距离 $d = \frac{28}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{28}{\sqrt{65}} > 3$.

故不会受台风影响.

2. 解: 设圆 C 的半径为 r , 则 $r = \frac{|-35|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 7$.

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $x^2+y^2=49$.

3. 解: 圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的圆心(1,0), 半径为 1.

$\therefore$ 圆心(1,0)到直线 $3x+4y+2=0$ 的距离 $d = \frac{|3+2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1$.

$\therefore$ 直线与圆相切.

4. 解: 圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 的圆心(0,1), 半径 $\sqrt{5}$, 圆心(0,1)到直线 $l: y=x+6$ 的

距离 $d = \frac{|-1+6|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > \sqrt{5}$.

$\therefore$ 直线与圆相离, 无公共点.

点评 判断直线与圆的位置关系主要是利用几何法, 即圆心到直线的距离 $d=r$ 相切, $d<r$ 相交; $d>r$, 相离.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₃₀)

解: $\odot C_1$ 的标准方程 $(x+1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $\odot C_2$ 的标准方程 $(x+2)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$. $|C_1C_2| = \sqrt{(-2+1)^2+0} = 1$, $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{\sqrt{17}}{2}$. $\therefore \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2} < |C_1C_2| < \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\therefore \odot C_1$ 与 $\odot C_2$ 相交.

点评 判断两圆位置关系, 主要是利用几何法判断.

当 $|C_1C_2| > r_1 + r_2$ 时, 两圆相离; 当 $|C_1C_2| = r_1 + r_2$ 时, 两圆外切; 当 $|C_1C_2| = |r_1 - r_2|$ 时, 两圆内切; 当 $|r_1 - r_2| < |C_1C_2| < r_1 + r_2$ 时, 两圆相交; 当 $|C_1C_2| < |r_1 - r_2|$ 时, 两圆内含.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₃₂)

1. 解: 由圆方程 $(x-3)^2 + y^2 = 9$ 得

圆心为 $(3, 0)$, $r = 3$, 设直线 l 与圆的两个交点为 A, B , 如图

4-2-3-3,

圆心到直线 AB 的距离 $CE = \frac{|6-0-2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$AE = \sqrt{r^2 - CE^2} = \frac{\sqrt{145}}{5}$, 则 $AB = 2AE = \frac{2}{5}\sqrt{145}$.

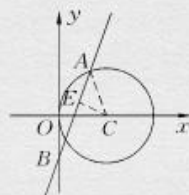


图 4-2-3-3

点评 直线与圆相交求弦长主要是利用垂径定理构造直角三角形 ACE , 利用

$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$ 求解.

2. 解: 如图 4-2-3-4 建立坐标系, 设圆方程为 $x^2 + (y-b)^2 = b^2$, 且过 A, B ,

则 $18.7^2 + (-7.2-b)^2 = b^2$, 得 $b = -27.88$.

$\therefore$ 拱圆方程为 $x^2 + (y+27.88)^2 = 27.88^2$ ($-7.2 \leq y \leq 0$).

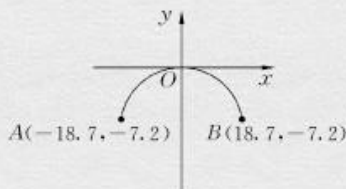


图 4-2-3-4

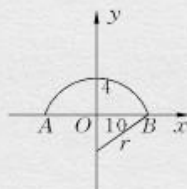


图 4-2-3-5

3. 解: 如图 4-2-3-5, 建立坐标系, 设半径为 r , 则圆心 $(0, 4-r)$, $r^2 = (r-4)^2 + 100$, $r = 14.5$ m, 则圆方程为 $x^2 + (y+10.5)^2 = 14.5^2$.

当 $x = 5$ 时, $y = 3.11$ m. $\because 3 < 3.11$ m, $\therefore$ 能通过.

