绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2020年深圳市高三年级第二次调研考试

数学（文科）

2020．6

本试卷共6页，23小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损．
2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上．
3．非选择题必须用0.5毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效．
4．作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再作答．
5．考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$A=\{x|-1<x<5\}$，$B=\{1,3,5\}$，则$A\cap B=$

A．$\{1,3\}$　　B．$\{1,3,5\}$　　C．$\{1,2,3,4\}$　　D．$\{0,1,2,3,4,5\}$

2．设$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$，则$|z|=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

3．已知$a=\dfrac{\ln 2}{2}$，$b=\log_2\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，$c=2^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<b<a$　　D．$b<a<c$

4．设x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y\le 1,\\x+y\le 3,\\x\ge 0,\end{cases}$则$z=2x-y$的最大值为

A．-3　　B．1　　C．2　　D．3

5. 已知m，n是两条不同直线，α，β是两个不同平面，有下列四个命题：

①若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$；

②若$n\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$m//n$，则$\alpha//\beta$；

③若$\alpha\perp\beta$，$m//\alpha$，$n\perp\beta$，则$m//n$；

④若$\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$m\perp n$，则$n\perp\beta$.

其中，正确的命题个数是

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

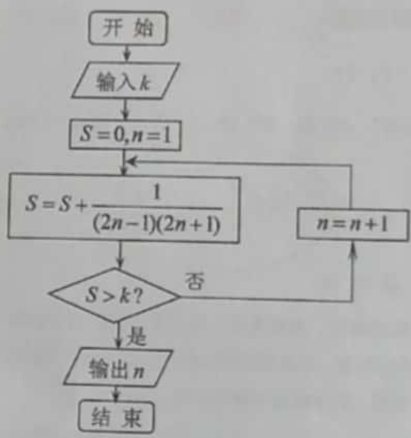
6. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点分别为$F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，$P$为$C$上一点，$PF_1\perp PF_2$，$\tan\angle PF_1F_2=\dfrac{3}{4}$，则$C$的方程为

A. $x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{24}-y^2=1$　　C. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

7. 执行右边的程序框图，如果输入的$k=0.4$，则输出的$n=$

A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 2



（第7题图）

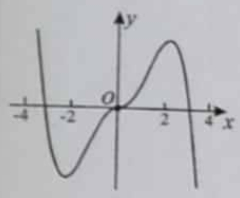
8. 函数$f(x)=x^2-2x+1$的图象与函数$g(x)=3\cos\pi x$的图象所有交点的横坐标之和等于

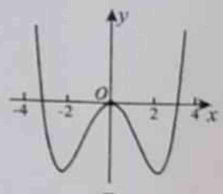
A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

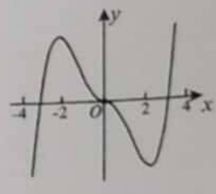
9. 已知正方体的六个面的中心可构成一个正八面体，现从正方体内部任取一个点，则该点落在这个正八面体内部的概率为

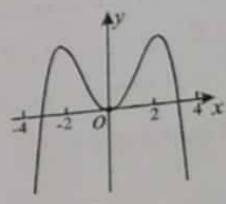
A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{12}$

10. 函数 $f(x)=\dfrac{(1-4^x)\sin x}{2^x}$ 的部分图象大致为

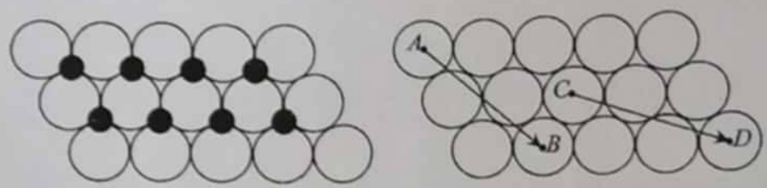

A.


B.


C.


D.

11. 下面左图是某晶体的阴阳离子单层排列的平面示意图.其阴离子排列如下面右图所示，右图中圆的半径均为1，且相邻的圆都相切，A，B，C，D是其中四个圆的圆心，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$


（第 11 题图）

A. 32　　B. 28　　C. 26　　D. 24

12. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=PC=2$，若 $AC=PB$，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$　　C. $\dfrac{16\sqrt{3}}{27}$　　D. $\dfrac{32\sqrt{3}}{27}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2020 年初，湖北成为全国新冠疫情最严重的省份，面临医务人员不足，医疗物资紧缺等诸多困难，全国人民心系湖北，志愿者纷纷驰援．若某医疗团队从甲，乙，丙，丁 4 名医生志愿者中，随机选取 2 名医生赴湖北支援，则甲被选中的概率为________.

14. 在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 ΔABC 的面积为 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}$，$b\sin C=c\sin\dfrac{A+C}{2}$，则角 $C=$________.

15. 《尘劫记》是在元代的《算学启蒙》和明代的《算法统宗》的基础上编撰的一部古典数学著作，其中记载了一个这样的问题：假设每对老鼠每月生子一次，每月生12 只，且雌雄各半．1个月后，有一对老鼠生了12 只小老鼠，一共有14 只；2个月后，每对老鼠各生了12 只小老鼠，一共有98 只．以此类推，假设 n 个月后共有老鼠 a_n 只，则 $a_n=$________.

