绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟．第Ⅰ卷1至3页，第Ⅱ卷4至6页．

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．

2．本卷共9小题，每小题5分，共45分．

参考公式：

·如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

·如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$．

·球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中 R 表示球的半径．

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

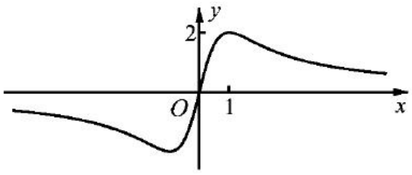
1．设全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{-3,0,2,3\}$，则 $A\cap\left(\complement_U B\right)=$（　　）

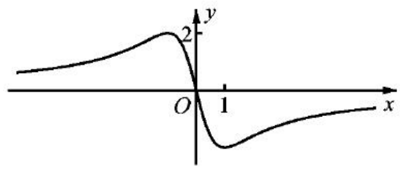
A．$\{-3,3\}$　　B．$\{0,2\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{-3,-2,-1,1,3\}$

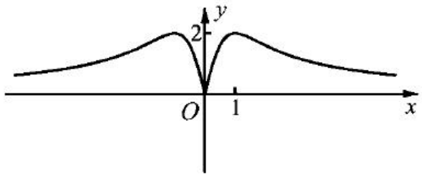
2．设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>a$”的（　　）

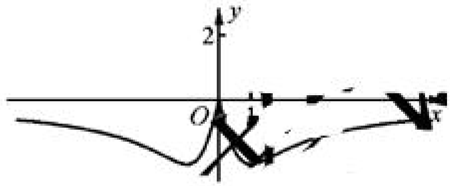
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．函数 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为（　　）

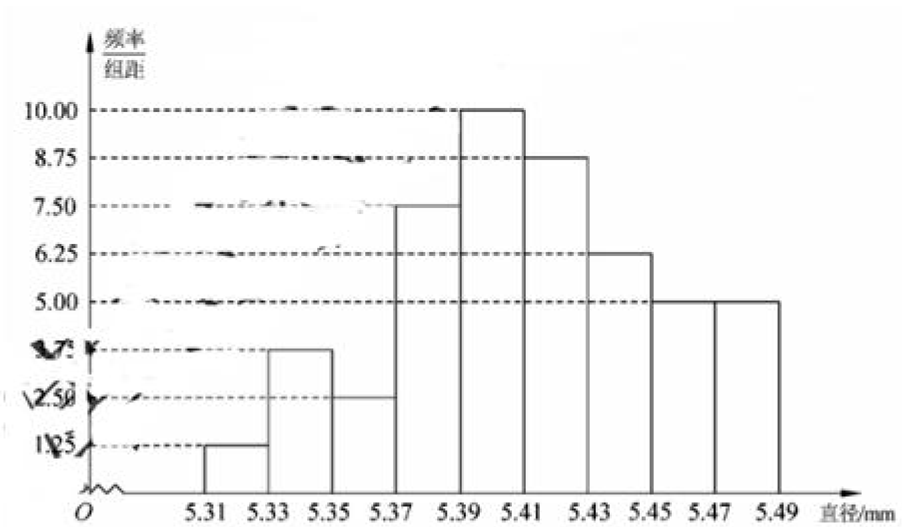
A. 

B. 

C. 

D. 

4．从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组：$[5.31,5.33),[5.33,5.35),\cdots,[5.45,5.47],[5.47,5.49]$，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间$[5.43,5.47)$内的个数为（　　）



A．10　　B．18　　C．20　　D．36

5．若棱长为$2\sqrt{3}$的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A．12π　　B．24π　　C．36π　　D．144π

6．设$a=3^{0.7}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则$a,b,c$的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

7．设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过抛物线$y^2=4x$的焦点和点$(0,b)$的直线为$l$．若$C$的一条渐近线与$l$平行，另一条渐近线与$l$垂直，则双曲线$C$的方程为（　　）

A．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　B．$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　C．$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　D．$x^2-y^2=1$

8．已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$．给出下列结论：

①$f(x)$ 的最小正周期为 2π；

②$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

③把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象．

其中所有正确结论的序号是

A．①　B．①③　C．②③　D．①②③

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|\ (k\in\mathbf{R})$ 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　B．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,2\sqrt{2})$

C．$(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　D．$(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

绝密★启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

第 II 卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共 11 小题，共 105 分．

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分．

10．i 是虚数单位，复数 $\dfrac{8-i}{2+i}=$________．

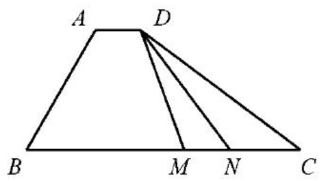
11．在 $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是________．

12．已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A,B 两点．若 $|AB|=6$，则 r 的值为________．

13．已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$．假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为________；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为________．