4. 解: 如图 4-2-3-6, 建立平面直角坐标系 xOy , 设等边

$\triangle ABC$ 边长为 1 个单位, 则 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, C

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $D\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$, $E\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$,

直线 AD 的方程 $y - 3\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$,

直线 BE 的方程 $2\sqrt{3}x - 10y + \sqrt{3} = 0$,

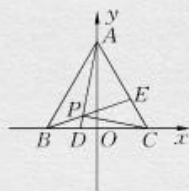


图 4-2-3-6

$\therefore$ 直线 AD 与 BE 的交点 $P\left(-\frac{1}{7}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$, 则 $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)$, $\overrightarrow{CP} = \left(-\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$. $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{9}{98} - \frac{9}{98} = 0$, $\therefore AP \perp PC$.

点评 建立适当的坐标系, 也可利用两直线的位置关系来证明垂直. 本题利用向量法, 简洁、运算量小.

习题 4.2 (P₁₃₂)

A 组

1. 解: 由 $x^2 + y^2 = 100$ 得圆心 $O(0, 0)$, $r = 10$,

则 O 到直线距离为 $d = \frac{|50|}{\sqrt{16+9}} = 10$, $\therefore$ 直线和圆相切.

2. 解: (1) $r = \frac{|3+7 \times 5+2|}{\sqrt{1+49}} = 4\sqrt{2}$, $\therefore$ 圆的方程 $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 32$.

(2) 由题意得圆心 $O(0, 1)$ 或 $(0, 11)$, $r = 5$, 则圆的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 25$ (画图略), 或 $x^2 + (y-11)^2 = 25$.

3. 解: $r = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 3 - 7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{16}{5}$, $\therefore$ 圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{256}{25}$.

4. 解: 由题意设所求圆的方程为 $x^2 + y^2 + 6x - 4 + \lambda(x^2 + y^2 + 6y - 28) = 0$,

即 $(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 6\lambda y - 28\lambda - 4 = 0$.

圆心 $\left(-\frac{3}{1+\lambda}, -\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)$, $\therefore -\frac{3}{1+\lambda} + \frac{3\lambda}{1+\lambda} - 4 = 0$, 即 $-3 + 3\lambda - 4 - 4\lambda = 0$.

解得 $\lambda = -7$, 故所求圆的方程为 $-6x^2 - 6y^2 + 6x - 42y + 28 \times 7 - 4 = 0$,

即 $x^2 + y^2 - x + 7y - 32 = 0$.

点评 本解法用到过两圆 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 交点的圆系方程, 即 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 (\lambda \neq -1)$.

5. 解: 如图 4-2-3-7, 圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 圆

心 $C(1, 2)$, $r = \sqrt{5}$, $CE = \frac{|3-2-6|}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$,

$AE = \sqrt{5 - \frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\therefore AB = 2AE = \sqrt{10}$.

点评 直线与圆相交求弦长问题, 主要是利用直角三角形

ACE , 即 $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$ 求解.

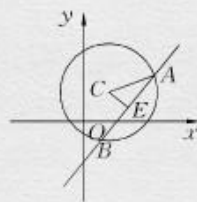


图 4-2-3-7

6. 解: 设圆心 (a, b) , 半径 r , 则圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

$$\text{由题意} \begin{cases} b=3a, & \text{①} \\ |b|=r, & \text{②} \\ \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2-7, & \text{③} \end{cases}$$

将①②代入③得 $2a^2+7=9a^2$, 得 $a=\pm 1$. 当 $a=1$ 时, $b=3, r=3$; 当 $a=-1$ 时, $b=-3, r=3$.

故所求圆的方程为 $(x+1)^2+(y+3)^2=9$ 或 $(x-1)^2+(y-3)^2=9$.

点评 本题主要考查直线与圆相切、相交问题, 设圆心 (a, b) , 半径 r , 则与 x 轴相切 $|b|=r$; 弦长用 $\left(\frac{L}{2}\right)^2+d^2=r^2$ 列出, 要仔细运算, 准确解答.

