

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{-4, 1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-4, 1\}$ B. $\{1, 5\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 3\}$

答案：D

解析：集合 A 的解集 $(x+1)(x-4) < 0$, 即 $-1 < x < 4$, $A \cap B = \{1, 3\}$

2. 若 $z = 1 + 2i + i^3$, 则 $|z| =$

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

答案：C

解析： $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$

3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
 B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
 C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
 D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



答案：C

解析：设地面正方形的边长为 a , 顶点到底面的距离为 $PO = H$, 侧面的高为 h

则 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2}ah = H^2$

在 $Rt\triangle POE$ 中, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$

联立方程可得: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ah = h^2$

等式两边同时除以 a^2 可得: $\frac{1}{4} + \frac{h}{2a} = \frac{h^2}{a^2}$

令 $t = \frac{h}{a}$, $4t^2 - 2t - 1 = 0$

$\therefore t = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

4. 设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 在 O, A, B, C, D 中任取 3 点, 则取到的 3 点共线的概率为

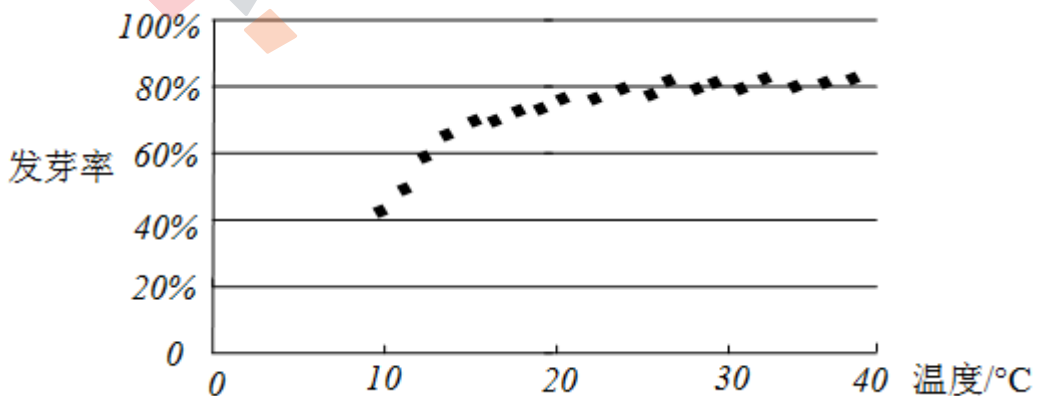
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

答案: A

解析: 5 个点取 3 个点, 列举出来有 10 种, 符合题意有 2 条, $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的关系, 在 20 个不同的

温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图:



由此散点图, 在 10°C 至 40°C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是

- A. $y = a + bx$ B. $y = a + bx^2$ C. $y = a + be^x$ D. $y = a + b \ln x$

答案: D

解析: 由图像可得, 类对数型函数更贴合曲线.

6. 已知圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$, 过点 (1, 2) 的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为

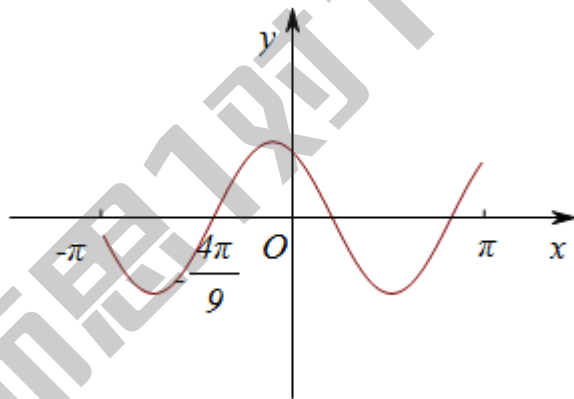
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案: B

解析: $(x-3)^2 + y^2 = 9$, 圆心 (3, 0) 到点 (1, 2) 点距离是 $2\sqrt{2}$, 半径是 3, 因此弦长的最小值为 2.

7. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为

- A. $\frac{10\pi}{9}$
 B. $\frac{7\pi}{6}$
 C. $\frac{4\pi}{3}$
 D. $\frac{3\pi}{2}$



答案: C

解析: $y = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 过点 $(-\frac{4\pi}{9}, 0)$

$$\therefore -\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{3}{2} - \frac{9k}{2}$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } \omega = \frac{3}{2}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

8. 设 $a \log_3 4 = 2$, 则 $4^{-a} =$

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

答案：B

解析：由题意得 $\log_3 4 = \frac{2}{a}$, $3^{\frac{2}{a}} = 4$, $4^{-a} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

9. 执行右面的程序框图，则输出的 $n =$

- A. 17
- B. 19
- C. 21
- D. 23

答案：C

解析：

当时 $n=1$, $S=0$, 输入 $S=1$, $n=1+2=3$;

当时 $n=3$, $S=1$, 输入 $S=1+3$, $n=3+2=5$;

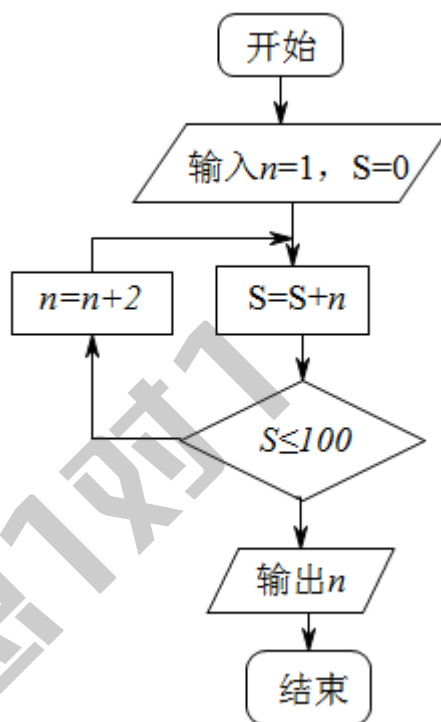
当时 $n=5$, $S=4$, 输入 $S=1+3+5$, $n=5+2=7$;

由此可见，输入的为 n 等差数列 $2t-1 (t \in \mathbb{N}^*)$;

为该数列的前项和为

当 $t=10$ 时, $n=19, S=100$

即当 $n=21$ 时, $S > 100$



10. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_2 + a_3 + a_4 = 2$, 则 $a_6 + a_7 + a_8 =$

- A. 12
- B. 24
- C. 30
- D. 32

答案：D

解析：因为 $\frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3} = q = 2$, 同理可知: $a_6 + a_7 + a_8 = (a_1 + a_2 + a_3)q^5 = 32$

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在 C 上且 $|OP| = 2$, 则 $\triangle PF_1F_2$

的面积为

- A. $\frac{7}{2}$
- B. 3
- C. $\frac{5}{2}$
- D. 2

答案: B

解析:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 可得: } y_p = \pm \frac{3}{2}$$

故
$$S_{\Delta PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_p| = 3$$

12. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 若 $\odot O_1$ 的面积为 4π ,

$AB = BC = AC = OO_1$, 则球 O 的表面积为

- A. 64π B. 48π C. 36π D. 32π

答案: A

解析:

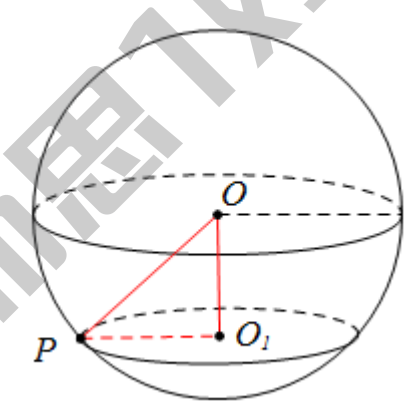
在圆 O_1 中, $S_1 = \pi r^2 = 4\pi, r = 2$

$O_1A = 2, \therefore AB = BC = AC = OO_1 = 2\sqrt{3}$

在 $\triangle OO_1P$ 中, $OO_1 = 2\sqrt{3}, O_1P = r = 2$

故球 O 半径 $R = OP = 4$

\therefore 表面积 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$



二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

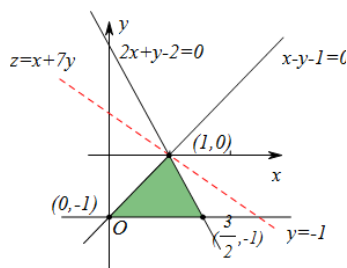
13. 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0, \\ x - y - 1 \geq 0, \\ y + 1 \geq 0, \end{cases}$$
 则 $z = x + 7y$ 的最大值为_____.