16. 已知 A，F 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的下顶点和左焦点，过 A 且倾斜角为 $60°$ 的直线 l 分别交 x 轴和椭圆 C 于 M，N 两点，且 N 点的纵坐标为 $\frac{3}{5}b$，若 ΔFMN 的周长为6，则 ΔFAN 的面积为__________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 ～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

(一) 必考题：共 60 分．

17．（本小题满分 12 分）

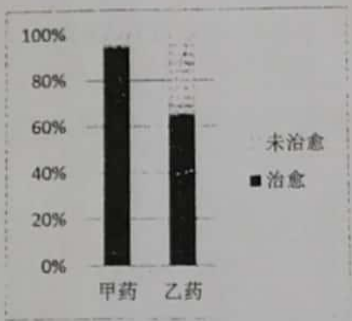
已知各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$，$a_2=32$，$a_3a_4a_5=8$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_n$，$T_n=|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|$，求 T_n．

18．（本小题满分 12 分）

为了比较两种治疗某病毒的药（分别称为甲药，乙药）的疗效，某医疗团队随机地选取了服用甲药的患者和服用乙药的患者进行研究，根据研究的数据，绘制了如下等高条形图．



（1）根据等高条形图，判断哪一种药的治愈率更高，不用说明理由；

（2）为了进一步研究两种药的疗效，从服用甲药的治愈患者和服用乙药的治愈患者中，分别抽取了10名，记录他们的治疗时间（单位：天），统计并绘制了如下茎叶图，从茎叶图看，哪一种药的疗效更好，并说明理由；

甲药						乙药			
	8	6	5	4	0	6	7	8	
2	2	1	0	0	1	1	2	3	7
				2	2	2	3		
					3	1			

（3）标准差 s 除了可以用来刻画一组数据的离散程度外，还可以刻画每个数据偏离平均水平的程度．如果出现了治疗时间在 $(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$ 之外的患者，就认为病毒有可能发生了变异，需要对该患者进行进一步检查，若某服用甲药的患者已经治疗了 26 天还未痊愈，请结合（2）中甲药的数据，判断是否应该对该患者进行进一步检查？

参考公式：$s=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$．

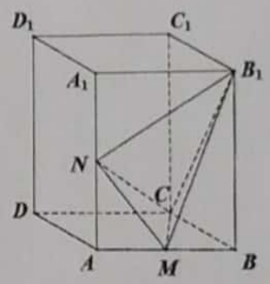
参考数据：$\sqrt{2340}\approx 48$．

19．（本小题满分 12 分）

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60°$，$AA_1=\sqrt{2}AB$，M，N 分别为 AB，AA_1 的中点．

（1）求证：平面 $B_1NC\perp$ 平面 CMN；

（2）若 $AB=2$，求点 N 到平面 B_1MC 的距离．



20．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知定点 $F(1,0)$，点 A 在 x 轴的非正半轴上运动，点 B 在 y 轴上运动，满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，$A$ 关于点 B 的对称点为 M，设点 M 的轨迹为曲线 C．

（1）求 C 的方程；

（2）已知点 $G(3,-2)$，动直线 $x=t(t>3)$ 与 C 相交于 P，Q 两点，求过 G，P，Q 三点的圆在直线 $y=-2$ 上截得的弦长的最小值．

21．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e}-3$，$g(x)=a\ln x-2x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）讨论 $g(x)$ 的单调性；

（2）是否存在实数 a，使不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立？如果存在，求出 a 的值；如果不存在，请说明理由．

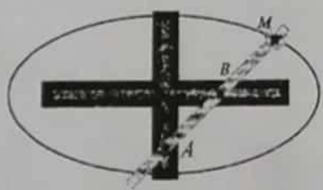
（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 两题中任选一题作答．注意：只能做所选定的题目．如果多做，则按所做的第一题计分，作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑．

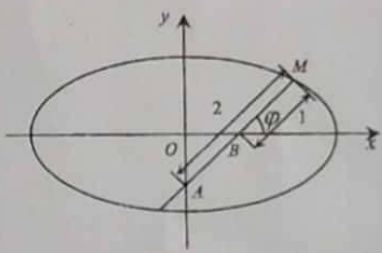
22．（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

椭圆规是用来画椭圆的一种器械，它的构造如图所示，在一个十字形的金属板上有两条互相垂直的导槽，在直尺上有两个固定的滑块 A，B，它们可分别在纵槽和横槽中滑动，在直尺上的点 M 处用套管装上铅笔，使直尺转动一周，则点 M 的轨迹 C 是一个椭圆，其中 $|MA|=2$，$|MB|=1$，如图，以两条导槽的交点为原点 O，横槽所在直线为 x 轴，建立直角坐标系.

（1）将以射线 Bx 为始边，射线 BM 为终边的角 xBM 记为 $\varphi(0\le\varphi<2\pi)$，用 φ 表示点 M 的坐标，并求出 C 的普通方程；

（2）已知过 C 的左焦点 F，且倾斜角为 $\alpha(0\le\alpha<\frac{\pi}{2})$ 的直线 l_1 与 C 交于 D，E 两点，过点 F 且垂直于 l_1 的直线 l_2 与 C 交于 G，H 两点．当 $\frac{1}{|FE|}$，$|GH|$，$\frac{1}{|FD|}$ 依次成等差数列时，求直线 l_2 的普通方程.





