

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出四个选项中, 只有一项符合题目要求。

1. 若 $z = 1 + i$, 满足 $|z^2 - 2z| =$

A. 0

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

答案: D

解析: $\because z = 1 + i$

$$\begin{aligned}\therefore |z^2 - 2z| &= |(1+i)^2 - 2(1+i)| = |1+2i+i^2-2-2i| \\ &= |-2| = 2\end{aligned}$$

2. 若集合 $A = \{x \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, $B = \{x \mid 2x + a \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$, 则 $a =$

A. -4

B. -2

C. 2

D. 4

答案: B

解析: 由题意得, 集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, 集合 $B = \{x \mid x \leq -\frac{a}{2}\}$

$$\because A \cap B = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

$$\therefore -\frac{a}{2} = 1$$

$$\therefore a = -2$$

3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



答案：C

解析：设地面正方形的边长为 a ，顶点到底面的距离为 $PO = H$ ，侧面的高为 h

$$\text{则 } S_{\text{侧}} = \frac{1}{2}ah = H^2$$

$$\text{在 } Rt\triangle POE \text{ 中, } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$$

$$\text{联立方程可得: } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ah = h^2$$

$$\text{等式两边同时除以 } a^2 \text{ 可得: } \frac{1}{4} + \frac{h}{2a} = \frac{h^2}{a^2}$$

$$\text{令 } t = \frac{h}{a}, \quad 4t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

4. 已知 A 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p =$

A. 2

B. 3

C. 6

D. 9

答案：C

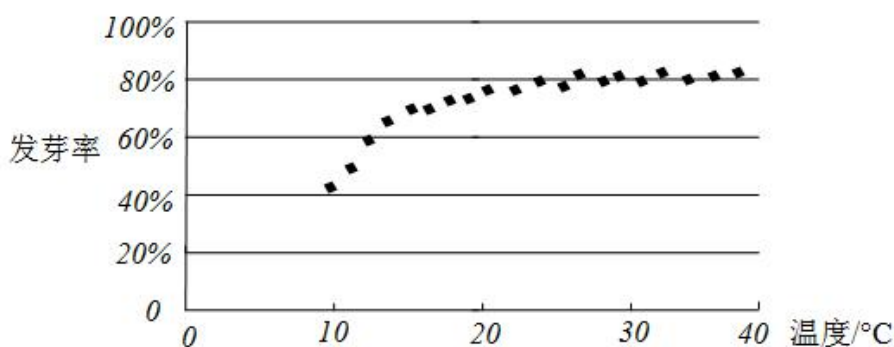
解析：由抛物线的定义得：设抛物线的焦点 F ，过点 A 作抛物线的准线的垂足 $AD = AF$ ，作 y 轴的垂足为 E

$$AF = AD = AE + DE, \quad AE = 9$$

$$\therefore \frac{p}{2} = DE = 12 - 9 = 3$$

$$\therefore p = 6$$

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在 10°C 至 40°C 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是

- A. $y = a + bx$ B. $y = a + bx^2$ C. $y = a + be^x$ D. $y = a + b \ln x$

答案：D

解析：由图像可得，类对数型函数更贴合曲线。

6. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

- A. $y = -2x - 1$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = 2x - 3$ D. $y = 2x + 1$

答案：B

解析： $\because f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$\therefore f'(1) = 4 - 6 = -2$$

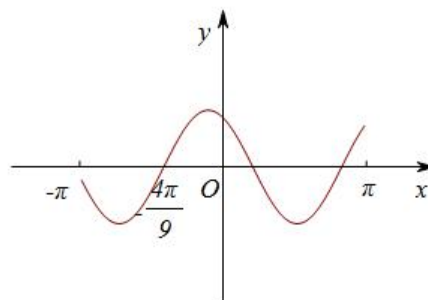
$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$y - (-1) = -2(x - 1)$$

$$\therefore y = -2x + 1$$

7. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为

- A. $\frac{10\pi}{9}$ B. $\frac{7\pi}{6}$
C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$



答案：C

解析: $y = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 过点 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$

$$\therefore -\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{3}{2} - \frac{9k}{2}$$