答案: 1

解析:

将目标函数化为 $y = -\frac{1}{7}x + \frac{z}{7}$,

在平面直角坐标系中, 作出可行域, 易知当直线经过 $(1,0)$ 时, 截距最大, 此时 $z = 1$.



14. 设向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (m+1, 2m-4)$, 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$ _____.

答案: 5

解析: 由题意 $m+1+(-1)(2m-4) = m+1-2m+4 = 0$, $m = 5$

15. 曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为 _____.

答案: $y = 2x$

解析: $y = \ln x + x + 1$

$y' = \frac{1}{x} + 1 = 2$, $x = 1$, 点为 $(1, 2)$, 斜率为 2, 所以直线方程 $y = 2x$

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1$, 前 16 项和为 540, 则 $a_1 =$ _____.

答案: 7

解析:

依题意: $a_1 + a_2 + \dots + a_{16} = 540$, 当 $n = 2k$ 时,

$a_{2k+2} + a_{2k} = 6k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 当 $n = 2k - 1$ 时, $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 6k - 4$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

从而:
$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 5 \\ a_6 + a_8 = 17 \\ a_{10} + a_{12} = 29 \\ a_{14} + a_{16} = 41 \end{cases}, \text{ 从而 } a_2 + a_4 + \dots + a_{16} = 92,$$

进一步可得 $a_1 + a_3 + \dots + a_{15} = 448$.

$$\text{再由: } \begin{cases} a_3 - a_1 = 2 \\ a_5 - a_3 = 8 \\ a_7 - a_5 = 14 \\ a_9 - a_7 = 20 \\ a_{11} - a_9 = 26 \\ a_{13} - a_{11} = 32 \\ a_{15} - a_{13} = 38 \end{cases}, \text{ 通过累加可得:}$$

$$\begin{aligned} & a_1 + a_3 + \dots + a_{15} \\ &= a_1 + (a_1 + 2) + (a_1 + 10) + (a_1 + 24) + (a_1 + 44) + (a_1 + 70) + (a_1 + 102) + (a_1 + 140) \\ &= 8a_1 + 392 = 448, \text{ 从而 } a_1 = 7. \end{aligned}$$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题:共60分。

17. (12分)

某厂接受了一项加工业务，加工出来的产品（单位：件）按标准分为A，B，C，D四个等级，加工业务约定：对于A级品、B级品、C级品，厂家每件分别收取加工费90元，50元，20元；对于D级品，厂家每件要赔偿原料损失费50元。该厂有甲、乙两个分厂可承接加工业务。甲分厂加工成本费为25元/件，乙分厂加工成本费为20元/件。厂家为决定由哪个分厂承接加工业务，在两个分厂各试加工了100件这种产品，并统计了这些产品的等级，整理如下：

甲分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	40	20	20	20

乙分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	28	17	34	21

(1) 分别估计甲、乙两分厂加工出来的一件产品为A级品的概率；

(2) 分别求甲、乙两分厂加工出来的100件产品的平均利润，以平均利润为依据，厂家应选哪个分厂承接加工业务？

解 (1) 由题意知：

$$\text{甲厂加工一件产品为 A 级品的概率为 } \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$\text{乙厂加工一件产品为 A 级品的概率为 } \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

(2) 设甲厂的平均利润为 \bar{x} ，乙厂的平均利润为 \bar{y} ；

$$\therefore \bar{x} = \frac{40 \times 90 + 50 \times 20 + 20 \times 20 - 50 \times 20 - 25 \times 100}{100} = 15;$$

$$\bar{y} = \frac{28 \times 90 + 17 \times 50 + 34 \times 20 - 21 \times 50 - 20 \times 100}{100} = 10;$$

$$\therefore 15 > 10$$

\therefore 选择甲厂承接加工业务.

18. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $B = 150^\circ$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}c, b = 2\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin A + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 C .

解 (1) 由题意知: $a = \sqrt{3}c, b = 2\sqrt{7}, B = 150^\circ$

$$\therefore \text{由余弦定理知: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\sqrt{3}c)^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4c^2 - 28}{2ac}$$

$$\therefore \text{化简得 } 4c^2 - 28 = 2ac \cdot \cos B = -\sqrt{3}ac \quad \textcircled{1}$$

又 $\therefore a = \sqrt{3}c$ 代入 $\textcircled{1}$ 解得 $c = 2$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$(2) \therefore \sin A + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}, A = \pi - (B + C)$$

$$\therefore \sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C)$$

$$\therefore \sin(B + C) + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin(C + 150^\circ) + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin C + \frac{1}{2} \cos C + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{化简得 } \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\because B = 150^\circ, \therefore 0 < C < \frac{\pi}{6}, \therefore \frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$$

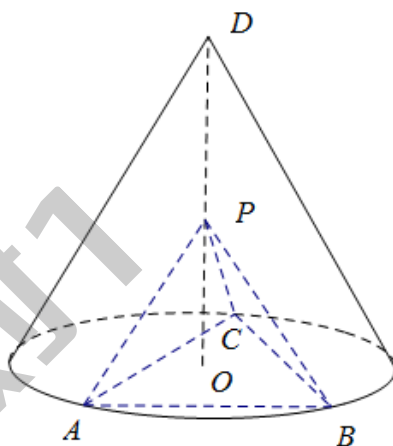
$$\therefore C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \therefore C = \frac{\pi}{12}$$

19. (12分)

如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $\angle APC = 90^\circ$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ;

(2) 设 $DO = \sqrt{2}$, 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



解 (1) 连接 AO 并延长交 BC 于点 Q , 连接 PQ , 如右图所示:
由题意知: 三角形 ABC 为正三角形, O 为三角形 ABC 外接圆

$$\because PO \perp \text{平面} ABC, BC \subset \text{平面} ABC$$

$$\therefore PO \perp BC$$

$$\because AQ, PO \subset \text{平面} PAQ, AQ \cap PO = O$$

$$\therefore BC \perp \text{平面} PAQ$$

$$\because PA \subset \text{平面} PAQ$$

$$\therefore BC \perp PA$$

$$\text{又} \because PA \perp PC, PC, BC \subset \text{平面} PBC, PC \cap BC = C$$

$$\therefore PA \perp \text{平面} PBC$$

$$\because PB \subset \text{平面} PBC$$

$$\therefore PA \perp PB$$

同理可证 $AC \perp PB$

$$\because AC, PA \subset \text{平面} PAC, AC \cap PA = A$$

$$\therefore PB \perp \text{平面} PAC$$

$\therefore PB \subset \text{平面} PAB$

$\therefore \text{平面} PAB \perp \text{平面} PAC$

(2) 设底面圆的半径为 r , 连接 AO 和 DA , 如右图所示:

由题意知 $DO \perp \text{底面} ABC$,

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle DAO$ 中, $DA = \sqrt{DO^2 + AO^2} = \sqrt{2 + r^2}$

\therefore 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$

$\therefore S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot \sqrt{2 + r^2} = \sqrt{3}\pi$

解得 $r = 1$

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = BC = 2r \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB||AC| \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

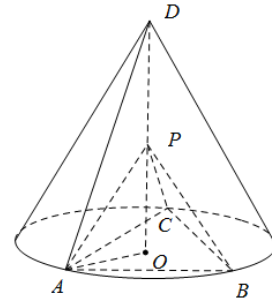
$\therefore PA \perp PC$ 且 $PA = PC$

$\therefore PA = PC = \frac{\sqrt{6}}{2}$

在 $\text{Rt}\triangle APO$ 中, $AO = 1, PA = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore PO = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$



20. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - a(x+2)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

解析:

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x-x-2$, 故 $f'(x)=e^x-1$

由 $f'(x)>0$ 得 $x>0$; 由 $f'(x)<0$ 得 $x<0$;

故 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$, $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$

(2) 由题可得 $f'(x)=e^x-a$

(i) 当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立, $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,

故 $y=f(x)$ 至多有一个零点, 不符合

(ii) 当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$.