（第 22 题图）

23．（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知 a，b，c 为正实数，且满足 $a+b+c=1$．证明：

（1）$|a-\frac{1}{2}|+|b+c-1|\ge\frac{1}{2}$；

（2）$(a^3+b^3+c^3)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\ge 3$.

绝密★启封并使用完毕前　　　　**试题类型：A**

2020年深圳市高三第二次调研考试

文科数学试题答案及评分参考

一、选择题

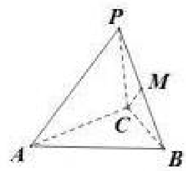
1. A	2. B	3. D	4. D	5. C	6. A
7. C	8. B	9. C	10. B	11. C	12. D

12.【解析】如图，取PB的中点M，连接CM

因为平面$PBC\perp$平面ABC，平面$PBC\cap$平面$ABC=BC$，$AC\subset$平面ABC，$AC\perp BC$，所以$AC\perp$平面PBC.

设点A到平面PBC的距离为$h=AC=2x$；

由于$PC=BC=2$，$PB=2x$（$0<x<2$），M为PB的中点，



所以$CM\perp PB$，$CM=\sqrt{4-x^2}$，

可得$S_{\Delta PBC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{4-x^2}=x\sqrt{4-x^2}$，

$V_{A-PBC}=\dfrac{1}{3}\times(x\sqrt{4-x^2})\times 2x=\dfrac{2x^2\sqrt{4-x^2}}{3}$，

设$t=\sqrt{4-x^2}(0<t<2)$，则$x^2=4-t^2$，所以$V_{A-PBC}=\dfrac{2t(4-t^2)}{3}=\dfrac{8t-2t^3}{3}(0<t<2)$，

关于t求导得$V'(t)=\dfrac{8-6t^2}{3}$，令$V'(t)=0$，解得$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，或$t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$（舍），

由$V(t)$单调性可知，当$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，$(V_{A-PBC})_{最大}=\dfrac{32\sqrt{3}}{27}$.

二、填空题：

13. $\dfrac{1}{2}$　　14. $\dfrac{5}{12}\pi$ 或 $75°$　　15. $2\cdot 7^n$　　16. $\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$

16.解析：由题意得，$A(0,-b)$，$F(-c,0)$，直线MN的方程为$y=\sqrt{3}x-b$，

将$y=\dfrac{3}{5}b$代入椭圆方程解得$x=\dfrac{4}{5}a$，所以$N(\dfrac{4}{5}a,\dfrac{3}{5}b)$，

因为N在直线MN上，所以$\dfrac{3}{5}b=\sqrt{3}\cdot\dfrac{4}{5}a-b$，解得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{1}{2}$.

又$a^2=b^2+c^2$，所以$(\dfrac{2}{\sqrt{3}}b)^2=b^2+c^2$，解得$b=\sqrt{3}c$，

又$M(\dfrac{b}{\sqrt{3}},0)$，所以$M(c,0)$，

所以M为椭圆C的右焦点，所以$|FM|=2c$，

由椭圆的定义可知，$|NF|+|NM|=2a$，

所以$2a+2c=6$，又$a=2c$，所以$c=1$，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，

所以ΔFAN的面积$S=\frac{1}{2}|FM|\cdot[\frac{3}{5}b-(-b)]=c\cdot\frac{8}{5}b=\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 12 分）

已知各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$，$a_2=32$，$a_3a_4a_5=8$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_2 a_n$，$T_n=|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|$，求$T_n$.

【解析】（1）由等比数列通项公式可得$a_2=a_1q=32$……①，　　……………………1 分

又$a_4{}^3=8$可得$a_4=a_1q^3=2$……②，　　……………………3 分

联立①②得$a_1=2^7$，$q=\frac{1}{4}$，或$q=-\frac{1}{4}$（舍），　　……………………5 分

所以$a_n=2^{9-2n}$，$n\in N^*$.　　……………………6 分

（2）由（1）知$b_n=\log_2 a_n=9-2n$，$n\in N^*$，　　……………………7 分

$|b_n|=|9-2n|=\begin{cases}9-2n, & 1\le n\le 4,\\ 2n-9, & n>4.\end{cases}$　　……………………8 分

当$1\le n\le 4$时，$T_n=\frac{7+(9-2n)}{2}\times n=8n-n^2$；　　……………………9 分

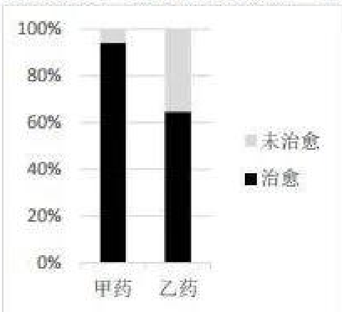
当$n>4$时，$T_n=(7+5+3+1)+\frac{1+(2n-9)}{2}\times(n-4)=n^2-8n+32$，　　……………………11 分

所以$T_n=\begin{cases}8n-n^2, & 1\le n\le 4,\\ n^2-8n+32, & n>4.\end{cases}$　　……………………12 分

【命题意图】考查等比数列的通项公式、等比中项性质、等差数列的前n项和公式、指数化简、分段函数等知识点，考查解方程和分类讨论思想，体现了数学运算的核心素养.