当 $k=0$ 时, $\omega = \frac{3}{2}$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

8. $(x + \frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

A. 5

B. 10

C. 15

D. 20

答案: C

解析: $(x + \frac{y^2}{x})(x+y)^5 = x(x+y)^5 + \frac{y^2}{x}(x+y)^5$

从而 x^3y^3 的系数为 $C_5^2 + C_5^4 = 10 + 5 = 15$

9. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$, 则 $\sin \alpha =$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

答案: A

解析: $3(2\cos^2 \alpha - 1) - 8\cos \alpha - 5 = 0$

$$3\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 4 = 0$$

$$(\cos \alpha - 2)(3\cos \alpha + 2) = 0$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3} \text{ 或 } \cos \alpha = 2 \text{ (舍)}$$

$$\therefore \alpha \in (0, \pi), \therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

10. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 若 $\odot O_1$ 面积为 4π ,

$AB = BC = AC = OO_1$, 则球 O 的表面积为

- A. 64π B. 48π C. 36π D. 32π

答案: A

解析: 由题意可知 $\triangle ABC$ 的半径为 2, 故 $OO_1 = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = 4 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

所以外接球的半径为 $R = \sqrt{OO_1^2 + 2^2} = 4$, 因此表面积为 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$

11. 已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作

$\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为

- A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

答案: D

解析: 圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

$$|PM| \cdot |AB| = 2S_{PAMB} = 4S_{\triangle PAM} = 4 \times \left(\frac{|PA| \cdot |AM|}{2} \right) = 4|PA| = 4\sqrt{|PM|^2 - 4}.$$

故当 $|PM|$ 最小时, $|PA|$ 最小, 此时直线 PM 的方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$.

联立直线 l 的方程可得 $P(-1, 0)$, 利用切点弦结论可得 AB 方程为 $-2(x-1) - (y-1) = 4$, 化简即

可得 $2x + y + 1 = 0$

12. 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

答案: B

解析: 由条件变形可得 $2^a + \log_2 a = 2^{2b} + \log_2 b$,

显然 $a > b$.

又 $\log_2 a - \log_2 b = 2^{2b} - 2^a > 0$,

故 $2^{2b} > 2^a$,

所以 $2b > a$.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ x - y - 1 \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + 7y$ 的最大值为_____.

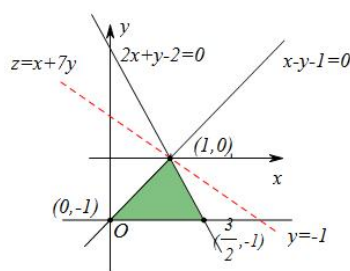
答案：1

解析：

将目标函数化为 $y = -\frac{1}{7}x + \frac{z}{7}$,

在平面直角坐标系中，作出可行域，易知当直线经

过 $(1, 0)$ 时，截距最大，此时 $z = 1$.



14. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ _____.

答案： $\sqrt{3}$

解析：将条件两边平方可得 $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1$ ，即 $2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，所以 $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$

$$\text{故 } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

15. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点， A 为 C 的右顶点， B 为 C 上的点，且 BF

垂直与 x 轴，若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为_____.

答案：2

解析：由题意可知 $k_{AB} = \frac{\frac{b^2}{a} - 0}{c - a} = \frac{b^2}{ac - a^2} = 3$.

$$\text{即 } c^2 - a^2 = 3ac - 3a^2$$

$$2a^2 - 3ac + c^2 = 0$$

$$e^2 - 3e + 2 = 0$$

解得 $e = 2$ 或 $e = 1$ (舍去)。

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中, $AC = 1$, $AB = AD = \sqrt{3}$, $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $\angle CAE = 30^\circ$, 则 $\cos \angle FCB =$ _____.