7. 解: 圆 $C: x^2+y^2-x+2y=0$ 的圆心 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, 半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

设圆心 $C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的点 $C'(x_0, y_0)$, 则

$$\begin{cases} \frac{y_0+1}{x_0-\frac{1}{2}}=-1, \\ \frac{x_0+\frac{1}{2}}{2}-\frac{y_0-1}{2}+1=0, \end{cases} \quad \text{得 } C'\left(-2, \frac{3}{2}\right).$$

故所求对称圆的方程为 $(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

点评 两圆关于一直线对称的条件是圆心关于直线对称, 半径相等.

8. 解: 以 O 为原点, BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,

如图 4-2-3-8, 由题意 $B\left(-\frac{m}{2}, 0\right), C\left(\frac{m}{2}, 0\right)$,

$P(-n, 0), Q(n, 0)$, 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2+y_0^2=\frac{m^2}{4}$.

$$\begin{aligned} |AP|^2+|AQ|^2+|PQ|^2 &= (x_0+n)^2+y_0^2+(x_0-n)^2+y_0^2+(2n)^2 \\ &= 2x_0^2+2y_0^2+6n^2 = \frac{m^2}{2}+6n^2 \text{ (定值)}. \end{aligned}$$

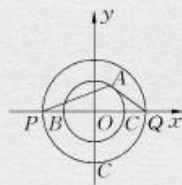


图 4-2-3-8

点评 建立坐标系, 利用坐标法通过坐标运算证明问题, 坐标法是解析几何最基本的方法, 要灵活运用.

9. 解: 由 $\begin{cases} x^2+y^2-4=0, \\ x^2+y^2-4x+4y-12=0 \end{cases}$ 得 $4x-4y+8=0$,

即公共弦所在直线方程为 $x-y+2=0$.

圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心 $(0, 0)$, 半径 2.

设公共弦长为 L , 则由 $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$ 得 $\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 4 - \left(\frac{|2|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$. $\therefore L = 2\sqrt{2}$.

即公共弦长为 $2\sqrt{2}$.

点评 (1) 两圆公共弦所在直线的求法; (2) 直线与圆相交弦长的求法.

10. 解: 设所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - 6x + \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0$,

即 $(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 - 6x - 4\lambda = 0$.

将 $M(2, -2)$ 代入上方程得 $4 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 12 - 4\lambda = 0$, 得 $\lambda = 1$.

故所求圆的方程为 $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4 = 0$, 即 $x^2 + y^2 - 3x - 2 = 0$.

11. 解: 设圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 其中圆心 (a, b) , 半径 r , 则由题意

$$\begin{cases} (3-a)^2 + (1+b)^2 = r^2, & \text{①} \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = r^2, & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b-2}{a-1} = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2}. & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } 4a - 6b - 5 = 0, \quad \text{④}$$

$$\text{由 ③ 得 } a + 2b - 5 = 0, \quad \text{⑤}$$

$$\text{由 ④⑤ 得 } \begin{cases} a = \frac{20}{7}, \\ b = \frac{15}{14}, \end{cases} \text{ 代入 ① 得 } r^2 = \left(3 - \frac{20}{7}\right)^2 + \left(1 + \frac{15}{14}\right)^2 = \frac{845}{196}.$$

故所求圆的方程为 $\left(x - \frac{20}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{14}\right)^2 = \frac{845}{196}$.

B 组 (P₁₃₃)

1. 解: 以 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴建立坐标系, 如图 4 -

2 - 3 - 9, 由题意 $A(0, 0)$, $B(160, 0)$.

设 $C(x_0, y_0)$, $\therefore$ 直线 AC 方程 $y = x$, $\therefore C(x_0, x_0)$.

由 $|BC| = \sqrt{(x_0 - 160)^2 + x_0^2} = 125 + 60 = 185$,

得 $2x_0^2 - 320x_0 + 160^2 - 185^2 = 0$,

$$\therefore x_0 = \frac{320 \pm \sqrt{320^2 - 4 \times 2 \times 25 \times 345}}{4} \approx \frac{320 \pm 414}{4},$$

$$\therefore x_0 = -\frac{47}{2} \text{ (舍去) 或 } x_0 = \frac{367}{2}.$$

$$\therefore C\left(\frac{367}{2}, \frac{367}{2}\right).$$

$$|AC| = \sqrt{\left(\frac{367}{2}\right)^2 + \left(\frac{367}{2}\right)^2} = \frac{367}{\sqrt{2}} \approx 260 \text{ cm}.$$

点评 本题关键是求 C 点坐标, C 在直线 AC 上, 故建系时选 A 为原点, 也可以

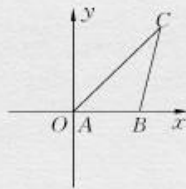


图 4 - 2 - 3 - 9

AB 的中点为原点,读者自己试试看.