18. （本小题满分 12 分）

为了比较两种治疗某病毒的药（分别称为甲药，乙药）的疗效，某医疗团队随机地选取了服用甲药的患者和服用乙药的患者进行研究，根据研究的数据，绘制了如下等高条形图.



（1）根据等高条形图，判断哪一种药的治愈率更高，不用说明理由；

（2）为了进一步研究两种药的疗效，从服用甲药的治愈患者和服用乙药的治愈患者中，分别抽取了10名，记录他们的治疗时间（单位：天），统计并绘制了如下茎叶图，从茎叶图看，哪一

种药的疗效更好，并说明理由；

甲药						乙药			
	8	6	5	4	0	6	7	8	
2	2	1	0	0	1	1	2	3	7
				2	2	2	3		
					3	1			

（3）标准差s除了可以用来刻画一组数据的离散程度外，还可以刻画每个数据偏离平均水平的程度．如果出现了治疗时间在$(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$之外的患者，就认为病毒有可能发生了变异，需要对该患者进行进一步检查，若某服用甲药的患者已经治疗了26天还未痊愈，请结合（2）中甲药的数据，判断是否应该对该患者进行进一步检查？

参考公式：$s=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$．

参考数据：$\sqrt{2340}\approx 48$．

【解析】（1）甲药的治愈率更高．　　………………2分

（2）甲药的疗效更好．　　………………4分

理由一：从茎叶图可以看出，有$\frac{9}{10}$的叶集中在茎0，1上，而服用乙药患者的治疗时间有$\frac{3}{5}$的叶集中在茎1，2上，还有$\frac{1}{10}$的叶集中在茎3上，所以甲药的疗效更好．

理由二：从茎叶图可以看出，服用甲药患者的治疗时间的中位数为10天，而服用乙药患者的治疗时间的中位数为12.5天，所以甲药的疗效更好．

理由三：从茎叶图可以看出，服用甲药患者的治疗时间的平均值为10天，而服用乙药患者的治疗时间的平均值为15天，所以甲药的疗效更好．　　………………6分

以上给出了三种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分．

（3）由（2）中茎叶图可知，服用甲药患者的治疗时间的平均值和方差分别为

$\bar{x}=\frac{4+5+6+8+10+10+11+12+12+22}{10}=10$，　　………………8分

$s=\sqrt{\frac{36+25+16+4+0+0+1+4+4+144}{10}}=\sqrt{23.4}\approx 4.8$，　　………………10分

则$\bar{x}-3s\approx -4.4$，$\bar{x}+3s\approx 24.4$，而$26>24.4$，

所以应该对患者进行进一步检查．　　………………12分

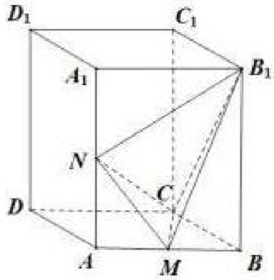
【命题意图】本题主要考查利用等高条形图，茎叶图，平均值，方差等知识，体现了数据分析、数学运算等核心素养．

19．（本小题满分12分）

如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60°$，$AA_1=\sqrt{2}AB$，M，N分别为AB，AA_1的中点．

（1）求证：平面$B_1NC\perp$平面CMN；

（2）若$AB=2$，求点N到平面B_1MC的距离．



【解析】（1）证明：**方法一：**

因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

所以 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $CM\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA_1\perp CM$，

因为底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60°$，M 分别为 AB 的中点

所以 $CM\perp AB$，　…………………1 分

因为 $AA_1\cap AB=A$，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $CM\perp$ 平面 ABB_1A_1，　…………………2 分

因为 $B_1N\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $CM\perp B_1N$；　…………………3 分

因为 M 为 AB 中点，N 为 AA_1 中点，$AA_1=\sqrt{2}AB$，

所以 $\dfrac{A_1B_1}{AN}=\dfrac{AB}{\frac{1}{2}AA_1}=\sqrt{2}$，$\dfrac{A_1N}{AM}=\dfrac{\frac{1}{2}AA_1}{\frac{1}{2}AB}=\sqrt{2}$，

因为 $\angle B_1A_1N=\angle NAM=90°$，

所以 $\Delta A_1B_1N\backsim\Delta ANM$，

所以 $\angle A_1B_1N=\angle ANM$，$\angle A_1NB_1=\angle AMN$，

所以 $\angle A_1NB_1+\angle ANM=90°$，

所以 $B_1N\perp MN$，　…………………4 分

因为 $MN\cap CM=M$，$MN\subset$ 平面 CMN，$CM\subset$ 平面 CMN，

所以 $B_1N\perp$ 平面 CMN，　…………………5 分

因为 $B_1N\subset$ 平面 B_1NC，

所以平面 $B_1NC\perp$ 平面 CMN．　…………………6 分

方法二：假设 $AB=2a(a>0)$，则 $AA_1=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}a$　…………………1 分