答案: $-\frac{1}{4}$

解析:

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

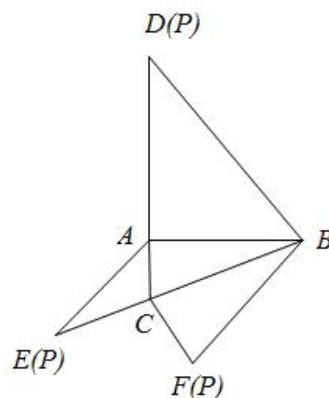
$$\text{同理, } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{在 } \triangle ACE \text{ 中, } CE = \sqrt{AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AP \cdot \cos 30^\circ}$$

$$= CE = \sqrt{1 + 3 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\text{展开图中 } \triangle FCB \text{ 中, } CF = 1, BC = 2, BF = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \angle FCB = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{4}$$



三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题, 每个考生都必须作答。第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共60分。

17. (12分)

设 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1 = 1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和。

解析:

(1) 记 $\{a_n\}$ 公比为 q , 则: $q \neq 1$.

依题, 有: $2a_1 = a_2 + a_3$

$$\therefore 2a_1 = a_1q + a_1q^2$$

$$\therefore a_1 \neq 0$$

$$\therefore q^2 + q - 2 = 0$$

$$\therefore q = -2 \text{ 或 } q = 1$$

$$\therefore q \neq 1$$

$$\therefore q = -2$$

(2) 由 (1) 知: $q = -2$

若: $a_1 = 1$, 则: $a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$

$$\therefore na_n = n \cdot (-2)^{n-1}$$

记 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 依题, 有:

$$T_n = 1 \cdot (-2)^0 + 2 \cdot (-2)^1 + 3 \cdot (-2)^2 + \dots + (n-1) \cdot (-2)^{n-2} + n \cdot (-2)^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore -2T_n = 1 \cdot (-2)^1 + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2)^3 + \dots + (n-1) \cdot (-2)^{n-1} + n \cdot (-2)^n \dots \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得:

$$\begin{aligned} 3T_n &= 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^2 + \dots + 1 \cdot (-2)^{n-1} - n \cdot (-2)^n \\ &= \frac{1 \cdot [1 - (-2)^n]}{1 - (-2)} - n \cdot (-2)^n \\ &= \frac{1 - (-2)^n}{3} - n \cdot (-2)^n \\ &= \frac{1 - (3n+1) \cdot (-2)^n}{3} \end{aligned}$$

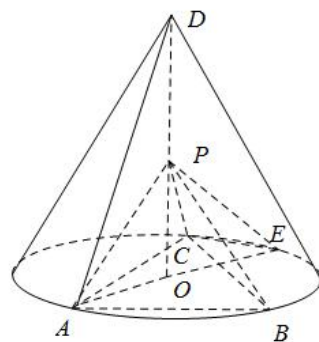
18. (12分)

如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, AE 为底面直径, $AE = AD$, $\triangle ABC$ 是底面的内接

正三角形, P 为 DO 上一点, $PO = \frac{\sqrt{6}}{6} DO$.

(1) 证明: $PA \perp$ 平面 PBC ;

(2) 求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.



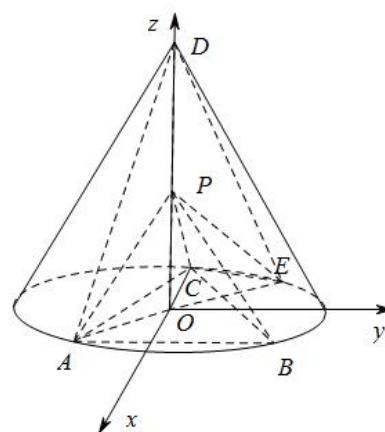
解析:

(1)如图所示, 建立空间直角坐标系, 设底面半径为 a .

则

$$A\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), B\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), C(-a, 0, 0), E\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$$

由 $\triangle ADE$ 为等边三角形可得 $DO = \sqrt{3}a$, 故 $P(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$



$$\text{所以 } \overrightarrow{CP} = (a, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}a), \overrightarrow{BP} = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a), \overrightarrow{AP} = (-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a).$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$$

故 $AP \perp$ 平面 BCP

(2)设平面 BCP 与平面 PCE 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\frac{a}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}a}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}a}{2}z_1 = 0 \\ ax_1 + \frac{\sqrt{2}a}{2}z_1 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \vec{n}_1 = (-1, \sqrt{3}, \sqrt{2})$$

$$\text{同理可得 } \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, 1, \sqrt{6})$$