由 $f'(x)>0$ 得 $x>\ln a$; 由 $f'(x)<0$ 得 $x<\ln a$;

故 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减, $y=f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增

故 $x=\ln a$, $y=f(x)$ 取得极小值, 也是最小值.

$$f_{\min}(x)=f(\ln a)=a-a\ln a-2a=-a(\ln a+1)$$

① 当 $0<a\leq\frac{1}{e}$ 时, $f(\ln a)=-a(\ln a+1)\geq 0$, 故 $y=f(x)$ 至多有一个零点, 不符合

② 当 $a>\frac{1}{e}$ 时, $f(\ln a)=-a(\ln a+1)<0$.

由 $f(-2)=e^{-2}>0$, $y=f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减,

故存在唯一 $x_1\in(-2,\ln a)$ 使得 $f(x_1)=0$, 即 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 存在一个零点.

令 $g(x)=e^x-x$, 故 $g'(x)=e^x-1$. 由 $g'(x)>0$ 得 $x>0$; 由 $g'(x)<0$ 得 $x<0$;

故 $y=g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

故 $x=0$, $y=g(x)$ 取得极小值, 也是最小值. $g_{\min}(x)=g(0)=1>0$

即 $e^x>x$ 在 R 上恒成立, 故 $e^{\frac{x}{2}}>\frac{x}{2}$ 即 $e^x>\frac{x^2}{4}$.

当 $x>\ln a$ 时, $f(x)=e^x-ax-2a>\frac{x^2}{4}-ax-2a=0$. 由 $\frac{x^2}{4}-ax-2a=0$

解得其中一个根 $x=2a+2\sqrt{a^2+2a}>\ln a$, 此时 $f(2a+2\sqrt{a^2+2a})>0$.

又由 $y = f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增, 故存在唯一 $x_2 \in (\ln a, +\infty)$ 使得 $f(x_2) = 0$,

即 $y = f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 存在一个零点. 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, $y = f(x)$ 有 2 个零点.

综上所述, a 的取值范围为 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

21. (12分)

已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$. P

为直线 $x = 6$ 上的动点, PA 与 E 的另一个交点为 C , PB 与 E 的另一个交点为 D .

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解析: (1)

依题: $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $G(0, 1)$ 则: $\overrightarrow{AG} = (a, 1)$, $\overrightarrow{GB} = (a, -1)$

$\therefore \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8, \therefore a^2 - 1 = 8, \therefore a^2 = 9 \therefore E$ 的方程为: $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

解析: (2) 由题意可设 $P(6, t)$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 由 (1) 得 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$.

故直线 AP 的方程可设为 $y = \frac{t}{9}(x+3)$, 联立直线 AP 和椭圆方程 $\begin{cases} y = \frac{t}{9}(x+3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$,

化简得 $(9+t^2)x^2 + 6t^2x + 9t^2 - 81 = 0$, 由韦达定理有 $-3x_1 = \frac{9t^2 - 81}{(9+t^2)}$

即 $\begin{cases} x_1 = \frac{27-3t^2}{(9+t^2)} \\ y_1 = \frac{t}{9}(x_1+3) = \frac{6t}{(9+t^2)} \end{cases}$. 故 $C(\frac{27-3t^2}{9+t^2}, \frac{6t}{9+t^2})$

同理，直线 BP 的方程可设为 $y = \frac{t}{3}(x-3)$ ，联立直线 BP 和椭圆方程 $\begin{cases} y = \frac{t}{3}(x-3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$ ，