14．已知 $a>0,\ \ b>0$，且 $ab=1$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{8}{a+b}$ 的最小值为________．

15．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ,\ \ AB=3$，$BC=6$，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC},\ \ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$，则实数 λ 的值为________，若 M,N 是线段 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{MN}|=1$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为________．



三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．已知 $a=2\sqrt{2},b=5,c=\sqrt{13}$．

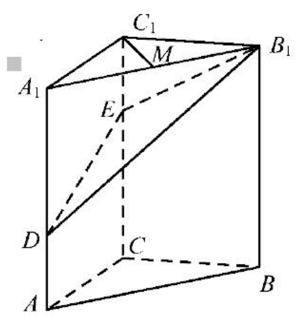
（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）求 $\sin A$ 的值；

（Ⅲ）求 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值．

17．（本小题满分 15 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 $ABC,AC\perp BC,AC=BC=2$，$CC_1=3$，点 $D,\ \ E$ 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD=1\ \ \ CE=2,\ \ M$ 为棱 A_1B_1 的中点．



（Ⅰ）求证：$C_1M \perp B_1D$；

（Ⅱ）求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值；

（Ⅲ）求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.

18.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-3)$，右焦点为 F，且 $|OA|=|OF|$，其中 O 为原点.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，点 B 在椭圆上（B 异于椭圆的顶点），直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，且 P 为线段 AB 的中点．求直线 AB 的方程.

19.（本小题满分 15 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1, a_5=5(a_4-a_3), b_5=4(b_4-b_3)$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

（Ⅲ）对任意的正整数 n，设 $c_n=\begin{cases}\frac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{为奇数},\\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

20.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in R)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（Ⅰ）当 $k=6$ 时，

（i）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ii）求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\frac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）当 $k\ldots-3$ 时，求证：对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

绝密★启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学参考解答

一、选择题：每小题 5 分，满分 45 分.

1. C　2. A　3. A　4. B　5. C　6. D　7. D　8. B　9. D

二、填空题：每小题 5 分，满分 30 分. 试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分.

10. $3-2i$　11. 10　12. 5　13. $\frac{1}{6}$；$\frac{2}{3}$　14. 4　15. $\frac{1}{6}$；$\frac{13}{2}$

三、解答题

16. 满分 14 分.

（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，由余弦定理及$a=2\sqrt{2}$，$b=5$，$c=\sqrt{13}$，有$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{4}$.

（Ⅱ）解：在$\triangle ABC$中，由正弦定理及$C=\frac{\pi}{4}$，$a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{13}$，可得$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

（Ⅲ）解；由$a<c$及$\sin A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，可得$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，进而

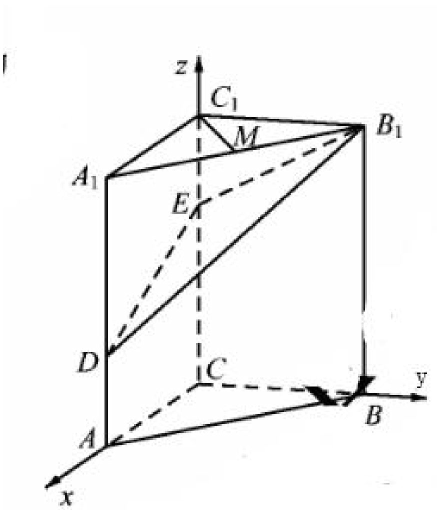
$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{12}{13}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{5}{13}$. 所以，

$$\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

17. 满分 15 分.

依题意，以C为原点，分别以$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$的方向为$x$轴，$y$轴，$z$轴的正方向建立空间直角坐标系（如图），可得$C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,3)$，

$A_1(2,0,3)$，$B_1(0,2,3)$，$D(2,0,1)$，$E(0,0,2)$，$M(1,1,3)$.



（Ⅰ）证明：依题意，$\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(2,-2,-2)$，从而$C_1M\cdot B_1D=2-2+0=0$，所以$C_1M\perp B_1D$．

（Ⅱ）解：依题意，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$是平面$BB_1E$的一个法向量，$\overrightarrow{EB_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{ED}=(2,0,-1)$．设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面$DB_1E$的法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2y+z=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$不妨设$x=1$，可得$\vec{n}=(1,-1,2)$．

因此有$\cos\langle\overrightarrow{CA},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CA}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，于是$\sin\langle\overrightarrow{CA},\vec{n}\rangle=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

所以，二面角$B-B_1E-D$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

（Ⅲ）解：依题意，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$．由（Ⅱ）知$\vec{n}=(1,-1,2)$为平面$DB_1E$的一个法向量，于是

$$\cos\left\langle\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}\right\rangle=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以，直线AB与平面DB_1E所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

18．满分 15 分．

（Ⅰ）解：由已知可得$b=3$．记半焦距为c，由$|OF|=|OA|$可得$c=b=3$．又由$a^2=b^2+c^2$，可得$a^2=18$．所以，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$．