2. 解: 设 $P(x_0, y_0)$ 则 $x_0^2 + y_0^2 = 4$, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = (x_0 + 2)^2 + (y_0 + 2)^2 + (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 6)^2 + (x_0 - 4)^2 + (y_0 + 2)^2 = 3x_0^2 + 3y_0^2 - 4y_0 + 68 = 80 - 4y_0$.

$\because -2 \leq y_0 \leq 2, \therefore 72 \leq 80 - 4y_0 \leq 88$. 当 $y_0 = -2$ 时,

$x_0 = 0$, 即 $P(0, -2)$ 时, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ 有最大值 88;

当 $y_0 = 2$ 时, $x_0 = 0$, 即 $P(0, 2)$ 时, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ 有最小值 72.

点评 设 P 点坐标 (x_0, y_0) , 则 $-2 \leq y_0 \leq 2$. 将问题转化为代数运算求最值问题, 主要考查转化能力.

3. 解: 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $(0, 0)$, 半径 2.

到直线 $l: y = x + b$ 距离为 1 时, 圆上恰有 3 个点, 则有一个为切点, 此时圆心到 l 的距离为 $2 - 1 = 1$, 所以 $\frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{2}} = 1$, 得 $b = \pm\sqrt{2}$.

当 $b = \pm\sqrt{2}$ 时, 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上恰有 3 个点到直线 $l: y = x + b$ 的距离为 1.

点评 灵活转化, 本题将问题转化为圆心到直线 l 的距离为 1, 从而轻松得解.

4. 解: (1) 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, $k_{AB} = -1$, 直线 AB 的方程 $y - 2 = -(x + 1)$,

即 $x + y - 1 = 0$. 圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的圆心 $(0, 0)$, 半径 $2\sqrt{2}$.

由 $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$ 得 $|AB| = \sqrt{30}$.

(2) 弦 AB 被点 P_0 平分, 则直线 OP 与直线 AB 垂直, $\therefore k_{AB} = -\frac{1}{k_{OP}} = \frac{1}{2}$.

故直线 AB 方程: $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$, 即 $x - 2y + 5 = 0$.

点评 求弦长常用 $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$, 弦 AB 被 P_0 点平分, 则 $OP_0 \perp AB$, 判断并利用垂直关系直接得出.

5. 解: (1) $Q(4, 2)$, $P(-2, -3)$, 圆心 $Q'(1, -\frac{1}{2})$,

半径 $r = \frac{1}{2}|PQ| = \frac{\sqrt{61}}{2}$.

故所求 $\odot O'$ 的方程为 $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{61}{4}$,

如图 4-2-3-10 所示.

(2) 直线 PA, PB 是以 Q 为圆心的圆的切线. $\because A$ 在以 PQ 为直径的圆上, $\therefore PA \perp QA$. 又 QA 为圆 Q 的半径,

$\therefore PA$ 为圆 Q 的切线. 同理 PB 为圆 Q 切线.

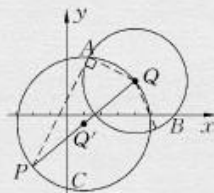


图 4-2-3-10

$$(3) \text{ 由 } \begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9, & ① \\ (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{61}{4}. & ② \end{cases}$$

①-②得直线 AB 的方程为 $6x + 5y - 25 = 0$.

点评 本题综合考查直线与圆, 圆与圆的位置关系, 看似繁琐, 但有规律可循, 注意总结.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₃₆)

1. 解: $A(0, 2, 4), B(1, 0, 5), C(0, 2, 0), D(1, 3, 4)$.