化简得 $(1+t^2)x^2 - 6t^2x + 9t^2 - 9 = 0$ ，

由韦达定理有 $3x_2 = \frac{9t^2 - 9}{(1+t^2)}$ ，即 $\begin{cases} x_2 = \frac{3t^2 - 3}{(1+t^2)} \\ y_2 = \frac{t}{3}(x_2 - 3) = \frac{-2t}{(1+t^2)} \end{cases}$ 。故 $D(\frac{3t^2 - 3}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2})$

故直线 CD 的斜率 $k_{CD} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4t}{-3(t^2 - 3)}$

直线 CD 方程为 $y + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4t}{-3(t^2 - 3)}(x - \frac{3t^2 - 3}{1+t^2})$ ，即 $y = \frac{2t}{(t^2 - 3)}(-\frac{2x}{3} + 1)$

故直线 CD 恒过点 $(\frac{3}{2}, 0)$

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修4-4：坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^k t, \\ y = \sin^k t \end{cases}$ (t 为参数)。以坐标原点 O 为极点， x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为

$$4\rho \cos \theta - 16\rho \sin \theta + 3 = 0.$$

(1) 当 $k=1$ 时， C_1 是什么曲线？

(2) 当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标。

解：(1) 由题意知，当 $k=1$ 时，所以曲线 C_1 参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ (t 为参数)

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 1$ ，故曲线 C_1 是以原点为圆心，1 为半径的单位圆。

(2) 当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ①；

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $4x - 16y + 3 = 0$ ②;

$$\text{联立①-②} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases} \quad (\text{消 } x \text{ 得}) \quad 144y^2 - 232y + 49 = 0;$$

$$\text{解得 } y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{49}{36} (\text{舍去})$$

$$\text{所以 } x_1 = 4y_1 - \frac{3}{4} = 4 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$

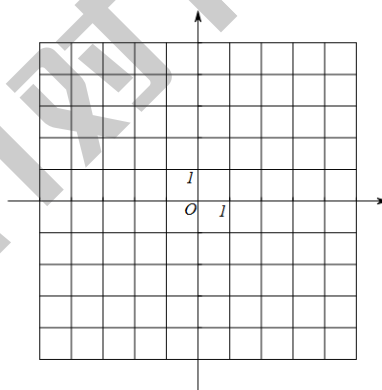
所以曲线 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 的图像;

(2) 求不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集.



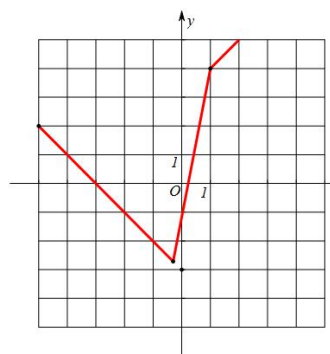
解析: (1)

$$\text{当 } x < -\frac{1}{3} \text{ 时, } f(x) = -(3x+1) + 2(x-1) = -x-3;$$

$$\text{当 } -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \text{ 时, } f(x) = (3x+1) + 2(x-1) = 5x-1;$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) = (3x+1) - 2(x-1) = x+3.$$

故 $f(x)$ 的图象如右图所示

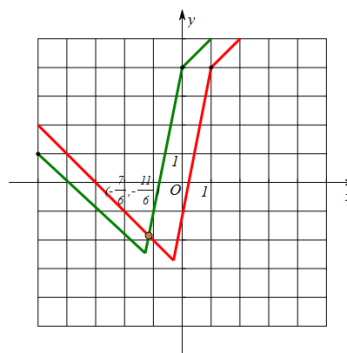


$$(2) \text{ 由 (1) 知, } f(x+1) = \begin{cases} -x-4, & x > -\frac{4}{3} \\ 5x+4, & -\frac{4}{3} \leq x \leq 0 \\ x+4, & x > 0 \end{cases} \text{ 在图中作出其图像}$$

可以解得 $f(x+1)$ 与 $f(x)$ 的交点为

$(-\frac{7}{6}, -\frac{11}{6})$ ，所以原不等式解集为

$(-\infty, -\frac{7}{6})$



学而思1对1