因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

所以侧面 ABB_1A_1 为矩形，

因为 M 为 AB 中点，N 为 AA_1 中点，$AA_1=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}a$，

所以 $MN=\sqrt{3}a$，$B_1M=3a$，$B_1N=\sqrt{6}a$，

所以 $B_1M^2=B_1N^2+MN^2$

所以 $B_1N\perp MN$，　…………………2 分

因为底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60°$，$AB=2a$，

所以 $AC=2a$，

所以 $CN=\sqrt{AC^2+AN^2}=\sqrt{6}a$，

因为 $B_1N=\sqrt{A_1B_1^2+A_1N^2}=\sqrt{6}a$，$B_1C=\sqrt{BC^2+B_1B^2}=2\sqrt{3}a$，　…………………3 分

所以 $CN^2+B_1N^2=B_1C^2$，

所以 $B_1N \perp CN$， ……………… 4分

因为 $MN \cap CN = N$， $MN \subset$ 平面 CMN， $CN \subset$ 平面 CMN，

所以 $B_1N \perp$ 平面 CMN， ……………… 5分

因为 $B_1N \subset$ 平面 B_1NC，

所以平面 $B_1NC \perp$ 平面 CMN． ……………… 6分

（2）**方法一：** 因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$， $AB=2$， M， N 分别为 AB， AA_1 的中点，

所以 $AA_1=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$， $MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\sqrt{3}$，

$B_1M=\sqrt{BM^2+B_1B^2}=3$， $B_1C=\sqrt{BC^2+B_1B^2}=2\sqrt{3}$，

$B_1N=\sqrt{A_1B_1^2+A_1N^2}=\sqrt{6}$， ……………… 7分

因为底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC=60°$，

所以 $CM=\sqrt{3}$， $CN=\sqrt{AC^2+AN^2}=\sqrt{6}$． ……………… 8分

由（1）知 $B_1N \perp$ 平面 CMN，设点 B_1 到平面 CMN 的距离为 h_1，则 $h_1=\sqrt{6}$， ……… 9分

因为 $CN^2=MN^2+CM^2$，所以 $S_{\Delta CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，

因此 $V_{B_1-CMN}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta CMN}\times h_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$． ……………… 10分

因为 $B_1M=3$， $B_1C=2\sqrt{3}$， $CM=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\Delta B_1CM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， ……………… 11分

设点 N 到平面 B_1CM 的距离为 h_2，

因为 $V_{B_1-CMN}=V_{N-B_1CM}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta B_1CM}\times h_2$，

所以 $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times h_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

因此 $h_2=\sqrt{2}$． ……………… 12分

方法二： 因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$， $AB=2$， M 为 AB 中点， N 为 AA_1 中点

所以 $AA_1=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$， $MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\sqrt{3}$，

$B_1M=\sqrt{BM^2+B_1B^2}=3$， $B_1C=\sqrt{BC^2+B_1B^2}=2\sqrt{3}$，

$B_1N=\sqrt{A_1B_1^2+A_1N^2}=\sqrt{6}$， ……………… 7分

又因为底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC=60°$，

可得 $CM=\sqrt{3}$， $CN=\sqrt{AC^2+AN^2}=\sqrt{6}$，

易知 $AA_1 \perp CM$， $CM \perp AB$， $AA_1 \cap AB = A$，所以 $CM \perp$ 平面 B_1MN，

设点 C 到平面 B_1MN 的距离为 h_1，则 $h_1=CM=\sqrt{3}$， ……………… 8分

因为 $S_{\Delta B_1MN}=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot B_1N=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以 $V_{C-B_1MN}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta B_1MN}\times h_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，　　………………10 分

因为 $B_1M=3$，$B_1C=2\sqrt{3}$，$CM=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\Delta B_1CM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，　　………………11 分

设点 N 到平面 B_1CM 的距离为 h_2，

因为 $V_{B_1-CMN}=V_{N-B_1CM}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta B_1CM}\times h_2$，

所以 $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times h_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，因此 $h_2=\sqrt{2}$．　　………………12 分

【命题意图】本题主要考查了直棱柱的定义、线面垂直的判定定理、面面垂直的判定定理、等体积法求点到面的距离等知识，重点考查等价转换思想，体现了直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养．

20．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知定点 $F(1,0)$，点 A 在 x 轴的非正半轴上运动，点 B 在 y 轴上运动，满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，$A$ 关于点 B 的对称点为 M，设点 M 的轨迹为曲线 C．

(1) 求 C 的方程；

(2) 已知点 $G(3,-2)$，动直线 $x=t(t>3)$ 与 C 相交于 P，Q 两点，求过 G，P，Q 三点的圆在直线 $y=-2$ 上截得的弦长的最小值．