点评 在空间直角坐标系下描出各点的坐标, 熟记坐标轴上和坐标平面上的点的坐标特征.

2. 解: 由 $|OA|=3, |OC|=4, |OD'|=3$, A, C, D' 分别在 x, y, z 轴上, 可得 $C(0, 4, 0), B'(3, 4, 3), P\left(\frac{3}{2}, 2, 3\right)$.

3. 解: 由题意可得点 Q 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

点评 点的各个坐标分量, 就是这个点在坐标轴上的射影, 可以过该点作一长方体得出, 也可以利用中点坐标公式.

◆ 教材习题解答

练习(P₁₃₈)

1. 解: (1) $|AB| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{6}$.

(2) $|AB| = \sqrt{(3-6)^2 + (5-0)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{70}$, 图略.

2. 解: 设 $M(0, 0, z)$, 由题意 $|MA| = |MB|$,

$$\therefore \sqrt{1^2+0+(2-z)^2} = \sqrt{1^2+3^2+(1-z)^2}.$$

解得 $z=-3$, 故所求 M 坐标为 $(0,0,-3)$.

3. 证明: $\because |BA| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$

$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7, |BA| = |BC|, \therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

4. 解: 由题意得 $A(a,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), C'(0,a,a),$

$$\because |AN|=2|CN|, \therefore N \text{ 点坐标为 } \begin{cases} x=\frac{1}{3}a, \\ y=\frac{2}{3}a, \\ z=0, \end{cases} \text{ 即 } N\left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, 0\right).$$

$$\text{又 } |BM|=2|MC'|, \therefore M \text{ 点坐标为 } \begin{cases} x=\frac{1}{3}a, \\ y=a, \\ z=\frac{2}{3}a, \end{cases} \text{ 即 } M\left(\frac{1}{3}a, a, \frac{2}{3}a\right).$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{\left(\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(a-\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a-0\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a, \text{ 即 } MN \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{5}}{3}a.$$

点评 只要知道点的坐标, 就可以求线段的长度, 本题关键是求 M, N 点的坐标分量.

习题 4.3 (P₁₃₈)

A 组

1. (1) $(x, -y, -z), (2) (-x, y, -z), (3) (-x, -y, z), (4) (-x, -y, -z)$

2. 解: 由题意得

$$E\left(0, \frac{a}{2}, a\right), F\left(\frac{a}{2}, 0, a\right), G\left(a, 0, \frac{a}{2}\right), H\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), I\left(\frac{a}{2}, a, 0\right), J\left(0, a, \frac{a}{2}\right).$$

3. 解: 由图示可知, 几何体为正八面体且 $P\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right), F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right),$

$$\therefore \text{几何体的棱长为 } |PF| = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

B 组

1. 证明: $\because A(4,1,9), B(10,-1,6), C(2,4,3),$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(10-2)^2 + (-1-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2},$$

$$\therefore |AB|^2 + |AC|^2 = 7^2 + 7^2 = 98 = |BC|^2,$$

且 $|AB| = |AC| = 7$, $\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

2. 解: 由题意得中心处钛原子的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$,

A 处氧原子的坐标 $(0.31a, 0.31b, 0)$,

$$\therefore \text{故所求的键长 } d = \sqrt{0.19^2 a^2 + 0.19^2 a^2 + 0.25c^2} = \frac{\sqrt{722a^2 + 2500c^2}}{100}.$$

点评 求键长, 利用两点间距离公式, 准确求得两点坐标.

3. 解: 设正方体的棱长为 a , 则 $A(a, a, 0), B(0, 0, a), C(0, a, 0), D(0, a, a)$.

(1) P 为 AB 的中点时, $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, Q 在 CD 上运动,

设 $Q(0, a, z), 0 \leq z \leq a$,

$$\begin{aligned} \therefore |PQ| &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}}, \text{ 当 } z = \frac{a}{2} \text{ 时, } |PQ| \text{ 最小为 } \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{aligned}$$

(2) Q 为 CD 的中点时, $Q\left(0, a, \frac{a}{2}\right)$, P 在对角线 AB 上运动,

P 在 xOy 坐标平面上的射影落在线段 OA 上; 在 yOz 坐标平面上的射影在线段 BC 上.