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

由图可知二面角 $B-PC-E$ 为锐角, 故其余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19. (12分)

甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩下的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束。

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空，设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$ 。

- (1) 求甲连胜四场的概率；
- (2) 求需要进行第五场比赛的概率；
- (3) 求丙最终获胜的概率。

解析：

(1) 甲连胜四场只能是前四场全胜： $P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ ；

(2) 先考虑四场结束比赛的情况，

甲四连胜： $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

乙四连胜： $P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

丙三连胜： $P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\therefore$ 需要进行第五场比赛的概率为： $P = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ ；

(3) 丙最终获胜，可能四场内获胜，也可能五场内获胜；

四场内获胜： $\bigcirc \checkmark \checkmark \checkmark \quad P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

五场内获胜： $\bigcirc \checkmark \checkmark \times \checkmark \quad P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$\bigcirc \checkmark \times \bigcirc \checkmark \quad P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\bigcirc \times \bigcirc \checkmark \checkmark \quad P_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

其中， $\checkmark$ ：胜 $\times$ ：负 $\bigcirc$ ：轮空；所以丙最终获胜的概率 $P = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$ 。

20. (12分)

已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$. P

为直线 $x = 6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D .

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解析:

(1) 依题: $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $G(0, 1)$ 则: $\overrightarrow{AG} = (a, 1), \overrightarrow{GB} = (a, -1)$

$$\because \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8, \therefore a^2 - 1 = 8, \therefore a^2 = 9 \therefore E \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

(2) 由题意可设 $P(6, t)$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 由 (1) 得 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$.

$$\text{故直线 } AP \text{ 的方程可设为 } y = \frac{t}{9}(x+3), \text{ 联立直线 } AP \text{ 和椭圆方程 } \begin{cases} y = \frac{t}{9}(x+3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{化简得 } (9+t^2)x^2 + 6t^2x + 9t^2 - 81 = 0, \text{ 由韦达定理有 } -3x_1 = \frac{9t^2 - 81}{(9+t^2)}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1 = \frac{27-3t^2}{(9+t^2)} \\ y_1 = \frac{t}{9}(x_1+3) = \frac{6t}{(9+t^2)} \end{cases} \therefore \text{故 } C\left(\frac{27-3t^2}{9+t^2}, \frac{6t}{9+t^2}\right)$$

$$\text{同理, 直线 } BP \text{ 的方程可设为 } y = \frac{t}{3}(x-3), \text{ 联立直线 } BP \text{ 和椭圆方程 } \begin{cases} y = \frac{t}{3}(x-3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{化简得 } (1+t^2)x^2 - 6t^2x + 9t^2 - 9 = 0,$$

$$\text{由韦达定理有 } 3x_2 = \frac{9t^2 - 9}{(1+t^2)}, \text{ 即 } \begin{cases} x_2 = \frac{3t^2 - 3}{(1+t^2)} \\ y_2 = \frac{t}{3}(x_2 - 3) = \frac{-2t}{(1+t^2)} \end{cases}, \text{ 故 } D\left(\frac{3t^2 - 3}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}\right)$$

故直线 CD 的斜率 $k_{CD} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4t}{-3(t^2 - 3)}$

直线 CD 方程为 $y + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4t}{-3(t^2 - 3)}(x - \frac{3t^2 - 3}{1+t^2})$, 即 $y = \frac{2t}{(t^2 - 3)}(-\frac{2x}{3} + 1)$

故直线 CD 恒过点 $(\frac{3}{2}, 0)$

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 的取值范围.

解析:

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x + x^2 - x$.

$f'(x) = e^x + 2x - 1$, 令 $g(x) = e^x + 2x - 1$,

则 $g'(x) = e^x + 2 > 0$, 从而 $g(x)$ 在 R 上是增函数.

也即 $f'(x)$ 在 R 上是增函数. 再由 $f'(0) = 0$,

知 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒小于 0, $(0, +\infty)$ 上恒大于 0.

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 即 $x \geq 0$ 时, $e^x + ax^2 - x \geq \frac{x^3}{2} + 1$ 恒成立.