【解析】(1)　**方法一：**

设 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$M(x,y)$，

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，　　………………1 分

所以 $(-a,b)\cdot(1,-b)=0$，所以 $a=-b^2$，　　………………2 分

又点 B 为 AM 的中点，所以 $\frac{x+a}{2}=0$，$\frac{y}{2}=b$①，　　………………3 分

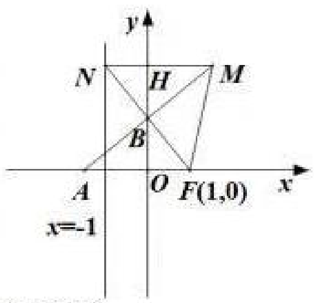
所以 $a=-x$②，　　………………4 分

将①，②式代入 $a=-b^2$，得 $y^2=4x$，　　………………5 分

所以 C 的方程为 $y^2=4x$．　　………………6 分

方法二：如图，过 M 作 y 轴的垂线，垂足为 H，交 FB 的延长线于点 N，连接 MF，

因为 B 为 AM 的中点，所以 B 也为 OH 的中点,易证 $Rt\Delta BOF\cong Rt\Delta BHN$，　　………………1 分



所以 $|OF|=|HN|$，$|BF|=|BN|$，

易证 $Rt\Delta MBF\cong Rt\Delta MBN$，　　………………2 分

所以 $|MF|=|MN|$，　　………………3 分

由 $|HN|=1$ 得点 N 在直线 $x=-1$ 上，　　…………4 分

$|MN|$即为点M到直线$x=-1$的距离，…………5 分

由抛物线的定义可知，点M的轨迹是以$F(1,0)$为焦点，$x=-1$为准线的抛物线，所以曲线C的方程为$y^2=4x$．…………6 分

（2）方法一：由（1）可知，抛物线C的方程为$y^2=4x$，令$x=t$，得$y=\pm 2\sqrt{t}$，

设$P(t,2\sqrt{t})$，$Q(t,-2\sqrt{t})$，…………7 分

由于点P，Q关于x轴对称，所以过G，P，Q三点的圆E的圆心在x轴上，

设$E(m,0)$，由$|EG|=|EP|$得，$\sqrt{(m-3)^2+(0+2)^2}=\sqrt{(m-t)^2+(0-2\sqrt{t})^2}$，

化简并整理得$m=\dfrac{t^2+4t-13}{2t-6}$．…………8 分

圆E的方程为$(x-m)^2+y^2=(m-3)^2+4$，

令$y=-2$，解得$x_1=2m-3$，或$x_2=3$，…………9 分

所以圆E在直线$y=-2$上截得的弦长为

$|x_1-x_2|=|2m-3-3|=\left|\dfrac{t^2+4t-13}{t-3}-6\right|=\left|\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}\right|$，…………10 分

又因为$t-3>0$，且$t^2-2t+5>0$，所以$\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}>0$，

所以$|x_1-x_2|=\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}=\dfrac{(t-3)^2+4(t-3)+8}{t-3}=(t-3)+\dfrac{8}{t-3}+4$

$\geq 2\sqrt{(t-3)\cdot\dfrac{8}{t-3}}+4=4\sqrt{2}+4$，…………11 分

当且仅当$t-3=\dfrac{8}{t-3}$，即$t=3+2\sqrt{2}$，$t=3-2\sqrt{2}$(舍去)时取等号．

所以当$t=3+2\sqrt{2}$时，圆E在直线$y=-2$上截得的弦长的最小值为$4\sqrt{2}+4$．…………12 分

方法二：同**方法一**得到$m=\dfrac{t^2+4t-13}{2t-6}$，…………8 分

设圆E在直线$y=-2$上截得的弦为GG'，由垂径定理得$\left(\dfrac{|GG'|}{2}\right)^2+4=|EG|^2$，…………9 分

所以$|GG'|=2|m-3|=2\left|\dfrac{t^2+4t-13}{2t-6}-3\right|=\left|\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}\right|$．…………10 分

又因为$t-3>0$，且$t^2-2t+5>0$，所以$\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}>0$，

所以$\left|\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}\right|=\dfrac{t^2-2t+5}{t-3}=\dfrac{(t-3)^2+4(t-3)+8}{t-3}=(t-3)+\dfrac{8}{t-3}+4$

$\geq 2\sqrt{(t-3)\cdot\frac{8}{t-3}}+4=4\sqrt{2}+4$， ……………………11 分

当且仅当$t-3=\frac{8}{t-3}$，即$t=3+2\sqrt{2}$，$t=3-2\sqrt{2}$(舍去)时取等号.

所以当$t=3+2\sqrt{2}$时，圆E在直线$y=-2$上截得的弦长的最小值为$4\sqrt{2}+4$.…………12 分

【命题意图】本题以直线、抛物线和圆为载体，借助动圆在定直线截得的弦长为背景，利用函数与方程思想和基本不等式解决几何问题，主要考察抛物线的定义、几何性质、直线与抛物线的位置关系和圆的弦长及最值问题等知识，考查学生的逻辑推理，数学运算等数学核心素养及思辨能力.

21．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\frac{xe^x}{e}-3$，$g(x)=a\ln x-2x\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论$g(x)$的单调性；

（2）是否存在实数a，使不等式$f(x)\geq g(x)$恒成立?如果存在,求出a的值；如果不存在，请说明理由.