$\therefore P$ 的坐标 (x, y, z) 满足 $\begin{cases} x=y, \\ z=a-y. \end{cases}$ 设 $P(x, x, a-x)$, 则

$$|PQ| = \sqrt{x^2 + (x-a)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} = \sqrt{3x^2 - 3ax + \frac{5}{4}a^2} = \sqrt{3\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}}$$

当且仅当 $x = \frac{a}{2}$, 即 $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 时, $|PQ|$ 有最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(3) 由(1)(2)可得设 $P(x, x, a-x), Q(0, a, z)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } |PQ| &= \sqrt{x^2 + (x-a)^2 + (a-x-z)^2} = \\ &= \sqrt{3x^2 - [2a + 2(a-z)]x + a^2 + (a-z)^2} = \\ &= \sqrt{3\left(x - \frac{2a-z}{3}\right)^2 - \frac{(2a-z)^2}{3} + (a-z)^2 + a^2} = \\ &= \sqrt{3\left(x - \frac{2a-z}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left[\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right]} = \\ &= \sqrt{3\left(x - \frac{2a-z}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}}. \end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases} x = \frac{2a-z}{3}, \\ z = \frac{a}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ z = \frac{a}{2} \end{cases}$ 时, $|PQ|$ 有最小值, $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

点评 此题主要考查空间两点间的距离公式及配方法求最值, 注意点 P, Q 坐标的准确表示及在(3)中配方法的灵活运用.

◆ 教材习题解答

复习参考题(P₁₄₄)

A 组

1. 解: (1) 设圆方程为 $(x+5)^2 + (y-3)^2 = r^2$,

将 $A(-8, -1)$ 代入得 $r=5$, $\therefore$ 圆方程为 $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$.

(2) 设圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 将 A, B, C 三点代入,

$$\begin{cases} 4+16-2D+4E+F=0, \\ 1+9-D+3E+F=0, \\ 4+36+2D+6E+F=0. \end{cases} \quad \text{解得 } D=0, E=-10, F=20.$$

$\therefore$ 圆方程为 $x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$.

2. 解: $\because$ 圆心在 $3x+y-5=0$ 上, 设圆心为 $(x_0, 5-3x_0)$,

$\therefore$ 圆方程可写为 $(x-x_0)^2 + (y+3x_0-5)^2 = r^2$. 将 $(0,0), (3,1)$ 代入方程得

$$\begin{cases} x_0^2 + (3x_0-5)^2 = r^2, \\ (3-x_0)^2 + (3x_0-4)^2 = r^2. \end{cases} \quad \text{可知上式恒成立, } x_0 \text{ 为任意实数,}$$

此时 $r^2 = x_0^2 + (3x_0-5)^2$, 所求圆的方程为

$$(x-x_0)^2 + (y+3x_0-5)^2 = x_0^2 + (3x_0-5)^2,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2x_0x + (6x_0-10)y = 0 \quad (x_0 \in \mathbf{R}).$$

点评 1, 2 两题均考查待定系数法求圆的方程, 圆的方程有两种形式, 要灵活选择, 注意 2 中直线 $3x+y-5=0$ 恰好为 $(0,0)$ 和 $(3,1)$ 的垂直平分线, 故 x_0 可取任意实数, 故有无数多个圆的方程满足题意.

3. 解: 圆 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ 圆心为 $(3, -2)$, $r_1 = 1$,

$$\text{圆 } x^2 + y^2 - 14x - 2y + 14 = 0 \text{ 圆心为 } (7, 1), r_2 = 6,$$

$\therefore$ 圆心距 $d = 5 = 6 - 1$, $\therefore$ 两圆相内切.

点评 本题主要考查两圆的位置关系, 根据圆心距 d 和两圆半径 r_1, r_2 判断, 由 $d = r_2 - r_1$, 知两圆内切.