即 $e^x - 1 - x - \frac{x^3}{2} \geq -ax^2 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ 恒成立.

当 $x=0$ 时, 显然成立. 当 $x \neq 0$ 时, 可得 $\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \geq -a \quad \forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

令 $h(x) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } h'(x) &= \frac{(x-2)e^x}{x^3} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(x-2)e^x - x^3 + 2x + 4}{2x^3} \\ &= \frac{2(x-2)(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})}{2x^3} \end{aligned}$$

$$\text{令 } m(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, \text{ 则 } m'(x) = e^x - x - 1.$$

再令 $F(x) = e^x - x - 1$, 则 $F'(x) = e^x - 1$, 恒大于 0.

从而 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. $\therefore F(x) > F(0) = 0$.

即 $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数. $\therefore m(x) > m(0) = 0$.

令 $h'(x) > 0$ 得 $x > 2$, 令 $h'(x) < 0$ 得 $0 < x < 2$.

从而 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $x = 2$ 处取极小值

$$h(2) = \frac{e^2 - 7}{4}.$$

$$\therefore -a \leq \frac{e^2 - 7}{4}, \text{ 从而, } a \text{ 的取值范围是 } a \in [\frac{7 - e^2}{4}, +\infty).$$

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^k t, \\ y = \sin^k t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为

$$4\rho \cos \theta - 16\rho \sin \theta + 3 = 0.$$

(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

解析：

(1) 由题意知，当 $k=1$ 时，所以曲线 C_1 参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ (t 为参数)

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 1$ ，故曲线 C_1 是以原点为圆心，1 为半径的单位圆。

(2) 当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ①；

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $4x - 16y + 3 = 0$ ②；

联立 ①-② $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases}$ (消 x 得) $144y^2 - 232y + 49 = 0$ ；

解得 $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{49}{36}$ (舍去)

所以 $x_1 = 4y_1 - \frac{3}{4} = 4 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ；

所以曲线 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 。

23. [选修4-5：不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$ 。

(1) 画出 $y = f(x)$ 的图像；

(2) 求不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集。

解析：

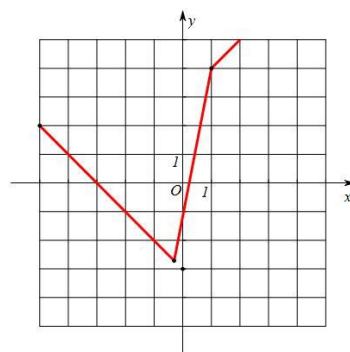
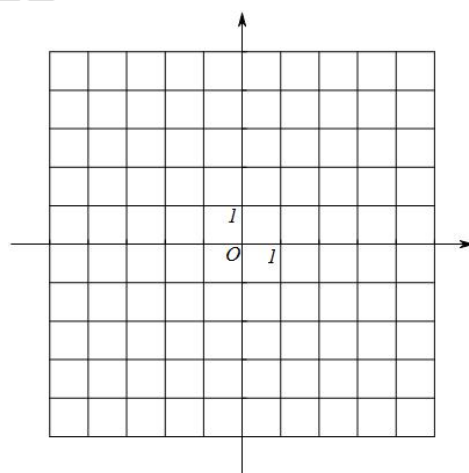
(1)

当 $x < -\frac{1}{3}$ 时， $f(x) = -(3x+1) + 2(x-1) = -x-3$ ；

当 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = (3x+1) + 2(x-1) = 5x-1$ ；

当 $x > 1$ 时， $f(x) = (3x+1) - 2(x-1) = x+3$ 。

故 $f(x)$ 的图象如右图所示



(2) 由 (1) 知, $f(x+1) = \begin{cases} -x-4, & x > -\frac{4}{3} \\ 5x+4, & -\frac{4}{3} \leq x \leq 0 \\ x+4, & x > 0 \end{cases}$, 在图中作出其图像

可以解得 $f(x+1)$ 与 $f(x)$ 的交点为 $(-\frac{7}{6}, -\frac{11}{6})$, 所以原不等式解集为 $(-\infty, -\frac{7}{6})$