【解析】（1）$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$g'(x)=\frac{a}{x}-2=\frac{a-2x}{x}$， ……………………1 分

（i）当$a\leq 0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数； ……………………2 分

（ii）当$a>0$时，当$x\in(0,\frac{a}{2})$，$g'(x)>0$，函数$g(x)$此时为增函数；

当$x\in(\frac{a}{2},+\infty)$，$g'(x)<0$，函数$g(x)$此时为减函数， ……………………3 分

综上可知：当$a\leq 0$时，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$a>0$时，函数$g(x)$在$(0,\frac{a}{2})$上为增函数，在$(\frac{a}{2},+\infty)$上为减函数. ……………………4 分

（2）**方法一：**要使不等式$f(x)\geq g(x)$恒成立，即不等式$\frac{xe^x}{e}-3\geq a\ln x-2x$恒成立，

即不等式$xe^x-ae\ln x+2ex-3e\geq 0$恒成立，

令$u(x)=xe^{x}-ae\ln x+2ex-3e$，又$u(1)=0$ ……………………5 分

所以当且仅当$u(x)$的最小值为$u(1)$，才能保证$u(x)>0$式成立，

又$u'(x)=(x+1)e^{x}-\dfrac{ae}{x}+2e=\dfrac{(x^{2}+x)e^{x}+2ex-ae}{x}$，

再令$v(x)=(x^{2}+x)e^{x}+2ex-ae$，$v(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数， ……………………6 分

所以当$a\le 0$时，$u'(x)>0$，此时$u(x)$为单调递增函数，则$u\left(\dfrac{1}{2}\right)<u(1)=0$，不满足题意； ……………………7 分

当$0<a<4$时，

此时$v(1)=(4-a)e>0$，此时$v(0)=-ae<0$，也就是说存在一个$x_0\in(0,1)$使$v(x_0)=0$，

当$x\in(0,x_0)$时，$v(x)<0$，

即$u'(x)<0$，此时$u(x)$为减函数；

当$x\in(x_0,1)$时，$v(x)>0$，即$u'(x)>0$，此时$u(x)$为增函数；

则$u(x_0)<u(1)=0$.

所以不满足题意. ……………………9 分

同理可得：当$a>4$时也不满足.（因为$v(1)=(4-a)e<0$，$v(a)>0$，所以存在$x_0\in(1,a)$使$v(x_0)=0$，当$x\in(1,x_0)$时，$v(x)<0$，

即$u'(x)<0$，此时$u(x)$为减函数；

当$x\in(x_0,a)$时，$v(x)>0$，即$u'(x)>0$，此时$u(x)$为增函数；

则$u(x_0)<u(1)=0$，

所以不满足题意. ……………………10 分

当$a=4$时，此时$v(1)=0$，又$v(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

所以当$x\in(0,1)$时，$v(x)<0$，即$u'(x)<0$，所以此时$u(x)$在$(0,1)$上为减函数；

当$x\in(1,+\infty)$时，$v(x)>0$，即$u'(x)>0$，所以此时$u(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数；

所以此时$u(x)$的最小值为$u(1)=0$，满足题意， ……………………11 分

综上所述，可知 $a=4$． ………………12 分

方法二：

$f(x)\ge g(x)$，即 $\frac{xe^x}{e}-3\ge a\ln x-2x$，

等价于 $xe^x-ae\ln x+2ex-3e\ge 0$ ①，

设 $u(x)=xe^x-ae\ln x+2ex-3e$，又 $u(1)=0$， ………………5 分

所以要使不等式成立，必须 $u(x)$ 在 $x=1$ 取得极小值，

又 $u'(x)=(x+1)e^x-\frac{ae}{x}+2e=\frac{(x^2+x)e^x+2ex-ae}{x}$，

所以 $u'(1)=0$，解得 $a=4$． ………………7 分

检验当 $a=4$ 时，$u'(x)=\frac{(x^2+x)e^x+2ex-4e}{x}$，

设 $v(x)=(x^2+x)e^x+2ex-4e$，又 $v(1)=0$， ………………8 分

显然 $v(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数， ………………9 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$v(x)<0$，即 $u'(x)<0$，

所以此时 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数； ………………10 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$v(x)>0$，即 $u'(x)>0$，

所以此时 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数； ………………11 分

所以此时 $u(x)$ 的最小值为 $u(1)=0$，满足题意．

综上所述，可知 $a=4$． ………………12 分

【命题意图】本题旨在考查导数在研究函数时的应用，用导数研究函数的单调性，以不等式恒成立为载体，综合考查学生的分类讨论、化归转化、数形结合等数学思想，考查了学生的数学运算、逻辑推理等数学核心素养．

请考生在第 22、23 两题中任选一题做答．注意：只能做所选定的题目．如果多做，则按所做的第一题计分，做答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑．

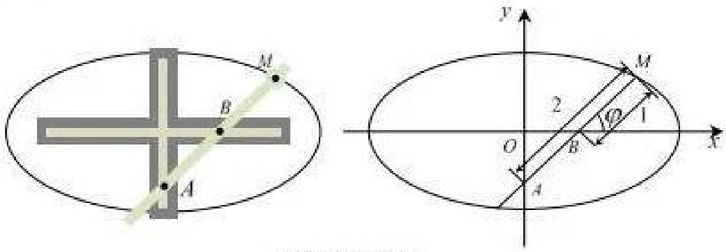
22．（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

椭圆规是用来画椭圆的一种器械，它的构造如图所示，在一个十字形的金属板上有两条互相

垂直的导槽，在直尺上有两个固定的滑块A，B，它们可分别在纵槽和横槽中滑动，在直尺上的点M处用套管装上铅笔，使直尺转动一周，则点M的轨迹C是一个椭圆，其中$|MA|=2$，$|MB|=1$，如图，以两条导槽的交点为原点O，横槽所在直线为x轴，建立直角坐标系.