4. 解法 1: 联立方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0, \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 40 = 0. \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$

$\therefore (10,0), (-2,4)$ 为两圆交点. $\therefore$ 公共弦长为 $\sqrt{(10+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$.

$$\text{解法 2: 联立方程组 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0, & \text{①} \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 40 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } -4x - 12y + 40 = 0, \text{ 即 } x + 3y - 10 = 0.$$

这是两圆公共弦所在直线方程.

$x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ 圆心 $(5,5)$, 半径 $5\sqrt{2}$, 圆心 $(5,5)$ 到直线③的距离

$$d = \frac{|5+15-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}. \text{ 设弦长为 } L, \text{ 则 } \left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2 = r^2 \text{ 得 } \left(\frac{L}{2}\right)^2 = (5\sqrt{2})^2 -$$

$$(\sqrt{10})^2 = 40, \text{ 得 } L = 4\sqrt{10}, \text{ 即所求弦长为 } 4\sqrt{10}.$$

点评 两圆相交求公共弦长有两种方法: (1) 是求交点利用两点间距离公式;

(2) 是数形结合, 利用 $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$, 注意公共弦所在直线的方程的求解方法.

5. 解: 圆心在直线 $3x+2y=0$ 上, $\therefore$ 圆过点 $(-2,0), (6,0)$, $\therefore$ 圆心在两点的垂直平分线 $x=2$ 上,

得圆心坐标 $(2,-3)$. 设圆方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$,

将 $(-2,0)$ 代入方程得 $r=5$, $\therefore$ 圆方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

点评 考查圆的方程求法, 关键先确定圆心坐标, 注意总结求圆心的方法.

6. 解: 圆 $x^2+y^2=4$, 半径为 2, 圆心 $(0,0)$,

圆 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 半径为 2, 圆心 $(-2,2)$,

两圆心的垂直平分线 $y-1=x+1$, 即 $x-y+2=0$,

故所求直线 l 的方程为 $x-y+2=0$.

点评 考查两圆的对称轴问题, 两圆对称轴是圆心连线的垂直平分线.

7. 解: 圆 $C(x+2)^2+(y-6)^2=1$, 圆心为 $(-2,6)$, 半径为 1. $(-2,6)$ 关于 $3x-4y+5=0$ 对称点为 $(4,-2)$,

$\therefore$ 圆 C 关于 $3x-4y+5=0$ 的对称圆为 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$.

点评 两圆关于一直线对称的充要条件是两圆心关于直线对称且半径相等.

8. 解: 由 $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$,

$(x-2)^2+(y+m)^2=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$,

由 $-m^2+2m+3>0$, 得 $-1<m<3$.

即当 $-1<m<3$ 时, 方程 $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ 表示圆.

当 $m=1$ 时, $r^2=4$, 即 $r=2$ 最大. 此时圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

点评 本题主要考查二元二次方程表示圆的条件及二次函数配方法求最值.

B 组

1. 解: 由题意, 圆心在 $y=-2x$ 上, 可设圆心为 $(x_0, -2x_0)$,

由题意 $\frac{|x_0+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x_0-2)^2+(1-2x_0)^2}$, 解得 $x_0=1$,

$\therefore$ 圆心为 $(1,-2)$, 半径 $r = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

点评 条件与圆心和半径直接有关, 设圆的标准方程, 利用圆与直线相切, 则圆心到直线的距离等于半径, 列式求解.

2. 解: 以 M_1, M_2 所在直线为 x 轴, 线段 M_1M_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系, 则有 $M_1(-a,0), M_2(a,0) (a>0)$, 设点 M 的坐标为 (x,y) .

$\therefore \frac{|MM_1|}{|MM_2|} = m (m>0)$, $\therefore \sqrt{(x+a)^2+y^2} = m \sqrt{(x-a)^2+y^2}$,

化简得 $(1-m^2)x^2 + (1-m^2)y^2 + 2a(1+m^2)x + (1-m^2)a^2 = 0$.

(1) 当 $m=1$ 时, 方程 $x=0$, 图形为 y 轴所在直线;

(2) 当 $m \neq 1$ 时, 方程化为 $\left(x + \frac{1+m^2}{1-m^2}a\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2m^2}{(1-m^2)^2}$, 图形为以 $\left(\frac{1+m^2}{m^2-1}a, 0\right)$ 为圆心, $\frac{2am}{|m^2-1|}$ 为半径的圆.