（Ⅱ）解：因为直线AB与以C为圆心的圆相切于点P，所以$AB\perp CP$．依题意，直线AB和直线CP的

斜率均存在．设直线 AB 的方程为 $y=kx-3$．由方程组 $\begin{cases} y=kx-3, \\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1, \end{cases}$ 消去 y，可得 $\left(2k^2+1\right)x^2-12kx=0$，解得 $x=0$，或 $x=\dfrac{12k}{2k^2+1}$．依题意，可得点 B 的坐标 $\left(\dfrac{12k}{2k^2+1},\dfrac{6k^2-3}{2k^2+1}\right)$．因为 P 为线段 AB 的中点，点 A 的坐标为 $(0,-3)$，所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{6k}{2k^2+1},\dfrac{-3}{2k^2+1}\right)$．由 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，得点 C 的坐标为 $(1,0)$，故直线 CP 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{-3}{2k^2+1}-0}{\dfrac{6k}{2k^2+1}-1}$，即 $\dfrac{3}{2k^2-6k+1}$．又因为 $AB\perp CP$，所以 $k\cdot\dfrac{3}{2k^2-6k+1}=-1$，整理得 $2k^2-3k+1=0$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$，或 $k=1$．

所以，直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-3$，或 $y=x-3$．

19．满分 15 分．

（Ⅰ）解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．由 $a_1=1$，$a_5=5\left(a_4-a_3\right)$，可得 $d=1$，从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$．由 $b_1=1,\ \ b_5=4\left(b_4-b_3\right)$，又 $q\neq0$，可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$，从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$．

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）可得 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，故 $S_nS_{n+2}=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$，$S_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}(n+1)^2\left(n+2\right)^2$，从而 $S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=-\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)<0$，所以 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$．

（Ⅲ）解：当 n 为奇数时，$c_n=\dfrac{\left(3a_n-2\right)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$；当 n 为偶数时，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\dfrac{n-1}{2^n}$．

对任意的正整数 n，有

$$\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2k}}{2k+1}-\frac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\frac{2^{2n}}{2n+1}-1,$$

和

$$\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{4^k}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{5}{4^3}+\cdots+\frac{2n-1}{4^n}. \qquad ①$$

由①得

$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{2n-3}{4^n}+\frac{2n-1}{4^{n+1}}$.　　　　②

由①②得 $\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{2}{4^n}-\frac{2n-1}{4^{n+1}}=\frac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}-\frac{2n-1}{4^{n+1}}$，从而得 $\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{5}{9}-\frac{6n+5}{9\times4^n}$.

因此，$\sum_{k=1}^{2n}c_k=\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times4^n}-\frac{4}{9}$.

所以，数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times4^n}-\frac{4}{9}$.

20．满分 16 分.

（Ⅰ）（i）解：当 $k=6$ 时，$f(x)=x^3+6\ln x$，故 $f'(x)=3x^2+\frac{6}{x}$. 可得 $f(1)=1$，$f'(1)=9$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=9(x-1)$，即 $y=9x-8$.

（ii）解：依题意，$g(x)=x^3-3x^2+6\ln x+\frac{3}{x},x\in(0,+\infty)$. 从而可得 $g'(x)=3x^2-6x+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}$，整理可得 $g'(x)=\frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$. 令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 x 变化时，$g'(x),g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以，函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$；$g(x)$ 的极小值为 $g(1)=1$，无极大值.

（Ⅱ）证明：由 $f(x)=x^3+k\ln x$，得 $f'(x)=3x^2+\frac{k}{x}$.

对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，令 $\frac{x_1}{x_2}=t\quad(t>1)$，则

$\left(x_1-x_2\right)\left(f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)\right)-2\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left(3x_1^2+\frac{k}{x_1}+3x_2^2+\frac{k}{x_2}\right)-2\left(x_1^3-x_2^3+k\ln\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$=x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)-2k\ln\frac{x_1}{x_2}$$

$$=x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right). \qquad ①$$

令 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x,\quad x\in[1,+\infty)$．当 $x>1$ 时，$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0$，由此可得 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，所以当 $t>1$ 时，$h(t)>h(1)$，即 $-\frac{1}{t}-2\ln t>0$．因为 $x_2 \geqslant 1$，$t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3>0,\quad k \geqslant -3$，所以，

$$x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)>(t^3-3t^2+3t-1)-3\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)$$

$$=t^2-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1. \qquad ②$$

由（Ⅰ）（ii）可知，当 $t=1$ 时，$g(t)>g(1)$，即 $t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}>1$，故

$$t^2-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1>0. \qquad ③$$

由①②③可得 $\left(x_1-x_2\right)\left(f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)\right)-2\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)>0$．所以，当 $k \geqslant -3$ 时，对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\frac{f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)}{2}>\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$．