（1）将以射线Bx为始边，射线BM为终边的角xBM记为$\varphi(0\le\varphi<2\pi)$，用$\varphi$表示点$M$的坐标，并求出$C$的普通方程；

（2）已知过C的左焦点F，且倾斜角为$\alpha(0\le\alpha<\frac{\pi}{2})$的直线$l_1$与$C$交于$D$，$E$两点，过点$F$且垂直于$l_1$的直线$l_2$与$C$交于$G$，$H$两点．当$\frac{1}{|FE|}$，$|GH|$，$\frac{1}{|FD|}$依次成等差数列时，求直线$l_2$的普通方程.



（第 22 题图）

【解析】（1）设$M(x,y)$，由题可知$x=2\cos\varphi$，$y=\sin\varphi$，所以$M(2\cos\varphi,\sin\varphi)$，…2 分

因为$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$，所以$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，所以$C$的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．　………4 分

（2）因为l_1的倾斜角为$\alpha(0\le\alpha<\frac{\pi}{2})$，$l_1\perp l_2$，所以$l_2$的倾斜角$\alpha+\frac{\pi}{2}$，

由题意，易知$F(-\sqrt{3},0)$，可设直线l_1：$\begin{cases}x=-\sqrt{3}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），　…………5 分

将$\begin{cases}x=-\sqrt{3}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得$(1+3\sin^2\alpha)t^2-2\sqrt{3}t\cos\alpha-1=0$，

易知$\Delta=12\cos^2\alpha+4(1+3\sin^2\alpha)=16>0$，

设D，E对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1+t_2=\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$，$t_1t_2=-\frac{1}{1+3\sin^2\alpha}$，

所以$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{4}{1+3\sin^2\alpha}$，

由参数的几何意义得，$\frac{1}{|FE|}+\frac{1}{|FD|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}|=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=4$，　……………7 分

设G，H对应的参数分别为t_3，t_4，同理，对于直线l_2，将α换为$\alpha+\frac{\pi}{2}$，

即得到，$|GH|=|t_3-t_4|=\sqrt{(t_3+t_4)^2-4t_3t_4}=\frac{4}{1+3\cos^2\alpha}$， ………………9分

因为$\frac{1}{|FE|}$，$|GH|$，$\frac{1}{|FD|}$成等差数列，所以$\frac{1}{|FE|}+\frac{1}{|FD|}=2|GH|$，

所以$|GH|=\frac{4}{1+3\cos^2\alpha}=2$，所以$\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$，易得$\tan\alpha=\sqrt{2}$，所以$l_2$的斜率为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线l_2的普通方程为$x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$． ………………10分

【命题意图】本题主要考查椭圆的参数方程，直线参数方程中参数的几何意义，考查数学运算、逻辑推理等核心素养．考查学生的化归与转化能力．

23．（本小题满分10分）选修4—5：不等式选讲

已知a，b，c为正实数，且满足$a+b+c=1$．证明：

（1）$|a-\frac{1}{2}|+|b+c-1|\geq\frac{1}{2}$；

（2）$(a^3+b^3+c^3)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\geq 3$．

【解析】（1）证明：因为a，b，c为正实数，且$a+b+c=1$，

所以 $b+c-1=-a<0$， ………………2分

所以$|a-\frac{1}{2}|+|b+c-1|=|a-\frac{1}{2}|+|-a|\geq|(a-\frac{1}{2})+(-a)|=\frac{1}{2}$，

当且仅当$(a-\frac{1}{2})(-a)\geq 0$时，又$a$为正实数，

所以当$0\leq a\leq\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以$|a-\frac{1}{2}|+|b+c-1|\geq\frac{1}{2}$． ………………4分

（2）$(a^3+b^3+c^3)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\geq 3abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$ ………………6分

$=\frac{3}{2}(\frac{2bc}{a}+\frac{2ac}{b}+\frac{2ab}{c})=\frac{3}{2}[a(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+b(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+c(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})]$ ………………8分

$\geq\frac{3}{2}(2a\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2b\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2c\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}})$

$=3(a+b+c)=3$，（当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$时，等号成立）

$\therefore(a^3+b^3+c^3)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\geq 3$． ………………10分

方法二：

因为$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$， ……………………5 分

所以要证$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3$成立，

只需证$(a^2+b^2+c^2)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3$成立， ……………………6 分

即证$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$成立

又$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq(1+1+1)^2=9$， ……………………7 分

即证$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$，

即证$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geq 1$， ……………………8 分

又$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=1$， ……………………9 分

当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$时，等号成立. 命题得证. ……………………10 分

【命题意图】本题以绝对值不等式和均值不等式的证明为载体，考查学生的运算能力，转化化归思想及数学抽象，逻辑推理等数学核心素养.