点评 先建立坐标系设点的坐标, 利用直接法求轨迹方程; 说明轨迹时注意分类讨论.

3. 解: 分象限讨论:

$$(1) x \geq 0, y \geq 0 \text{ 时, } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$(2) x \leq 0, y \geq 0 \text{ 时, } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$(3) x \leq 0, y \leq 0 \text{ 时, } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$(4) x \geq 0, y \leq 0 \text{ 时, } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

围成图形的面积 S 等于四个圆的面积减去 8 个弓形面积,

$$\text{即 } S = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi - 8 \times \frac{\pi - 2}{8} = \pi + 2.$$

点评 分象限讨论准确作图, 注意对称性.

4. 解: 由 $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x^2+y^2=50, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-5, \\ y=-5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=7, \\ y=1. \end{cases}$

(1) 交点 A, B 的坐标为 $A(-5, -5), B(7, 1)$.

(2) 直线 OA 方程为 $x-y=0$,

$$B(7, 1) \text{ 到 } x-y=0 \text{ 的距离 } d = \frac{|7-1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, |OA| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15.$$

(3) 直线 OB 方程 $y = \frac{1}{7}x$, 直线 OA 方程 $y = x$,

$$\text{设夹角为 } \theta, \text{ 则 } \tan \theta = \left| \frac{1 - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7}} \right| = \frac{3}{4}, \therefore \angle AOB = \pi - \theta = \pi - \arctan \frac{3}{4}.$$

$$\text{另解: 设直线 } OA \text{ 与 } OB \text{ 夹角为 } \theta, \text{ 由 (2) 得 } \sin \theta = \frac{d}{|OB|} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \angle AOB = \pi - \theta = \pi - \arcsin \frac{3}{5}.$$

点评 此题考查直线与圆相交问题,用到点到直线距离公式,两直线夹角公式,注意公式的灵活运用.

5. 解: $A(-2, 3)$ 关于 x 轴对称点 $A'(-2, -3)$.

设反射光线所在直线方程为 $y+3=k(x+2)$, 即 $kx-y+2k-3=0$.

$\therefore$ 反射光线与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 相切,

$\therefore$ 圆心 $(3, 2)$ 到直线的距离等于半径, 即 $\frac{|3k-2+2k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$.

$\therefore 25(k-1)^2=1+k^2$, 即 $24k^2-50k+24=0$.

化简得 $12k^2-25k+12=0$, 解得 $k=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$.

故所求直线方程为 $\frac{4}{3}x-y+\frac{8}{3}-3=0$ 或 $\frac{3}{4}x-y+\frac{3}{2}-3=0$.

即 $4x-3y-1=0$ 或 $3x-4y-6=0$.

点评 待定系数法求直线方程,要善于应用一些特殊的方法使运算得以简化,利用对称性将问题转化.

6. (1) 证明: 直线 $l: (2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$.

$2mx+x+my+y-7m-4=0, m(2x+y-7)+x+y-4=0$.

令 $\begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x+y-4=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases} \therefore$ 直线 l 恒过定点 $(3, 1)$.

(2) 过点 $(1, 2), (3, 1)$ 的直线可求得 $l': y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

当 l 与 l' 垂直时弦长最短, $\therefore$ 直线 $l: (2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$,

$y=-\frac{2m+1}{m+1}x+\frac{7m+4}{m+1}=0$,

$\left(-\frac{2m+1}{m+1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)=-1, m=-\frac{3}{4}$. 圆 C , 半径为 5.

$(1, 2)$ 到 $(3, 1)$ 距离为 $\sqrt{5}$, $\therefore$ 最短弦长为 $2\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$.

点评 直线 l 恒过定点, 只要令 m 的系数为零即得, 当直线过圆心时, 截得的弦最长为直径; 由垂径定理, 与相应直径垂直时, 弦长最短. 利用平面几何性质作出判断, 直接求解.